

الجامعة المصرية
كلية الهندسة والعلوم

الميكانيكا التحليلية



محمد الهادي الكردي
مدرس الهندسة الوصفية
بكلية الهندسة

دكتور علي مصطفى مشرف
أستاذ الرياضيات التطبيقية
بكلية العلوم

مطبعة بول باريه
٨ حارة فايد بشارع إبراهيم باشا بمصر
١٩٣٧

الجامعة المصرية

كلية الهندسة والعلوم

المهندسة الوصفية



محمد الحامى الكردانى

مدرس الهندسة الوصفية

بكلية الهندسة

دكتور على مصطفى مشرف

استاذ الرياضه التطبيقية

بكلية العلوم

مطبعة بول باريه

٨ حارة فايد بشارع ابراهيم باتا نصر

١٩٣٧

مقدمة

تعتبر الهندسة الوصفية بحق من العلوم الاساسية للهندس فان تعريفها كعلم يبحث في طرق الاسقاط المختلفة وفي استخدام هذه الطرق لتمثيل مختلف المنحنيات والسطوح والاجسام تمثيلاً بيانياً — هذا التعريف يرسم للعلم حدوداً واسعة بعيدة المدى هي في نفس الوقت حدود واضحة صريحة في الدلالة على مبلغ حيويته بالنسبة للرجل الفنى ولقد قيل قديماً ، إن الهندسة الوصفية هي اللغة التي يتخاطب بها الفنيون . على أن أهمية هذا العلم ليست قاصرة على هذه الناحية العملية فقط فان له أيضاً أهميته وخطره عند المهندس والرياضى على السواء من الناحيتين الثقافية والعلمية لما له من أثر بعيد في توسيع المدارك وتربية ملكة التصور وفائدة كبيرة في تحقيق النظريات الفراغية تحقيقاً عملياً . وعلى الرغم من ذلك نجد عدد المؤلفات في الهندسة الوصفية في بعض اللغات الحديثة كاللغة الانجليزية مثلاً قليلاً ولا يفي بالحاجة مع أننا في الوقت نفسه نستطيع أن نلاحظ كثرة ملبوسة في عدد الكتب التي وضعت لهذا العلم في اللغات الاخرى .

وفي الكتاب الذي نقدمه اليوم للقراء أردنا أن نجتمع بين بحث المبادئ الهندسية الاساسية التي تبنى عليها عمليات التمثيل الوصفى وبين شرح أهم هذه العمليات والتطبيق عليها وقد افترضنا معرفة طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين مع الاستفادة من خط الارض وهي الطريقة الابتدائية المشروحة في كثير من المؤلفات الشائعة كما افترضنا أيضاً أن القارئ لم ياهم النظريات المتعلقة ببعض السطوح الاساسية مثل كثيرات الالوجه المستوية والكرة والسطحين المخروطي والاسطوانى . ولم تعرض في الكتاب لطريقتي الاسقاط الاكسنترى والاسقاط المتوازى المائل وذلك رغبة في الإيجاز الذي لا نعتد أن له مساساً بالموضوع .

أما عن المصطلحات المستخدمة في الكتاب فإن الكثير منها قد صار شائعاً ومتفقاً عليه في المؤلفات الرياضية غير أن البعض اجتهد لا يزال قابلاً للنقد والتحجيص وقد راعينا عند التعبير عن المعاني الهندسية بالفاظ جديدة أن تكون هذه الالفاظ متمشية مع روح اللغة وروح العلم في آن واحد كما أننا لم نحاول أن نحكي أية لغة أجنبية بالذات محاكاة شكلية بأن نقل المعنى عنها نقلاً بل جعلنا اللفظ معبراً عن المعنى الذي يريد المؤلف العربي أن يعبر عنه بطريقة طبيعية بسيطة . أما نقل اللفظ ذاته فقد استبحناه لأنفسنا في بعض الحالات التي أجمعت فيها اللغات الأجنبية الشائعة على اقتباسه من أصل إغريقي أو لاتيني ووجدنا من المناسب أن نقله إلى لغتنا . ونرجو أن يمد القارئ فائدة في القاموس الذي ذيلنا به الكتاب مشتملاً على المعاني الإنجليزية والفرنسية والألمانية لأهم المصطلحات المستعملة .

ولم يكن هناك بد من استخدام الحروف الإغريقية للدلالة على الخطوط والمستويات ولا نرى غشاضة في ذلك إذ أن اللغة الإغريقية مرتبطة ارتباطاً متيناً بتاريخنا وثقافتنا والحروف الإغريقية ذاتها لا تختلف كثيراً عن الحروف القبطية . وقد رأينا تسليلاً للقارئ أن نثبت الإيجدية الإغريقية في الصفحة التالية للبقية ونرى واجباً علينا أن نشير هنا إلى أن معظم الحروف الإغريقية على وجه الخصوص تختلف بعض الشيء في الأشكال والرسومات عنها في نص الكتاب على أننا نرجو ألا يكون هذا الاختلاف البسيط حائلاً بين القارئ وبين فهمه لهذه الأشكال .

أما عن التمارين فيجد القارئ بعضاً منها في أماكن متفرقة من الكتاب وكذا في نهايته ويهمننا أن نوجه نظر القارئ بهذه المناسبة إلى ضرورة استخدام اللوحة والمسطرة لحل التمارين نظرية كانت أو عملية حلاً دقيقاً كاملاً إذ أن هذه هي الطريقة الأكيدة المؤدية إلى تفهم نظريات الهندسة الوصفية . ومن المفيد أن يكثر القارئ بصفة خاصة من حل المسائل العملية المتعلقة بتقاطع السطوح ورسم الظلال

والصور المنظورية الخ فان مثل هذه المسائل من شأنها أن تربي فيه ملكة التصور العملية فيصبح بعد قليل قادراً على قراءة الرسومات الفنية قراءة صحيحة وعلى التعبير عما يريد التعبير عنه من مختلف السطوح والانشاءات ؟

ديسمبر سنة ١٩٣٥

استدراك

تسربت بعض الاخطاء المطبعية الى قليل من صفحات الكتاب وأنا لا نشك في أن معظم هذه الاخطاء إن لم تكن كلها هي مما يستطيع القارئ تصحيحه بنفسه بسهولة ولذا تقتصر على الاشارة الى بعضها فيما يلي :

صفحة	سطر	خطأ	صواب	صفحة	سطر	خطأ	صواب
١٨٠	٢٠	سم	سم	٣١٣	٨	ن'∞ =	ن'∞ =
١٩٢	٨	و'∞	و'∞	٣٩٩	٣	٨,٠	٧,٠

كذلك يجد القارئ في أمكنة متفرقة من الكتاب لفظة «اتلاف مطلق» للدلالة على علاقة هندسية كالتي توجد بين شكلين أحدهما المسقط المتوازي غير المباشر للآخر فزجوا دفءاً لما عساه أن يتبادر الى الذهن من أن هذا النوع من الاتلاف هو نفسه الاتلاف الذي أطلقنا عليه اسم اتلاف إسقاطي أو اتلاف عام — أن نقرأ اللفظة المشار إليها أينما وجدت هكذا : «اتلاف متوازي مطلق» باعتباره أطلق من قيد عدم المباشرة في الاسقاط المتوازي .

مروفي الابجدية الاغريقية

N	ν	Ni	ني	A	α	Alpha	ألفا
Ξ	ξ	Xi	اكسي	B	β	Bita	بيتا
O	ο	Omikron	أوميكرون	Γ	γ	Gamma	جاما
Π	π	Pi	بي	Δ	δ	Delta	دلتا
P	ρ	Rho	رو	E	ε	Epsilon	أبسيلون
Σ	σ	Sigma	سيجما	Z	ζ	Zita	زيتا
T	τ	Tau	طو	H	η	Ita	ايتا
Υ	υ	Ypsilon	إبسيلون	Θ	θ	Thita	ثيتا
Φ	φ	Phi	في	I	ι	Iota	يوتا
X	χ	Chi	خي	K	κ	Kappa	كابتا
Ψ	ψ	Psi	أبسي	Λ	λ	Lambda	لمدا
Ω	ω	Omega	أوميغا	M	μ	Mi	مي

فهرس

بند	صفحة
تمهيد	١

الباب الاول

طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين مع حذف خط الارض

١	الفصل الاول: حذف خط الارض	٤
٣	الفصل الثاني: تمثيل النقطة والمستقيم والمستوى	١١
٧	الفصل الثالث: مسائل الوضع	١٧
١١	الفصل الرابع: الالتلاف المتوازي والالتلاف المطلق	٢٦
١٦	الفصل الخامس: مسائل القياس	٤٣
١٩	الفصل السادس: تغير مستوي الاسقاط أو المساقط المساعدة	٥٤
٢١	الفصل السابع: الظلال	٦٢

الباب الثاني

المنحنيات والسطوح

تعريف ومبادئ أساسية

٣١	الفصل الاول: المنحنيات المستوية	٧٧
٣٧	الفصل الثاني: المنحنيات الفراغية	٨٩
٤٢	الفصل الثالث: السطوح	٩٩

الباب الثالث

منحنيات الدرجة الثانية أو المقاطع المخروطية

بند	صفحة
٤٦	الفصل الاول: القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ ١١١
٥٠	الفصل الثاني: المقاطع المستوية للمخروط الدوراني ١٣١
٥٢	الفصل الثالث: النسب المضاعفة والتقسيم التوافقي ١٤١
٥٦	الفصل الرابع: الالتلاف (العام) أو الالتلاف الاسقاطي ١٦١
٦٣	الفصل الخامس: الالتلاف المركزي ١٧٠
٧٠	الفصل السادس: المنحنيات المؤتلفة مركزياً مع الدائرة ... ١٨٧
٧٥	الفصل السابع: استخدام الالتلاف المركزي في حل بعض المسائل ورسم دائرة الانحناء ٢٠٠
٧٩	الفصل الثامن: الهندسة الاسقاطية للمقاطع المخروطية ... ٢١٦

الباب الرابع

السطوح الدورانية

٩٦	الفصل الاول: الراسم خط منحن ٢٧٧
١٠٥	الفصل الثاني: السطح الزائدي الدوراني ذو العلية الواحدة ٢٩١

الباب الخامس

السطوح اللولبية

١٠٨	الفصل الاول: المنحنى اللولبي وسطحه اللولبي القابل للاستواء ٢٩٧
١١٤	الفصل الثاني: السطوح اللولبية على وجه العموم ٣٠٦

بند	صفحة
١١٨	الفصل الثالث : السطوح اللولية المسطرة ٣١١
	الباب السادس
	السطوح المسطرة
١٢٢	الفصل الاول : تعاريف ومبادئ أساسية ٣٢٢
١٢٤	الفصل الثاني : السطوح القابلة للاستواء ٣٢٦
١٣٠	الفصل الثالث : السطوح المعوجة على وجه العموم ٣٣٧
١٣٤	الفصل الرابع : السطوح المسطرة من الدرجة الثانية ٣٤٧
	الباب السابع
	سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة
١٣٦	الفصل الاول : السطح الناقصى والسطح المكافئ الناقصى
٣٥٦	والسطح الزائدى ذو الطيتين ٣٥٦
١٣٩	الفصل الثاني : السطوح المؤتلفة مركزياً مع الكرة ... ٣٦٠
	الباب الثامن
	الانقاط الرقى
١٤٠	الفصل الاول : كلمة عامة وتعاريف ٣٦٤
١٤٢	الفصل الثاني : تمثيل النقطة والمستقيم والمستوى ٣٦٦
١٤٩	الفصل الثالث : مسائل الوضع ٣٧٧
١٥٣	الفصل الرابع : مسائل القياس ٣٨٢

الباب التاسع

صفحة	السطوح الطبوغرافية	بند
٣٩١	كلمة عامة وتعريف	١٥٦ الفصل الاول :
٣٩٥	بعض المسائل الاساسية	١٦١ الفصل الثانى :
٤٠٠	الخطوط المنحنية على سطح طبوغرافى	١٦٥ الفصل الثالث :
٤٠٨	سطوح الميل وتقاطعها مع السطوح الطبوغرافية	١٧٠ الفصل الرابع :
٤١٤	أمثلة عملية	١٧٣ الفصل الخامس :

الباب العاشر

الانقاط المركزى أو المنظور

٤٢١	تعريف ومبادئ أساسية	١٧٦ الفصل الاول :
٤٢٤	تمثيل النقطة والمستقيم والمستوى	١٧٩ الفصل الثانى :
٤٣١	مسائل الوضع	١٨٢ الفصل الثالث :
٤٤٥	مسائل القياس	١٨٩ الفصل الرابع :
٤٦٤	رسم الصور المنظورية	١٩٣ الفصل الخامس :

الباب الحادى عشر

المبادئ الاساسية لعلم القرونوغرافيا

٤٧٩	كلمة عامة	١٩٨ الفصل الاول :
٤٨٣	تعيين الاجسام الهندسية من صورة واحدة	١٩٩ الفصل الثانى :

بند	صفحة
٢٠١	الفصل الثالث : القواعد الهندسية للمساحة الفوتوغرامترية
٤٩٣	الارضية
	الباب الثاني عشر
	الخرائط الجغرافية
٢٠٣	الفصل الاول : كلمة عامة
٥٠٣	الفصل الثاني : الخرائط الاستريوغرافية
٥١٣	تمارين عامة
XI-I	قاموس

تمهيد

تبحث الهندسة الوصفية في تمثيل الاشكال الهندسية الفراغية (النقط والخطوط والسطوح والاجسام) تمثيلاً بيانياً على سطح مستو^(١) . ونستخدم

(١) لا يعرف على وجه التحديد التاريخ الذي بدأ الانسان فيه بالتعبير بواسطة الرسم عما يريد التعبير عنه من مجسمات ومنشآت وغير ذلك من اشكال متعلقة بالفنون والصناعات . وأغلب الظن أن يكون هذا التاريخ مقارباً لتاريخ الفن نفسه حيث فقت الحاجة للفنان عن هذه الرسومات الوصفية . وتدل الرسومات التي اكتشفت بين آثار قدماء المصريين والتي كانت مصحوبة بالابعاد والمقاييس ليس فقط على أن « فن » الهندسة الوصفية كان معروفاً لدى هؤلاء المصريين القدماء بل أيضاً على تقدمهم في هذا الفن لدرجة الالمام بطريقة الاسقاط العمودي . ولقد تعرض المهندس المعماري المشهور قروفيوس M. Vitruvius للعاصر للسيج عليه السلام في كتابه عن فن العمارة De architectura للبحث في طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين .

أما جاسبار مونج Gaspard Monge الذي ينسب اليه دائماً الفضل في وضع أسس الهندسة الوصفية كعلم فقد بدأ بجمع وترتيب تلك الطرق المصطلح عليها والتي استعملت لتمثيل الاشكال الهندسية الفراغية في رسومات العصور المختلفة ثم نسقها تنسيقاً علمياً منظماً . وقد بدأ مونج عام ١٧٩٥ بالقاء محاضراته عن الهندسة الوصفية في مدرسة Ecole normale وبعد ذلك في مدرسة الهندسة بباريس Ecole Polytechnique . وإلى هذه المحاضرات القيمة التي جمعها مونج في كتاب أصدره عام ١٧٩٨ يرجع الفضل في تلك المكاة العالية التي تبوأها هذا العلم في زمن قصير سواء في هذه المدرسة أو في مدارس الهندسة التي أنشئت بعدها في الدول الاخرى — والتي ظل يشغلها للآن . هذا وقد ولد مونج عام ١٧٤٦ وتوفي عام ١٨١٨ واضطهد كثيراً أثناء حياته لمبادئه السياسية وتعلقه بأنصار الثورة الفرنسية وناپليون .

لهذا الغرض طرق ^(١) مختلفة يراعى فيها جميعاً أن يكون تمثيل أية مجموعة فراغية بواسطة شكل مستو يمر عنها من حيث الهيئة والوضع تعبيراً دقيقاً ويسمح باستنباط وقياس أبعادها الحقيقية ^(٢).

والفكرة الأساسية التي تتبنى عليها هذه الطرق هي فكرة « الإسقاط » وذلك بأن نفترض نقطة ثابتة في الفضاء تسمى مركز الإسقاط ونصل هذا المركز بمستقيمتين الى نقط المجموعة الفراغية المراد تمثيلها فإذا تقاطعت هذه المستقيمتان التي يطلق عليها اسم الإسقاطية مع مستو معلوم يسمى مستوى الإسقاط فإن نقط التقاطع يتألف منها الشكل البياني المطلوب الممثل للمجموعة والذي يسمى لذلك مسقط المجموعة الفراغية من المركز المعلوم على المستوى المعلوم .

فإذا كان مركز الإسقاط على بعد نهائى محدود أطلق على هذه الطريقة اسم طريقة الإسقاط المركزى أو المنظور ^(٣) . أما إذا تصورنا ابتعاد المركز الى

(١) توجد طرق تمثيلية أخرى غير الرسومات المستوية مثل عمل النماذج الصغيرة للمنشآت وغيرها . غير أن هذه الطرق التي تستخدم في بعض الأحوال التصويرية كما في المعارض والمدارس وفي بعض الشؤون الفنية لعمل التجارب واختبار المواد — ليست موضوع البحث في هذا الكتاب .

(٢) من هنا نشأ تقسيم المسائل المتعلقة بالأشكال الفراغية الى مسائل وضعية ومسائل قياسية (بند ٦) فالقسم الأول يبحث في بيان القواعد الأساسية « لرسم » أية مجموعة هندسية يراد تمثيلها وكذا « قراءة » رسم معين معبر عن مثل هذه المجموعة . أما القسم الثاني فيبحث في كيفية استنباط المقاييس والأبعاد الحقيقية للمجموعة من الشكل المستوى المبين لها .

(٣) هذه الطريقة هي أيضاً قديمة جداً ويغلب على الظن أنها كانت معروفة لدى قدماء الإغريق والرومان . على أن استعمالها في صورة منتظمة بدأ في إيطاليا في القرن الخامس عشر حيث ظهر عام ١٤٣٦ أول كتاب عن المنظور باسم Della pictura libri tre

لؤلؤفة التابعة المشهور ليون باتيستا البرتي Leon Battista Alberti .

ما لا نهاية فإن الاشعة الاسقاطية تقول الى مستقيمت توازي جميعاً اتجاهها ثابتاً
ويسمى الاسقاط في هذه الحالة اسقاطاً متوازيًا كما يسمى الاتجاه الثابت اتجاه الإسقاط .
ويكون الاسقاط المتوازي مائل أو عمودياً على حسب كون اتجاه الاسقاط
مائلاً أو عمودياً على مستوى الاسقاط .

والمنظور هو أعم طرق الاسقاط المستعملة في الهندسة الوصفية وأكثرها
بلاغة في التعبير عن المجسمات الفراغية المراد تمثيلها ولكنه في الوقت نفسه
أقلها سهولة في تعيين الأبعاد الحقيقية . أما أسهل طرق الاسقاط في تعيين الأبعاد
الحقيقية فهي طريقة الإسقاط العمودي . ولهذا السبب يلجأ المهندس الى
استخدام الاسقاط العمودي (طريقة مونج وطريقة الاسقاط الرقي) في رسوماته
الفنية «كلمة» يتخاطب بها مع غيره من المهندسين والفنيين . أما اذا أراد عمل
رسومات تصويرية توضيحية لغير الفنيين من الصناع والعمال فانه يستخدم لذلك
تلك الطرق التصويرية كالمنظور والاسقاط المتوازي المائل والاسقاط
الاكسنترى ^(١) . ويلاحظ أن الوسائل والصور التوضيحية التي سنستعملها في
المستقبل لشرح بعض المواضيع والمسائل الفراغية (أنظر مثلاً شكل ١٤ أو ٣٧)
ما هي إلا مساقط متوازية مائلة .

(١) هو إسقاط عمودي على مستو مائل على المستويات الرئيسية الثلاثة في طريقة
مونج (وهي المستوى الاقي والمستوى الرأسى والمستوى العمودي على خط الارض)
وقد يكون الاسقاط مائلاً على هذا المستوى فيسمى في هذه الحالة «بالاسقاط الاكسنترى
المائل» . والاسقاط الاكسنترى من الطرق التصويرية المهمة — خصوصاً في الهندسة
الميكانيكية — التي لم يتبع نطلق الكتاب للبحث فيها .

الباب الاول

طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين مع مزف خط الازمده

الفصل الاول

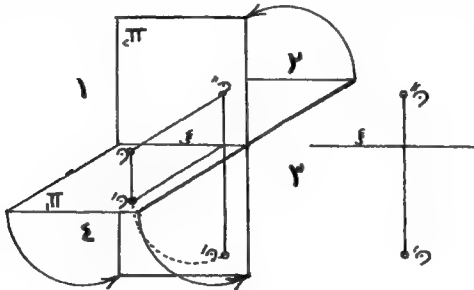
حذف خط الارض

بشر ١ : كلمة تمهيدية وتعريف

معلوم أن المسقط العمودى لنقطة في الفراغ على مستو هو موقع العمود النازل منها على المستوى . ولكل نقطة في الفراغ مسقط ^(١) واحد على مستو معلوم . غير أن مسقط نقطة ما مثل د لا يحدد وضعها في الفراغ إلا اذا علم بعدها عن مستوى الاسقاط . وهذا البعد يمكن تحديده إما بكتابتة بجانب المسقط الذى يسمى في هذه الحالة بالمسقط المرقوم وهى طريقة للاسقاط سنفردها باباً خاصاً فيما يأتى . أو باعطاء المسقط النقطة على مستو آخر عمودى على المستوى الاول . فلذا أسمينا المسقط الاول د والثانى د' (شكل ١) فان بعد د' العمودى عن خط تقاطع المستويين يساوى البعد المطلوب تحديده للنقطة د عن المستوى الاول . فالنقطة ازمده بخرده وضعها في الفراغ اذا علم مسقطها على مستويين متعامدين

(١) لما كانت طريقة الاسقاط العمودى هى اكثر طرق الاسقاط استعمالاً في الرسوم الهندسية فكلمة "مسقط" أو "إسقاط" بغير تعريف تستعمل غالباً للدلالة على المسقط أو الاسقاط العمودى فقط إلا اذا كان سياق الكلام ينصرف الى غير ذلك .

يطلق عليهما اسم مستوي الموقاط ويختار أحدهما غالباً أفقياً ويسمى المستوي الارضي والآخر رأسيًا ويسمى المستوي الرأسي وسنرمز لهذين المستويين بالرمزين Π و Π' على التوالي. ويسمى خط تقاطعهما ϵ خط الارض كما تسمى δ بالمقط الارضي δ "المقط الرأسي للنقطة δ ". ولرسم المسقطين معاً على مستو واحد — هو مستوي الورقة — تصور دوران أحد مستوي الاسقاط حول خط الارض الى أن ينطبق تماماً على الآخر ويكون ذلك إما بإدارة Π في الاتجاه المبين في (شكل ١) الى أن ينطبق على Π' أو بإدارة Π' في الاتجاه المضاد للاتجاه المبين في (شكل ١) الى أن ينطبق على Π أى بحيث ينطبق النصف الأعلى من Π على النصف الخلفي من Π' وينطبق النصف الأسفل من Π على النصف



(شكل ١)

الأمامي من Π وبذا نحصل على المسقطين δ و δ' "لنقطة δ وقد أمكن رسمهما في مستو واحد ويكون بعده عن Π أو Π' مساوياً لبعده" أو δ عن خط الارض ϵ على التوالي ويسمى المستقيم δ "العمودى على خط الارض بخط الانتظار". ويقسم المستويان الرئيسيان للاسقاط Π و Π' الفراغ الى أربعة زوايا زوئية هي الميئة في (شكل ١) بالارقام ١، ٢، ٣، ٤ وعلى حسب ما تكون النقطة واقعة

داخل أحد هذه الزوايا الزوجية يكون بعدها عن Π_2, Π_3 : $(+ \Pi_2)$ و $(- \Pi_2)$ و $(- \Pi_3)$ و $(+ \Pi_3)$ على التوالي . وإذا فرضنا نقطة مثل ب داخل الزاوية الزوجية الثانية أو الرابعة بحيث يكون بعدها عن Π_2, Π_3 متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة فإنه يحدث عند تطبيق أحد مستوي الإسقاط على الآخر كما تقدم — أن ينطبق مسقطا النقطة بحيث يكون ب' = ب" (قارن شكل ٦) .

والمحل الهندسى لكل نقطة في الفراغ يكون بعدها عن Π ، Π' متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة وذلك مثل النقطة ب السالفة الذكر — هو المستوى المنصف للزاويتين الزوجيتين الثانية والرابعة. ويطلق على هذا المستوى اسم مستوى الاصفوف^(١).

هذه الطريقة للاسقاط المسماة بطريقة الاسقاط على مستويين متعامدين أو طريقة مونت نسبة الى واضعها «جاسبار مونت»^(٢) الذي يرجع اليه الفضل في وضع أسس الهندسة الوصفية كعلم هي الطريقة التي نريد فيما يلي أن ندخل عليها بعض التعديل فإرضين أن الطالب قد ألم بمبادئها الاساسية .

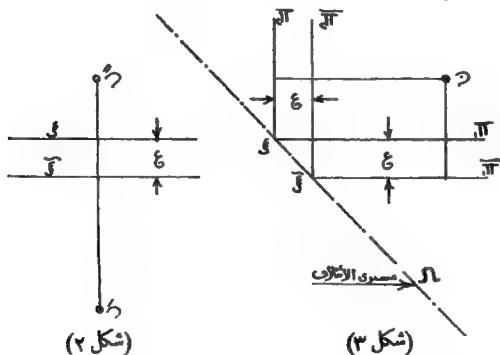
بئر ٢ : معنى حفز فط الارضه وتأثيره والاسباب المراعيه لذلك

(شكل ٢) يبين مسقطي نقطة مثل \odot على مستوي الإسقاط الرئيسيين II_٩, II_{١٠} المتقاطعين في خط الارض E . فالذا فرضنا أن خط الارض قد تحرك موازياً لنفسه حتى أخذ الوضع E' المبين بالشكل وأن مسقطي النقطة لم يغيرا وضعهما فعني ذلك أن بعد النقطة عن المستوى الاقبي II_{١٠} قد زاد بمقدار e — وهي

(١) سمى كذلك بالنظر الى العلاقة الائتلافية بين المسقطين الاقوى والرأسى لآى شكل مستو (قارن بند ١٤) .
(٢) راجع ماضى التمهيد .

المسافة التي تحركها خط الارض موازياً لنفسه — بينا بعدها عن المستوى الرأسى Π قد نقص في الوقت ذاته بنفس المقدار ع .
 فاذا كانت النقطة \mathcal{C} ثابتة في الفراغ فان معنى ذلك أن مستوي الاسقاط قد تحرك معاً واتخذوا الوضعين Π' و Π'' كما هو مبين في (شكل ٢) بحيث يبقى خط الارض موجوداً في مستوى الاوتوف Ω الذي لا يتأثر لهذا السبب بتلك الحركة الانتقالية لخط الارض .

ومعنى هذا أنه مستوى الاوتوف ثابت لجميع اوضاع مستوى الاسقاط بفرصه ثبوت اتجاهه فهذه المستويين وثبتت المسطوع \mathcal{C} و \mathcal{C}' في (شكل ٢) لنقطة ثابتة في الفراغ مثل \mathcal{C} .



أو بعبارة أخرى كل اتجاه معين لخط الارض — وبالتالي لخطوط التناظر — يحدد مستوى ائتلاف ثابت يحتوى جميع نقط الفراغ التي ينطبق حينئذ المسقطان الاقنى والرأسى لكل منها على بعضهما . فاذا تغير الاتجاه تغير المستوى .
 ولناخذ الآن مثلاً صغيراً عن إيجاد البعد الحقيقي بين النقطتين \mathcal{C} و \mathcal{C}'

في (شكل ٤) المعلومة كل منهما بمسقطها الاقوى والرأسي .

فهذا البعد يمكن إيجاده باحدى طريقتين :

(١) نطبق شبه المنحرف $ب' ا' ا' ب'$ على المستوى الاقوى بأن نأخذ $ا'$ [١]

$ب'$ [٢] مساويين لارتفاع $ا' ب'$ عن المستوى الاقوى على التوالى ومقيسين من

المسقط الرأسى فيكون البعد الحقيقي هو [١] [٢] [ب]

(٢) نرسم المثلث المظلل [ب] $ب' ا'$ الذى فيه الضلع $ب' [ب]$ عمودى على

$ا' ب'$ ومساو للفرق بين ارتفاعى $ب' ا'$ عن المستوى الاقوى فيكون البعد الحقيقي

المطلوب هو $ا' [ب]$.

وهذا المثلث يمكن

اعتباره تطبيقاً للمستوى

المسقط (١) أفقياً للمستقيم

$ا' ب'$ على مستو افقى مار

بالنقطة $ا'$ أو يمكن اعتباره

تطبيقاً للمستوى المسقط على

المستوى الاقوى نفسه اذا

تخيلنا أن خط الارض $ا' ب'$

قد انتقل موازياً لنفسه حتى أخذ الوضع $ا' ب'$.

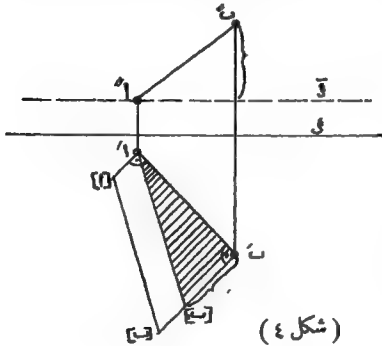
فاذا استعملنا الطريقة الثانية وهى الأسهل ظهر لنا انما هو الاستفتاء عن منط

الارض . كلية أعنى نفس الخط أما الاتجاه فلا بد أن يكون معلوماً لانه دائماً

(١) المستوى المسقط (بضم الميم وكسر القاف) لمستقيم على مستو مثل II هو

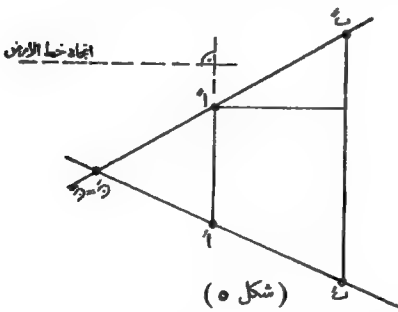
المستوى المعين بالمستقيم والعمود النازل من احدى نقطه على المستوى II فالمستوى

المسقط أهياً لمستقيم هو المستوى المعين بالمستقيم نفسه ومسقطه الاقوى .



عمودي على خطوط التناظر وهذا الاتجاه هو الذي يحدد اتجاه مستوي الاسقاط الرئيسيين Π_1, Π_2 .

والذي ينتج من حذف خط الارض هو ألا يكون لدينا مستويان ثابتان للاسقاط أو بمعنى آخر أن تصبح أبعاد التقطع عن مستوي الاسقاط (إذا افترضنا وجودهما) غير معروفة . أما العلاقة بين النقطتين a, b مثلاً في (شكل هـ) فهي لا تتأثر بحذف خط الارض وكذلك نقطة تقابل المستقيم ab مع مستوي الالتفاف وهي النقطة c التي مسقطها في (شكل هـ) هما $a' = b'$ حيث يتقابل للسقطان الاقصى والرأسي للمستقيم — هذه النقطة ثابتة ولا تتأثر هي الأخرى بحذف خط



الارض ويطلق على النقطة c اسم أثر المستقيم ab مع مستوي الالتفاف ويلاحظ أن آثار المستقيمت والمستويات مع مستوي الالتفاف هي الآثار الوحيدة التي يجوز أن

يكون لها وجود بعد حذف خط الارض . اذ لا معنى للكلام على الآثار الاقصى لمستقيم مثلاً أى نقطة تقابله مع المستوي الاقصى في حين أن هذا المستوي ليس له وجود وكل ما يعرف عنه أنه يوازي وضعاً خاصاً .

يؤخذ مما تقدم أن المبرهنات في أوضاع التقطع والمستقيمت والمستويات تحدد تماماً بمعرفة المسقطين مع حذف خط الارض .

أما أوضاع التقطع والمستقيمت والمستويات بالنسبة الى مستويات الاسقاط

فلا يمكن تحديدھا فی هذه الحالة . وما لاشك فیه أن هذا النقص ليس له أدنى تأثير على ما يراد تمثیله من الاشكال الهندسية .

ومن المسلم به أن خطأ الارض الذی تعودنا فی الماضي على استعماله ما هو إلا مستقیم اختیاری أقحم على رسوماتنا عند بدأ الدراسة لغرض واحد هو توضیح طريقة مونج الأصلية للاسقاط وليس له فی الواقع وجود ولذلك تجب المبادرة الى حذفه بعد أن أدی وظيفته .

وسنرى فوق هذا أن هذا الحذف يساعد على تسهیل حل المسائل لأنه یحررنا من التقيد بمستويات ثابتة للاسقاط .

الفصل الثانى

تمثيل النقطة والخط المستقيم والمستوى وتقسيم المسائل المتعلقة بها الى مسائل وضع ومسائل قياس

بدر ٣ : النقطة

يتحدد وضع النقطة فى الفراغ كما قدمنا بمعلومية مسقطها مثل النقطة ١ فى (شكل ٦) حيث يحدد خط التناظر ' ١ ' ١ " اتجاه خط الارض وبالتالى اتجاه

مستوى الاسقاط . ويجوز أن يكون المسقط الرأسى لنقطة ما فوق أو تحت المسقط الاقصى على أننا لانستطيع أن نفرق الآن بين نقط الزاوية الزوجية الاولى أو الثانية الخ لانه لا وجود لمستويات أسقاط ثابتة .

وإذا انطبق مسقطا أى نقطة على بعضهما مثل النقطة ب فى (شكل ٦) فهذا معناه أن النقطة واقعة فى مستوى الالتفاف .



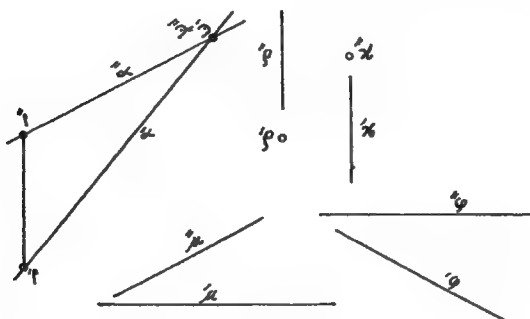
(شكل ٦)

بدر ٤ : الخط المستقيم

يتحدد وضع المستقيم كذلك بمعلومية مسقطيه الممتدين الى ما لا نهاية (لأن المقصود دائماً بالخط المستقيم أنه غير محدود الطول أما المستقيم المحدد بنقطتين من نقطه فيعبر عنه بأنه « جزء » من مستقيم) .

ويسمى المستوى المعين بالمستقيم ومسقطه الاقصى بالمستوى المسقط (بضم الميم وكسر القاف) أحياناً للمستقيم . ومثل ذلك يقال عن المستوى المسقط رأسياً للمستقيم أو المستوى المسقط للمستقيم على المستوى الرأسى .

ولا بد بجانب المسقطين من معرفة اتجاه خطوط التناظر. ويتعين هذا الاتجاه اذا حددنا مسقطي نقطة واحدة مثل ١ من نقط المستقيم α في (شكل ٧). فاذا أهملنا تعيين هذا الاتجاه كما هو الحال في المستقيم μ مثلاً فعنى ذلك أننا نفرض أن هذا الاتجاه رأسى وقد جرت العادة على الأخذ بهذا الفرض إلا اذا غيرنا وضع مستويات الإسقاط (بند ١٩).



(شكل ٧)

والمستقيمت ρ κ μ ϕ الميئة في (شكل ٧) ذوات أوضاع خاصة بالنسبة لمستوي الإسقاط. فالمستقيم ρ رأسى أى عمودى على اتجاه المستوى الاقصى والمستقيم κ عمودى على المستوى الرأسى والمستقيم μ مواز للمستوى الرأسى ويسمى مستقيماً أمامياً والمستقيم ϕ مواز للمستوى الاقصى ويسمى لذلك مستقيماً أفقياً (١).

(١) يلاحظ هنا أننا قصد بقولنا «عمودى على المستوى الرأسى» أو «مواز للمستوى الاقصى» الخ هو أن قول «عمودى على اتجاه المستوى الرأسى» و «مواز لاتجاه المستوى الاقصى» الخ وسيجد القارىء هنا الاصطلاح كثيراً في المستقبل مستعملاً في المعنى المتقدم.

نر ٥ : المستوى

يتحدد وضع المستوى في الفراغ بمعلومية مسقطى ثلاث نقط من نقطه أو نقطة وخط مستقيم أو مستقيمين متقاطعين أو متوازيين وهذه الحالات الأربع مبينة (في شكل ٨) .

ولابد من التنبيه هنا مرة أخرى أنه لا يمكن تمثيل المستوى في هذه الطريقة للاسقاط بأثره مع مستوى الاسقاط لأن مستويات الاسقاط ليس لها هنا وجود فعلي والأثر الوحيد الممكن رسمه هنا هو أثر المستوى مع مستوى الالتلاف وهو الخط الواصل بين نقطتي تقابل أى مستقيمين من مستقيماته مع مستوى الالتلاف (بند ٢) وفي (شكل ٨) يمثل المستقيم $h'' = h'$ الذى يصل النقطتين $1' = 1''$ و $2' = 2''$ (حيث $1' \in \beta$ و $2' \in \alpha$ نقطتا تقاطع المستقيمين α و β مع مستوى الالتلاف على التوالي) أثر المستوى Γ مع مستوى الالتلاف .

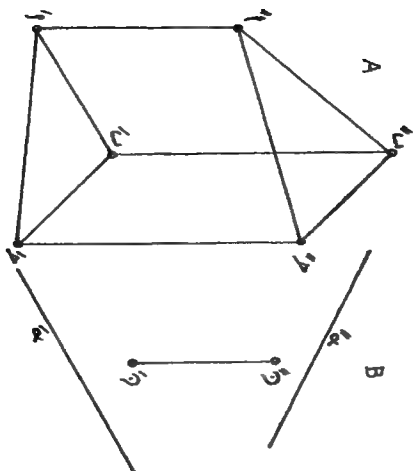
وهناك بعض أوضاع خاصة للمستوى مبينة في (شكل ٩) فالمستوى K عمودى على المستوى الرأسى والمستوى P عمودى على المستوى الاقصى والمستوى Φ مواز للمستوى الاقصى والمستوى γ عمودى على كل من المستويين الاقصى والرأسى أى عمودى على اتجاه خط الارض .

نر ٦ : المسائل المتعلقة بالنقطة والخط المستقيم والمستوى

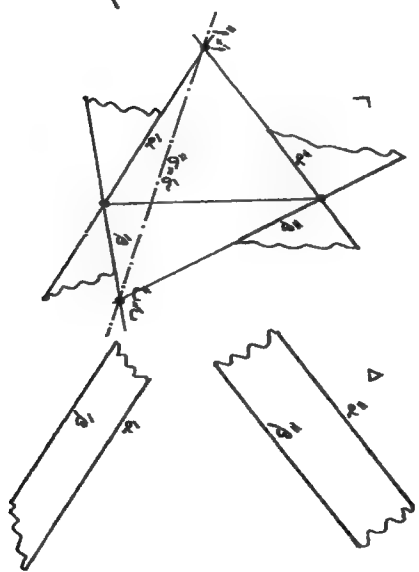
يمكن تقسيم المسائل التى تتناول النقطة والخط المستقيم والمستوى فى اية طريقة من طرق الاسقاط فى الهندسة الوصفية الى قسمين رئيسيين :-

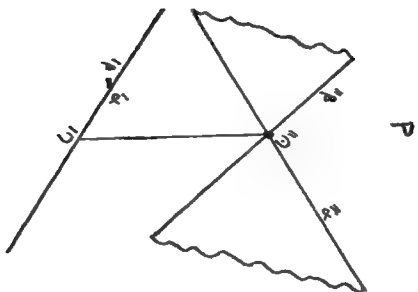
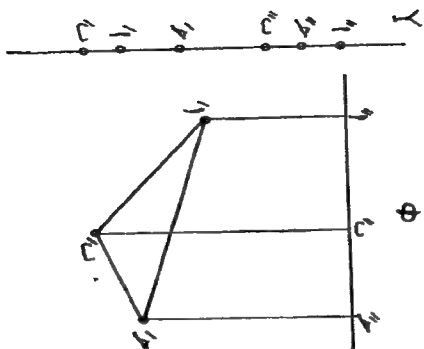
مسائل على الوضع أو مسائل وضعية ؟ مسائل قياس أو قياسية
فالأول منهما يبحث فى العلاقة بين النقطة والخط المستقيم والمستوى ووضع كل منها بالنسبة للآخر ويشمل :

المسألة الأولى : (١) متى تقع النقطة أو الخط المستقيم فى المستوى أو بتعبير

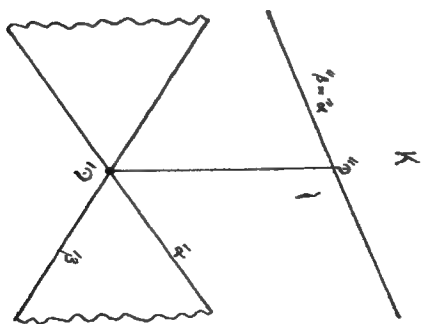


(۸ جک)





(شکل ۱)



أوضح اذا علم أحد مسقطى نقطة أو خط مستقيم واقع في مستو معلوم فالمطلوب إيجاد المسقط الآخر

(ب) تعيين المستقيمت المهمة ذوات الاوضاع الخاصة بالنسبة لمستوي الاسقاط وهى المستقيمت الاقنية والاملية والمستقيمت ذوات الميل الاعظم .
المسألة الثانية : اذا علم مستو ونقطة خارجة عنه فالمطلوب تعيين المستوى المار بهذه النقطة موازياً للمستوى المعلوم .

المسألة الثالثة : إيجاد خط متقاطع مستويين معلومين .

المسألة الرابعة : إيجاد نقطة تقاطع مستقيم معلوم مع مستو معلوم .
أما القسم الثانى أى مسائل القياس فيبحث فى كيفية تعيين الابعاد الحقيقية وقياس الزوايا وتحديد الاشكال الحقيقية . الخ . ويشمل :-

المسألة الاولى : (١) اذا علم مستو ونقطة فالمطلوب تعيين العمود على المستوى من هذه النقطة .

(ب) اذا علم مستقيم ونقطة فالمطلوب إيجاد المستوى المار بالنقطة عمودياً على المستقيم .

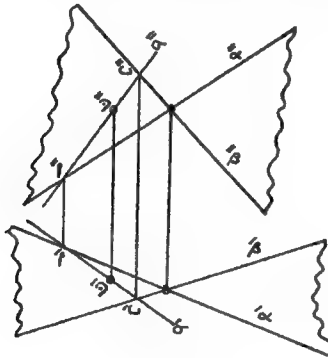
المسألة الثانية : وهى عملية تطبيق مستو ليصبح موازياً لأحد مستويات الاسقاط .
وللاحظ القارئ أننا سنزاعى هذا التقسيم للمسائل فى المستقبل عند الكلام على الاسقاط الرقى والمركزى .

الفصل الثالث

مسائل الوضع

بند ٧ : المسألة الأولى

(١) اذا علم أحد مسطبي مستقيم σ (وليكن المسقط الرأسى σ'') واقع بمقامه في مستوي A معلوم بالمستقيمين المتقاطعين α و β فال المطلوب إيجاد مسطبه الآخر (شكل ١٠).



(شكل ١٠)

لما كان المستوى A غير محدود ويمتدأ الى ما لا نهاية فالمسقط الرأسى المعلوم σ'' للمستقيم يجوز أن يأخذ أى وضع ومن حيث أن المستقيم σ واقع في المستوى A فهو يقطع كل مستقيم آخر موجود معه في هذا المستوى أو

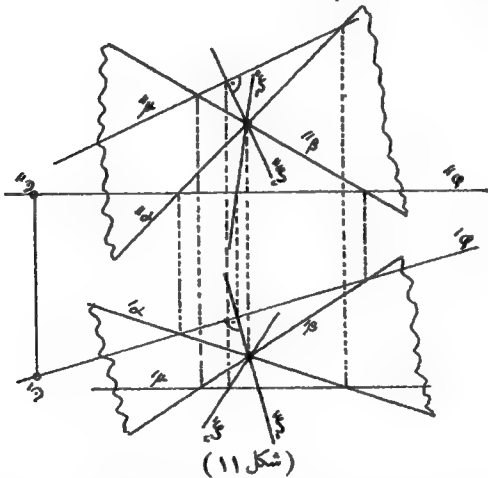
يوازيه . فاذا قطع المسقط الرأسى σ'' للمستقيم المسقطين الرأسين α'' و β'' للمستقيمين المعينين للمستوى A في النقطتين α' و β' على التوالي فان المسقطين الاقبيين α' و β' للنقطتين α'' و β'' يوجدان على α' و β' وحيث أن يكون المسقط الاقبي المطلوب σ' هو المستقيم الواصل بين α' و β' .

واذا كان المعلوم هو أحد مسطبي نقطة مثل σ موجودة في مستوي معلوم مثل A فان من السهل إيجاد مسقطها الآخر بأن نمر بها مستقيماً واقعاً في

المستوى A ونعين مسقطه المجهول كما تقدم فيكون المسقط المطلوب تعيينه للنقطة ρ موجوداً على هذا المسقط الاخير كما هو ظاهر في (شكل ١٠). على أنه يحسن أن يختار المستقيم المار بالنقطة إما أفقياً أو أمامياً كما سيأتى بيانه :

(ب) المستقيمت المرمزة في المستوى زوايا الارضاع الخاصة (شكل ١١)

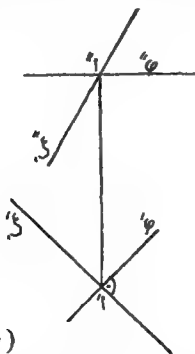
المستقيمت المهمة في مستو معلوم A إما مستقيمت افقية مثل φ أو أمامية مثل μ أو مستقيمت زوايا ميل اعظم مثل $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$



فالمستقيمت الأفقية والأمامية هي مستقيمت واقعة في المستوى A بحيث توازي الأولى المستوى الاقصى وتوازي الثانية المستوى الرأسى . وعلى ذلك فالمسقط الرأسى φ "لمستقيم أفقى والمسقط الاقصى μ "لمستقيم أمامى يوازي كل منهما اتجاه خط الارض وبذا يتحدد وضع أى واحد منهما لأن المسقط الآخر يمكن الحصول عليه كما بينا في الجزء (١) من هذه المسألة .

أما المستقيمت ذوات الميل الأعظم فهي إما ذوات ميل أعظم γ بالنسبة للمستوى الاقصى . والمسقط الاقصى γ' لاي واحد من هذه المستقيمت يكون عمودياً على المسقط الاقصى φ' لاي مستقيم اقصى في المستوى A (قارن شكل ١١) وذلك لأن γ, φ متعامدان في الفراغ . وسميت هذه المستقيمت كذلك لأن ميلها على المستوى الاقصى كما هو معلوم أكبر من ميل أي مستقيم آخر في المستوى ويساوى ميل المستوى A نفسه على المستوى الاقصى .

وإمامستقيمت ذوات ميل أعظم γ بالنسبة للمستوى الرأسى . والمسقط الرأسى γ' لاي واحد من هذه المستقيمت يكون عمودياً على المسقط الرأسى μ' لاي مستقيم أمامى في المستوى A وميل هذه المستقيمت على المستوى الرأسى يساوى ميل المستوى A نفسه على المستوى الرأسى .



(شكل ١٢)

ولحل المسألة المشار اليها في آخر الجزء (١) وهي تعيين المسقط الاقصى γ' مثلاً لنقطة واقعة في مستو معين ومعلوم مسقطها الرأسى μ' فانه يحسن أن نمر بالنقطة المستقيم الاقصى φ الواقع في المستوى والذي يمكن رسم مسقطه الرأسى μ' بغير عناء لانه المستقيم المار بالمسقط المعلوم

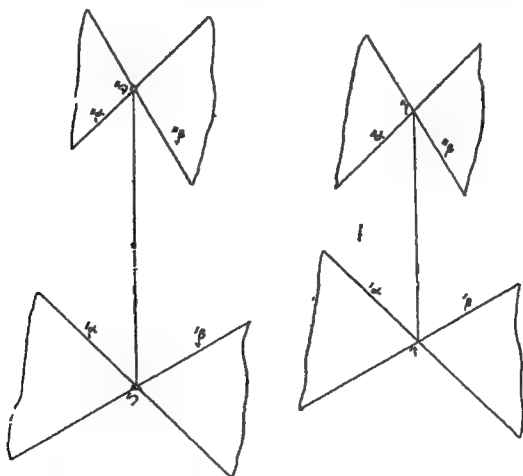
γ' موازياً لخط الارض ثم نجد المسقط الاقصى γ' لهذا المستقيم فتكون γ' واقعة عليه وهذا الحل مبين أيضاً في (شكل ١١) .

ملحوظة هامة : يتعين المستوى تمام التعيين معلومية أهم مستقيمت ذوات الميل الأعظم لانه اذا فرضنا في (شكل ١٢) أن هذا المستقيم γ ذو ميل أعظم بالنسبة

للمستوى الاقصى II، ورسمنا في المسقط الرأسى مستقيماً φ "موازياً لخط الارض وقاطعاً ϵ " في "ا" واعتبرنا φ "المسقط الرأسى لمستقيم أقصى φ واقع في المستوى فإنه يمكن إيجاد مسقطه الاقصى φ' إذ هو العمود المقام من 'ا' على ϵ' . فالمستقيمان φ و φ' يحددان المستوى .

نبر ٨ : المسألة الثانية

إذا علم مستو A ونقطه خارجة عنه مثل β فالمطلوب تعيين المستوى A، المار بالنقطة β موازياً للمستوى المعلوم A (شكل ١٣)



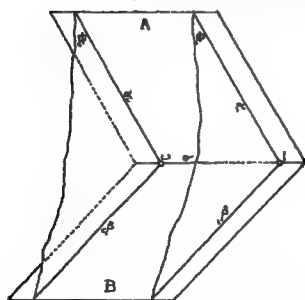
(شكل ١٣)

لحل هذه المسألة نرسم من النقطة المعلومه مستقيمين يوازيان أى مستقيمين متقاطعين، وموجودين بتامهما في المستوى المعلوم . فإذا كان المستوى A معلوماً

بالمستقيمين المتقاطعين $\beta \in \alpha$ فالتايمد من β المستقيمين $\alpha, \beta \in \alpha$ الموازين الى $\beta \in \alpha$ على التوالي ومعنى ذلك أن نرسم من β "المسقطين الرأسين $\alpha, \beta \in \alpha$ " موازين الى α " $\beta \in \alpha$ ومن β "المسقطين الاقيين $\alpha, \beta \in \alpha$ موازين الى α " موازين الى α على التوالي . وبذا يتحدد المستقيمان $\alpha, \beta \in \alpha$ المتقاطعان في β والذان يعينان المستوى المطلوب A .

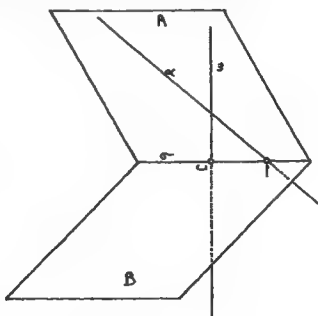
بند ٩ : المسألة الثالثة

المطلوب إيجاد خط تقاطع مستويين معبرين $B \in A$.
هناك طريقتان لحل هذه المسألة وهما مبينان معاً في (شكل ١٤)



(شكل ١٤)

الطريقة الأولى

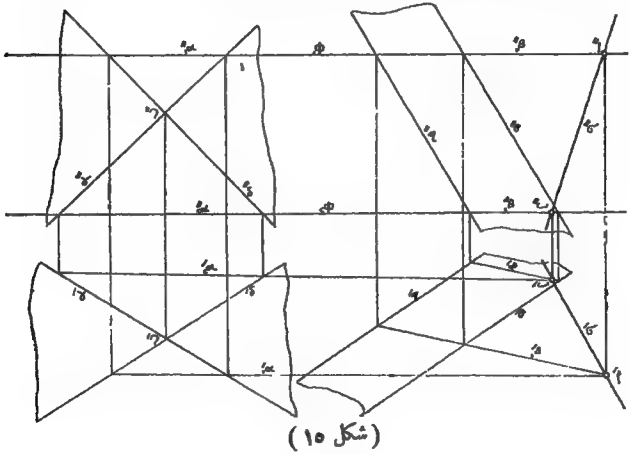


الطريقة الثانية

فالطريقة الأولى تلتخص في استعمال مستويين معبرين $\beta \in \alpha, \gamma \in \alpha$ يختاران في أوضاع خاصة بسيطة . فالمستوى β يقطع كلا من المستويين المعبرين $A \in B$ في مستقيمين $\alpha, \beta \in \alpha$ يتقاطعان في النقطة α من نقط خط التقاطع المطلوب σ وبالمثل يعطينا المستوى γ المستقيمين $\alpha, \gamma \in \alpha$ المتقاطعين في النقطة β فيكون خط التقاطع σ هو المستقيم α .
أما الطريقة الثانية فتلتخص كما يتضح من (شكل ١٤) أيضاً في رسم أي

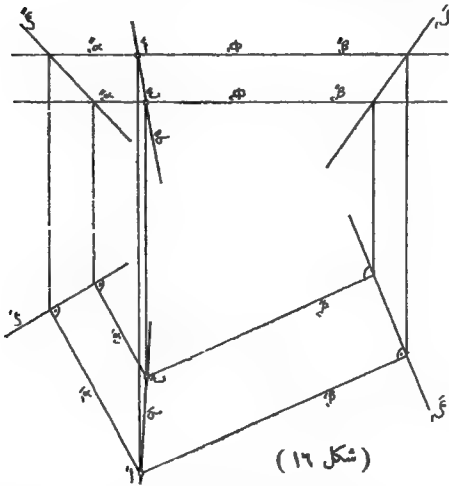
مستقيمين α و β في أحد المستويين وليكن A ثم نعين نقطتي تقاطعهما $\alpha\beta$ مع المستوى الآخر B فيكون خط التقاطع المطلوب σ هو المستقيم AB وستكلم عن هذه الطريقة بعد الفراغ من حل المسألة الرابعة أما الآن فنشرح حل المسألة إسقاطياً بالطريقة الاولى:

ليكن للمستوى A معلوماً (شكل ١٥) بالمستقيمين δ و γ المتقاطعين في σ والمستوى B معلوماً بالمستقيمين المتوازيين η و θ .



فلما كان وضع المستويين المساعد θ و η اختيارياً فالأسهل هنا أن نختارهما في أوضاع موازية لأحد مستوي الإسقاط وليكن المستوى الافقي فالمسقطان الرأسيان لخطي تقاطع المستوي المساعد الاول θ مع المستويين المعلومين A و B ينطبقان في هذه الحالة على نفس المستقيم الافقي الذي يمثل المستوى المساعد θ أما المسقطان الاقيان α' و β' لخطي التقاطع α و β

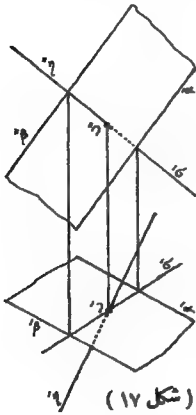
فإننا نجد ههنا بالطريقة التي سبق بيانها في (بند ٧). فإذا تقاطع هذان المسقطان في α' كانت هي المسقط الاقصى للنقطة α في (شكل ١٤). أما مسقطها الرأسى α'' فوجوده على كل من خط التناظر المرسوم من α' والمستقيم الاقصى الممثل للمستوى المساعد σ فيكون إذن نقطة تقاطعهما. وبالمثل نجد المسقطين β' و β'' للنقطة الثانية β وبذا يتحدد مسقطا خط التقاطع المطلوب: $\sigma' = \alpha' \beta' = \beta' \sigma'' = \alpha'' \beta'' = \sigma''$.



وإذا كان كل من المستويين σ و σ' معلوماً بمستقيم ذي ميل أعظم: σ و σ' بالنسبة للمستوى الاقصى مثلاً فإن العمل يكون أبسط إذ أن المسقطين الاقعيين α' و β' للمستقيمين σ و σ' يكونان كما هو مبين في (شكل ١٦) عموديين على المسقطين الاقعيين σ' و σ'' لكل من σ و σ' على التوالي. وبالمثل يمكن إيجاد α'' و β'' ثم نعين المسقطين σ' و σ'' لخط التقاطع كما تقدم.

بند ١٠ : المسألة الرابعة

اذا علم مستقيم η ومستوى A فالمطلوب إيجاد نقطة تقاطعهما σ .
 لحل هذه المسألة فراغياً نمر بالمستقيم المعلوم η مستوياً مساعداً وبحسن
 للسهولة أن يكون أحد المستويين المسقطين للمستقيم (بند ٤) . ثم نجد
 خط التقاطع σ بين المستوى المساعد والمستوى الاصلى A فتكون σ هي نقطة
 تقاطع المستقيمين η و σ .



و (شكل ١٧) يمثل المستوى المعلوم A
 بالمستقيمين المتوازيين α و β فإذا كان
 η و η' هما مسقطا المستقيم η المطلوب إيجاد
 نقطة تقاطعه σ مع المستوى A وأمرنا بهذا
 المستقيم المستوى المسقط له على المستوى الرأسى
 فإنه يقطع المستوى A في مستقيم σ
 ينطبق مسقطه الرأسى σ " على المسقط الرأسى η "
 للمستقيم المعلوم . وحيث إن σ مستقيم واقع في
 المستوى A وقد علم مسقطه الرأسى σ " فن
 السهل إيجاد مسقطه الاقصى σ' كما قدمنا في (بند ٧) .

فإذا قطع σ المسقط الاقصى η' للمستقيم المعلوم في σ' كانت σ' هي المسقط
 الاقصى لنقطة التقاطع σ التى يقع مسقطها الرأسى σ " على المسقط الرأسى η "
 للمستقيم المعلوم . (١١)

(١) لتحين الجزء المشاهد والجزء المخفى (الرموز له بخطوط متقطعة)
 وراء المستوى من المستقيم η انظر بند ٢٧ .

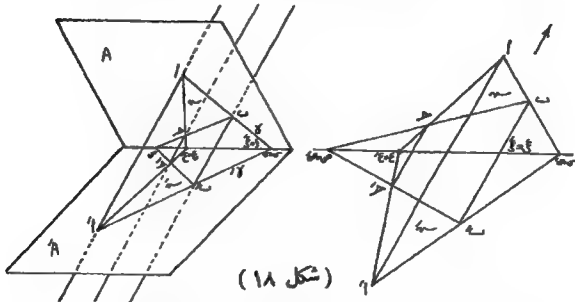
والآن نشرح في إيجاز الطريقة الثانية المبينة في (شكل ١٤) لإيجاد خط تقاطع مستويين .

فلنفرض أنلك في (شكل ٣٣) أن المطلوب إيجاد خط تقاطع مستوي المثلث abc مع مستوي متوازي الاضلاع lm وهو فان المسألة تؤول الى إيجاد نقطتي تقابل أى ضلعين من أضلاع المثلث مثل ab و lm مع مستوي متوازي الاضلاع . فاذا أسمينا نقطتي التقاطع m_1 و m_2 كان خط التقاطع المطلوب هو m_1m_2 .

(٢) لا ينتج من مناظرة الفرد للفرد بين نقط شكلين مستويين أن المستقيم يناظره مستقيم ولذا كان هذا الشرط ضرورياً لتعرف الاختلاف . وإنما يستنتج من مناظرة الفرد للفرد أنه إذا كانت العلاقة خطية أيضاً كان كل مستقيم في أحد الشكلين يناظره مستقيم واحد فقط في الشكل الآخر .

مؤلفاه اسقاطياً (بند ٥٦) وقد يكون هذا الالتلاف مركزياً (بند ٦٣) أو متوازياً . ويعتبر الالتلاف المتوازي حالة خاصة من الالتلاف المركزي (بند ٦٩) . ويجب أن يتوافر الشرطان الآتيان في شكلين مؤلفين ليكون بينهما ائتلاف متواز :-

أولاً : أنه المستقيمت التي تصل أزواج النقط المتناظرة تولد جميعاً اتجاهاتاً ثابتاً
ثانياً : أنه المستقيمت المتناظرة تقابل جميعاً على مستقيم ثابت .



(شكل ١٨)

وهناك حالتان يجب التمييز بينهما : الحالة التي يكون فيها الشكلان Σ سمه' في مستويين مختلفين وهي حالة الاسقاط المتوازي . والحالة التي يكون فيها الشكلان Σ سمه' في مستو واحد ويطلق عليها اسم الحاز المنزعة للالتلاف المتوازي (شكل ١٨) .

وفي الحالة الاولى يدرك القارىء بسهولة أن كلا من الشرطين السابقين مترتب على الآخر .

وإذا أسقطنا الشكلين Σ سمه' في الحالة الاولى إسقاطاً متوازياً في اتجاه واحد على مستو ثالث مثل B فن الواضح أن مسقطيهما يكون بينهما ائتلاف متوازي من النوع المبين في الحالة الثانية .

وكذلك اذا أمكن الحصول على شكلين $سمسمه$ كسقطين في اتجاه واحد وعلى مستو واحد لشكلين مستويين من النوع المبين في الحالة الاولى فانه في هذه الحالة أيضاً يكون الشرطان السابقان معبرين عن شرط واحد . ولما كان هذا ليس ظاهراً بالبداية في الحالة الثانية دائماً وهي الحالة المستوية — وإن كنا سنبرهن على صحته ضمناً في بند ٦٢ حيث يمكن اعتبار النقطة الثابتة «م» نقطة في اللانهاية — كان من الضروري في الوقت الحاضر اشتراط كل من الشرطين السابقين على حده .

ويسمى المستقيم الثابت بمحور الاوتنوف وهو المحل الهندسي لكل نقطة تنطبق على المناظرة لها أو بتعبير آخر كل نقطة تناظر نفسها — كما يسمى اتجاه المستقيمت التي تصل أزواج النقط المتناظرة باتجاه الاوتنوف . ويسمى الالتلاف المستوى عمودياً أو مائلاً حسبما تكون الزاوية التي يصنعها اتجاه الالتلاف مع المحور مساوية أو غير مساوية لزاوية قائمة .

وبتعيين الاوتنوف في كلتا الحالتين المذكورتين آنفاً اذا علم المحور $سمسمه$ وزوج واحد من النقط المتناظرة مثل $ا' ا$ ^(١) لأنه اذا أريد بعد هذا إيجاد النقطة $ح'$ مثلاً في الشكل $سمه$ المناظرة لنقطة ما مثل $ح$ في الشكل $سمه$ فصل $ا ح$ ونمده الى أن يقطع المحور $سمسمه$ في $ع$ ثم فصل $ا' ع$ فيكون هو المستقيم الذي يناظر $ا ع$. والنقطة المطلوبة $ح'$ تقع على $ا' ع$ بحيث يكون $ح' ح$ موازياً الى $ا' ا$ وبذا تبين $ح'$ (شكل ١٨) . واذا كانت $ب$ إحدى نقط مستقيم مثل $ص$ في الشكل $سمه$ وكانت $ب'$ النقطة المناظرة (وقد أمكن تعيينها كما تقدم) في الشكل $سمه$ كان المستقيم $ص'$ المناظر الى $ص$ هو المستقيم المار بالنقطة $ب'$ ونقطة تقاطع $ص'$ مع المحور $سمسمه$.

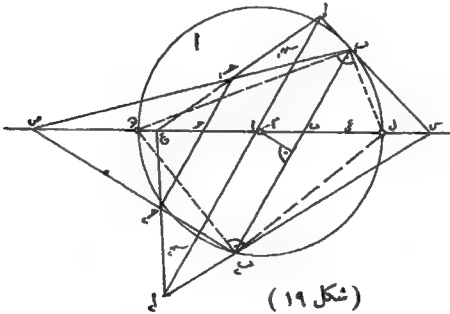
(١) أو ما يعادل هذه المعاليم ويؤدي اليها مثل زوج من النقط المتناظرة وزوج من المستقيمت المتناظرة .

وبذا نستطيع إيجاد المستقيم في أحد الشكلين الذي يناظر مستقيماً معلوماً في الشكل الآخر .

ولذا طبقنا الطريقة السابقة على مستقيمين متوازيين في أحد الشكلين وجدنا أن المستقيمين المناظرين لهما في الشكل الآخر متوازيان أيضاً أى أن خاصية التوازي تبقى محفوظة في الإسقاط المتوازي وهي نتيجة يمكن الحصول عليها مباشرة من تعريف الالتلاف المتوازي .

تمر ١٢ : الخاصية المحفوظة للإسقاط المتوازي

ينشأ عن وجود شكلين مؤلفين من n سمة n موجودين في مستوي واحد بعض النظريات والخواص نشير إليها فيما يلي (شكل ١٩) :-



$$(١) \text{ النسبة } \frac{ا_١}{ا_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{ج_١}{ج_٢} = \dots = \text{مقداراً ثابتاً مثل } ك$$

يسمى نسبة الإسقاط المتوازي وهذه النسبة تكون سالبة أو موجبة على حسب ما إذا كان أى زوج من النقط المتناظرة مثل $ا_١$ و $ا_٢$ في جهتين مختلفتين أو في جهة واحدة على التوالي بالنسبة الى محور الالتلاف .

(٢) النسبة بين مساحتي أى شكلين مؤلفين مثل سهم سمه تساوى نسبة الالتلاف لـ ^(١).

(٣) ولو أن الزوايا المتناظرة لا تكون على وجه العموم متساوية إلا أننا اذا رسمنا الدائرة التى مركزها م على محور الالتلاف والتي تمر بأى نقطتين متناظرتين مثل ب سمه ب سمه (٢) هى نقطة تقاطع المحور مع العمود المقام على ب ب سمه من منتصفه) فقطعت المحور فى ل سمه فمن الواضح أن الزاوية القائمة ل ب سمه فى مجموعة الشكل سهم تناظرها الزاوية ل ب سمه فى مجموعة الشكل سهم وهى قائمة أيضاً. وإذا أريد تعيين مثل هاتين الزاويتين القائمة المتناظرتين بحيث يكون رأسهما نقطتين جديدتين متناظرتين مثل ١ سمه ٢ سمه فانه بناء على خاصية التوازي المذكورة فى البند السابق يجب أن يكون ضلعا الزاوية القائمة التى رأسها ١ موازيين الى ب ل سمه ب سمه وأن يكون ضلعا الزاوية القائمة المناظرة لها والتي رأسها ٢ موازيين الى ب ل سمه ب سمه ومعنى هذا انه يوجد فى كل اشرف متوازي زوج واحد على وجه العموم ^(٢) من الزوايا القائمة المتناظرة رأسه نقطتان متناظرتان وتبقى اتجاهات أضلاع هذه الزوايا ثابتة لجميع النقط المتناظرة الاخرى فى الالتلاف.

(٤) اذا انقط شكل مستو اسقاطاً متوازيًا فى اتجاهين مختلفين على مستو واحد مثل II لانه المسقطان شكلين مؤلفين اشرفاً متوازيًا ^(٣). وذلك لأن المستقيمت

(١) تترك للقارئ البرهنة على صحة هذه النظرية.

(٢) اذا كانت نسبة الالتلاف لـ = ١ واتجاه الالتلاف عمودياً على محوره أى اذا كان سهم سمه ممثالين عمودياً بالنسبة للمحور فمن الواضح أن كل زاوية قائمة فى هذه الحالة وحدها رأسها احدى نقط الشكل سهم تناظرها زاوية قائمة أيضاً رأسها النقطة المناظرة فى الشكل سهم.

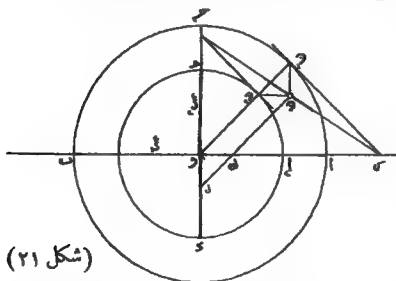
(٣) الصورة العامة لهذه النظرية هى :

اذا ائتلف شكل مستو مع شكلين آخرين وجب أن يكون هذان الشكلان فيما بينهما مؤلفين.

ثانياً : يقال لأي قطرين في القطع الناقص مثل $ح م ط هـ$ $ك ل$ $ل م$ يناظران قطرين متعامدين $ح ط$ $ك ل$ في الدائرة لأنهما قطرهما مترافقه وينتج من خاصية التوازي المذكورة في (بند ١١) أن عملي القطع الناقص في نهايتي أي قطر يوازيان القطر المرافق وأن الاوتار الموازية لأحد القطرين في القطع الناقص تنصفها القطر المرافق له .

ثالثاً : أن القطع الناقص متماثل عمودياً بالنسبة لكل من قطرين متعامدين
 أي $PM \perp CH$ $PM \perp CH$ يطلق عليهما اسم المحاور الأكبر والأصغر وهما القطران
 المتراقبان الوحيدان اللذان يحصران بينهما زاوية قائمة .
 وبمكتنا الآن أن نقرر النظرية الآتية : —

إذا رسمت دائرة قطرها أحد اقطار قطع ناقص لاه التخميايه مؤلفين التتوفاً متوازيًا حيث محور الاستتوف هو القطر المشترك ويكونه قطر الدائرة العمودي على القطر المشترك منائرًا قطر القطع الناقص المرافق للقطر المشترك . وذلك لا يمكن اعتبار القطع مسقطًا متوازيًا لكل دائرة مرسومة على أحد أقطاره .



(ب) كيفية رسم
القطع الناقص بواسطة
الاستوف إذا علم محوره
القطع الناقص
بمقتضى النظرية السابقة
مؤلف اتلافا عموديا
مع كل من الدائرتين

اللتين قطراهما المحور الاكبر والمحور الاصغر حيث محاور الالتفاف في الحالة الأولى هو المحور الاكبر e_1 والنقطتان e_2 والنقطتان متناظرتان في الحالة الثانية

يكون محور الائتلاف هو المحور الاصغر \mathcal{E} وتكون النقطتان \mathcal{A} و \mathcal{B} نقطتين متناظرتين (شكل ٢١) .

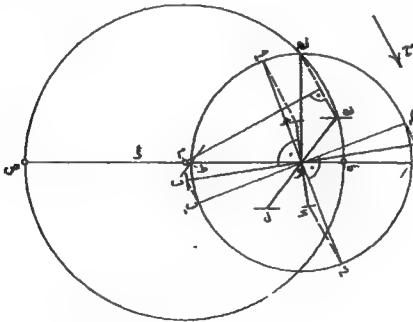
فإذا رسم مستقيم مار بالمركز المشترك \mathcal{O} ، قطع الدائرة الكبرى في \mathcal{H} والصغرى في \mathcal{H}' فانه يمكن بسهولة إثبات أن كلا من هاتين النقطتين تناظر نقطة واحدة \mathcal{H} من نقط القطع الناقص ^(١) . فالنقطة \mathcal{H} موجودة إذن على كل من المستقيمين المرسوم أحدهما من \mathcal{H} عمودياً على \mathcal{E} ، (باعتبار الائتلاف مع الدائرة الكبرى) وثانيهما من \mathcal{H}' عمودياً على \mathcal{E} ، (باعتبار الائتلاف مع الدائرة الصغرى) ففي نقطة تقاطعهما . ونماس القطع الناقص في \mathcal{H} هو المستقيم المناظر لنماس الدائرة الكبرى في \mathcal{H} ، (والمناظر أيضاً لنماس الدائرة الصغرى في \mathcal{H}') وهذان النماسان يتقابلان كما هو مبين بالشكل في النقطة \mathcal{S} على \mathcal{E} . وهكذا يمكن تعيين ورسم أى عدد من نقط القطع للمماسات فيها .

وهناك طريقة أخرى لرسم القطع الناقص يمكن استنتاجها بسهولة من (شكل ٢١) . ذلك أنه إذا رسم من \mathcal{O} مواز الى المستقيم $\mathcal{O}\mathcal{H}$ قطع المحور الاكبر في \mathcal{L} والاصغر في \mathcal{L}' فان $\mathcal{O}\mathcal{L} = \mathcal{O}\mathcal{L}'$ و $\mathcal{O}\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{H}'$ نصف المحور الاكبر $\mathcal{O}\mathcal{H}$ و $\mathcal{O}\mathcal{H}' =$ نصف المحور الاصغر . فاذا أخذت على حافة شريط من الورق نقطة اختيارية مثل \mathcal{P} وقيس منها على الحافة البعدان $\mathcal{O}\mathcal{L}$ و $\mathcal{O}\mathcal{H}$ في اتجاه واحد بحيث يساوى $\mathcal{O}\mathcal{L}$ نصف المحور الاكبر ويساوى $\mathcal{O}\mathcal{H}$ نصف المحور الاصغر ثم أخذنا في تحريك الشريط بحيث تقع \mathcal{L} دائماً على المحور الاصغر وتقع \mathcal{H} على المحور الاكبر فالنقطة \mathcal{P} ترسم القطع الناقص المطلوب .

(١) نلفت نظر القارئ الى أن نسبة الائتلاف بين القطع الناقص والدائرة الكبرى تساوى النسبة بين المحورين الاصغر والاكبر وبينه وبين الدائرة الصغرى تساوى النسبة بين المحورين الاكبر والاصغر .

وبالعكس يمكن بسهولة تعيين طول أحد محوري قطع ناقص اذا علم منه المحور الآخر ونقطة عليه .

(ح) كيفية رسم القطع الناقص اذا علم منه قطراه مترافقان
اذا كان القطران المترافقان المعلومان هما $ح ط$ و $ك ل$ (شكل ٢٢) ورسمنا دائرة على أحدهما وليكن $ح ط$ ثم رسمنا في هذه الدائرة نصف القطر و $ك$ عمودياً على $ح ط$ كانت هذه الدائرة (راجع الفقرة ١) مؤلفة مع القطع الناقص ابتلافاً متوازيًا وكان و $ك$ و $ل$ و $ك$ نصفى قطرين متناظرين في الابتلاف . ويمكن استخدام هذا الابتلاف المتعين بالمحور $ح ط$ وهو القطر المشترك $ح ط$ وبزوج من



(شكل ٢٢)

النقط المتناظرة هما $ك$ و $ل$ في رسم أى عدد من نقط القطع الناقص وعماساته وأى عدد من أزواج الاقطار المترافقة المناظرة لأزواج الاقطار المتعامدة في الدائرة . أما محورا القطع فهما كما قدمنا القطران المترافقان المتعامدان فمن حيث إنهما يناظران قطرين متعامدين أيضاً في الدائرة فيكون تعيينهما إذن بناء على النظرية الثالثة في (بند ١٢) وذلك بتعيين الزاويتين القائميتين المتناظرتين اللتين

رأسهما نقطتان متناظرتان مثل $ك١ ك٢$. فإذا كانت $س١ س٢$ هما نقطتا تقاطع محور الالتلاف $ع$ مع الدائرة المارة بالنقطتين $ك١ ك٢$ والتي مركزها $م$ على محور الالتلاف فإن محوري القطع الناقص يوازيان $ك١ س١$ و $ك٢ س٢$ من مرسومين من $د$. أما المستقيمان المرسومان من $د$ ، موازيين لى $ك١ س١$ و $ك٢ س٢$ من فهما قطرا الدائرة (المتعامدان) المناظران الى المحورين . فإذا قطع الموازيان الاخيران الدائرة فى $ح١ ك١$ و $ح٢ ك٢$ كانت النقط المناظرة لها $ح١ ك١$ و $ح٢ ك٢$ هي رؤوس القطع الناقص .

(٤) حل بعض مسائل القطع الناقص بواسطة الاشتوف

كثير من المسائل المتعلقة بالقطع الناقص يمكن حلها بسهولة بواسطة الالتلاف اذا علم القطع بمحوريه أو بزوج من الاقطار المترافقة وذلك باختبار دائرة مؤلفة معه ثم تعيين الالتلاف بالمحور وزوج من النقط المترافقة . مثال ذلك لنفرض أنه يراد رسم مماسين من نقطة مثل $د$ لقطع ناقص معلوم بقطرين مترافقين مثل $ع ط$ و $ك ل$ (قارن شكل ٢٢) فالتا تتبع الخطوات الآتية :-

الخطوة الاولى — نختار دائرة مؤلفة مع القطع كالدائرة المرسومة على $ع ط$ فيكون $ع ط$ محور الالتلاف .

الخطوة الثانية — نرسم و $ك$ العمودى على $ع ط$ فتكون النقطتان $ك١ ك٢$ نقطتين متناظرتين فى القطع والدائرة على التوالى .

الخطوة الثالثة — نعين النقطة $د$ فى مجموعة الدائرة المناظرة للنقطة المعلومه $د$ فى مجموعة القطع الناقص (بند ١١) .

الخطوة الرابعة — نرسم من $د$ مماسين للدائرة .

الخطوة الخامسة — نعين المستقيمين المناظرين للمماسين السالفي الذكر فيكون هذان المناظران هما المماسان المطلوبان (ويجب أن يتقاطعا فى $د$) .

وبمثل هذه الطريقة يمكن مثلاً تعيين نقطتي تقاطع مستقيم مع قطع ناقص معلوم بمحوريه أو بقطرين مترافقين .

بند ١٤ : العمودان المتوازيان بين المسطتين الافقي والرأسي لشكل مستو

نظرية : —

المسطان الافقي والرأسي $\alpha\alpha'$ شكل مثل $\alpha\alpha'$ واقع في مستو A هما $\alpha\alpha'$ متوازيان متوازيان في مستوي الورقة حيث محور الاستدوار هو المستقيم الذي يمثل خط تقاطع المستوي A مع مستوي الاستدوار وحيث اتجاه الاستدوار هو اتجاه خطوط التناظر .

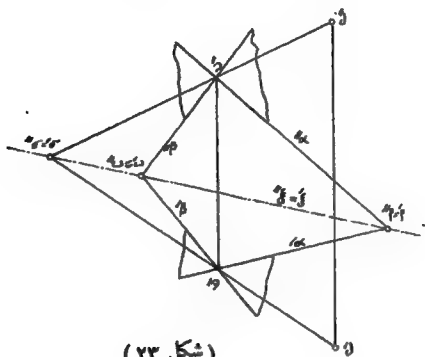
وذلك لأن العلاقة الهندسية بين نقط ومستقيمتين المسطتين باعتبارهما شكلين $\alpha\alpha'$ موجودين في مستو واحد (مستوي الورقة) هي مناظرة الفرد للفرد ولأن المستقيمتين — خطوط التناظر — التي تصل أزواج النقط المتناظرة في الشكلين توازي جميعاً الاتجاه العمودي على خط الارض .

فلذا فرضنا (شكل ٢٣) أن المستوي A معلوم بالمستقيمين $\alpha\alpha'$ و $\beta\beta'$ المتقاطعين في النقطة o ومددنا المسطتين $\alpha\alpha'$ و $\beta\beta'$ ليتقابلتا في النقطة $a' = a$ " والمسطتين $\beta\beta'$ و $\alpha\alpha'$ ليتقابلتا في النقطة $b' = b$ " كان المستقيم $\alpha\alpha'$ الذي يصل النقطتين $a' = a$ و $b' = b$ هو المستقيم الذي يمثل خط تقاطع المستوي A مع مستوي الالتلاف (بند ٥) وهو كما قدمنا المحل الهندسي لكل نقطة في المستوي A ينطبق مسقطها الافقي والرأسي أى تناظر نفسها في هذا الالتلاف . فالمستقيم $\alpha\alpha'$ هو إذن محور الالتلاف بين المسطتين وعليه تقابل المستقيمتين المتناظرتين فيهما .

وبلاحظ أن الالتلاف بين مسطتي أى شكل مستو هو على وجه العموم اتلاف متوازي مائل إلا اذا كان المستوي A موازياً لخط الارض ففي هذه الحالة

يصير للمستقيم ξ موازياً الى خط الارض والمستقيم $\xi' = \xi''$ عمودياً على خطوط التناظر ويؤول الالتلاف المائل الى ائتلاف عمودي .

واذا علم المستوى A (شكل ٢٣) وأمكن تعيين الالتلاف بين المسقطين كما



(شكل ٢٣)

تقدم بالمحور $\xi' = \xi''$ ونقطتين متناظرتين مثل $\omega' \omega''$ وعلم المسقط الافقي ل' لاحدى نقط المستوى A كان من السهل تعيين مسقطها الرأسى ل' بتعيين النقطة المناظرة الى ل' في هذا الالتلاف (بند ١١) وذلك بأن نصل ل' ω' ونمده ليقطع المحور $\xi' = \xi''$ في النقطة س' = س'' ثم نصل س' ω'' ونمده ليقطع خط التناظر المرسوم من ل' في المسقط الرأسى المطلوب ل'. ونفس الطريقة يمكن تعيين ل' إذا علمت ل' وكذا تعيين أحد مسقطي مستقيم واقع في المستوى A إذا علم مسقطه الآخر .

وهذا حل جديد للسألة الاولى من مسائل الوضع (بند ٧) .

نر ١٥ : المتشوف المطلق

(١) تعريف

إذا كان سهم سم ، شكليين واقعيين في مستويين مثل $A^{\text{سم}}$ ، على التوالي (شكل ٢٤) ووجدت مناظرة الفرد للفرد بين نقطتهما ومستقيمتيهما بحيث تكون النسبة (البسيطة) بين أى بعدين في أحد الشكليين مساوية للنسبة بين البعدين المناظرين في الشكل الآخر (مثلاً $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$) قيل إن بين الشكليين سهم سم ، متشوفاً مطلقاً . وبمقارنة بند ٥٦ نجد أن الائتلاف المطلق حالة خاصة من الائتلاف العام أو الإسقاطي ^(١) . وأقرب مثال على الائتلاف المطلق هو العلاقة الهندسية بين شكل مستووين مسقطه المتوازي غير المباشر على مستو جديد الذي يمكن الحصول عليه بإسقاط الشكل الأصلي إسقاطاً متوازياً عدة مرات متعاقبة في اتجاهات مختلفة حيث إن النسبة البسيطة لا تتغير بالإسقاط المتوازي مهما تعاقب .

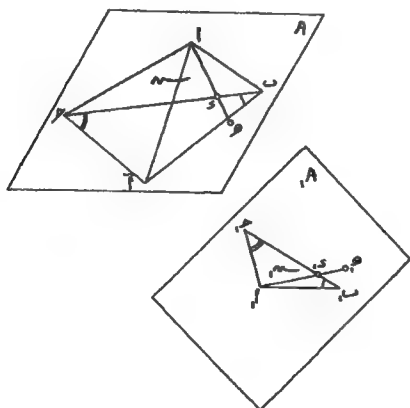
ويؤخذ من هذا أن الائتلاف المتوازي حالة خاصة من الائتلاف المطلق .

(ب) متى يتعين المتشوف المطلق

يتعين الائتلاف المطلق بين الشكليين سهم سم ، (شكل ٢٤) إذا علم في مستوييهما مثلثان متاظران مثل abc و $a'b'c'$ ، لانه إذا أريد بعد هذا

(١) بينما يطلق على صفين (بند ٥٣) متاظرين من النقط في حالة الائتلاف الإسقاطي العام اسم صفين « مؤلفين » أو « إسقاطيين » فانهما يكونان في حالة الائتلاف المطلق « متشابهين » . ففي الحالة الأولى حيث تناظر النقط التي في اللانهاية قطعاً على بعد نهائي تكون النسبة المضاعفة (بند ٥٣) لاي أربع قطع على مستقيم مساوية للنسبة المضاعفة للنقط الأربع المناظرة (بند ٥٦) . ويمكننا أن نقول إن الائتلاف الإسقاطي العام يؤول الى ائتلاف مطلق اذا ناظرت النقط التي في اللانهاية قطعاً في اللانهاية أيضاً .

ايجد النقطة هـ، مثلا في الشكل سـهـ، المناظرة الى هـ في الشكل سـهـ فصل هـ بأحد رؤوس المثلث مثل ا فيقطع ا هـ الضلع ب ح في و ثم نعين في المستوى A، النقطة المناظرة و، التي تقسم ب، ح بنفس النسبة المعلومة التي تقسم بها و المستقيم ب ح ونصل ا، و. فالنقطة المطلوبة هـ، تقع على ا، و بحيث تكون النسبة $\frac{ا هـ}{و هـ} = \frac{ا ب}{ب ح}$ مساوية للنسبة المعلومة $\frac{ا هـ}{و هـ}$ وبذا تعين هـ.



(شكل ٢٤)

وينتج من ذلك أن أى مثلثين مرسومين حيثما اتفق في المستويين A و A، يمكن اعتبارهما محدين لامتلاف ما مطلق بين النقط والمستقيمت في المستويين ولكن اذا تحدد هذان المثلثان فان أى نقطة رابعة مثل هـ في أحد المستويين يكون لها نقطة واحدة مناظرة في المستوى الآخر يمكن تعيينها كما تقدم.

(ح) الزوايا القائمة المتناظرة

ظاهر أن الزوايا المتناظرة في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ المحددين للائتلاف (شكل ٢٤) غير متساوية على وجه العموم (أو ليس من الضروري أن تكون متساوية) ولكن اذا فرض وصادف أن كانت الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية أو اذا اخترنا المثلثين المحددين للائتلاف بحيث كانت الزوايا المتناظرة متساوية فإن الائتلاف يؤول في هذه الحالة الى تشابه بحيث تكون كل زاوية في أحد المستويين تناظرها زاوية مساوية لها في المستوى الآخر (١).

وإذا رسم في المستوى A زاوية قائمة رأسها A فلزاوية المناظرة لها في الائتلاف المتعين بالمثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ التي رأسها النقطة A في المستوى A لا تكون على وجه العموم قائمة . غير أنه يوجد في كل ائتلاف مطلق كاهو الحال في الائتلاف المتوازي (النظرية الثالثة بند ١٢) زوج واحد على وجه العموم من الزوايا القائمة المتناظرة رأساه نقطتان متناظرتان . وللحصول على هذا الزوج في (شكل ٢٤) نرسم في المستوى A مثلثاً $\triangle ABC$ ح مشابهاً للمثلث $\triangle A'B'C'$ ح، ومشترباً مع المثلث $\triangle A'B'C'$ ح في القاعدة BC فتكون العلاقة الهندسية بين نقط ومستقيمتين المستويين A و A' التي يحددها المثلثان المتشابهان $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ ح في هذه الحالة علاقة تشابه . ولكن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ ح الموجودين في المستوى A مؤلفان ائتلافاً متوازيًا حيث BC هو محور الائتلاف حيث A و A' نقطتان متناظرتان فإذا عينا في هذا الائتلاف المتوازي المستوى الزاوية القائمة الوحيدة التي رأسها A والتي تناظرها زاوية قائمة أيضاً رأسها A' (بند ١٢) ووجدنا بواسطة التشابه (أو الائتلاف المطلق) الزاوية المناظرة للاخيرة منهما والواقعة في المستوى A' ورأسها

(١) ويؤول الائتلاف الى تساو أو تطابق اذا كان المثلثان المحددان للائتلاف

متساويين . وبديهي أنه في هذه الحالة أيضاً تكون الزوايا المتناظرة متساوية .

النقطة ١ كانت هذه الزاوية قائمة أيضا وهي مع الزاوية القائمة في المستوى A التي رأسها ١ تكونان زوج الزوايا القائمة المتناظرة في هذا الالتلاف .
 فإذا كانت ١ مركزاً لدائرة واقعة في المستوى A كانت ١ مركزاً لقطع ناقص وفي هذه الحالة يعين ضلعا الزاوية القائمة التي رأسها ١ والتي بينا الآن كيفية إيجادها اتجاهاً محورياً للقطع الناقص .

(٥) الانتقال من المستوى المطلق الى المستوى المتوازي
 بواسطة رسم المثلث $آ ب ح$ المشابه الى المثلث $١ ب ١ ح$ ، تتعين كما قدمنا علاقة تشابه بين نقط ومستقيمتين A و A ، وتكون النسبة بين أى بعدين متناظرين مساوية الى $\frac{ب}{ب}$ فإذا عينا على المستقيم $ب ح$ وهو محور الالتلاف المتوازي بين المثلثين $١ ب ح$ و $آ ب ح$ في المستوى A — النقطة $و$ بحيث أن $\frac{آ}{١} = \frac{و}{ب}$ = النسبة المعلومة $\frac{ب}{ب}$ (ويمكن الحصول على النقطة $و$ برسم الدائرة في A التي قطرها البعد بين النقطتين اللتين تقسمان المستقيم $آ ب$ من الداخل والخارج بهذه النسبة فتكون إحدى قطعتي تقاطع هذه الدائرة مع $ب ح$) وكانت $و$ هي النقطة في A المتناظرة الى $و$ فن الواضح أن $و$ يكون في هذه الحالة مساوياً لـ $و$ ، لان كلاهما يساوي $آ و$ $\times \frac{ب}{ب}$ فلذا حركنا الشكل $سم$ ووضعناه على الشكل $سم$ بحيث ينطبق المستقيمان المتناظران المتساويان $١ و$ ، $١ و$ ، $١ و$ أمكننا بذلك أن نحول الالتلاف المطلق بين الشكلين المذكورين الى ائتلاف متوازي محوره $١ و$ \equiv $١ و$ ^(١)

(١) يلاحظ أنه قد يتعذر إيجاد قطعة مثل $و$ بحيث يكون $١ و = ١ و$ ، وذلك اذا لم تقاطع الدائرة المشار إليها آنفاً مع $ب ح$. ففي هذه الحالة يكون تحويل الالتلاف المطلق الى ائتلاف متوازي غير ممكن .

(هـ) الاستدراك المطلوب بين شكلين موجودين في مستوى واحد
إذا أسقطنا الشكلين سهم^١ سهم^٢ (شكل ٢٤) معاً إسقاطاً متوازياً على مستوى جديد
مثل II حصلنا فيه على شكلين جديدين سهم^١ سهم^٢ بينهما اتلاف مطلق ويكون
مسقطا المثلثين ١ ب ح ١ ب ح هما المثلثان المحددان لهذا الاتلاف المستوي .
وغنى عن البيان أن ما تقدم ذكره عن تحويل الاتلاف المطلق إلى اتلاف متوازي
وكذا تعيين النقط والمستقيمات والزوايا القائمة المتناظرة في حالة وجود الشكلين
في مستويين مختلفين — ينطبق على هذه الحالة أيضاً .

تمارين :

- (١) إذا علم من مثلث ١ ب ح مسقطه الاقصى ا' ب' ح' والمسقط الرأسى ا''
لنقطة ١ فالمطلوب إيجاد المسقط الرأسى ا' ب' ح' للمثلث بحيث يكون الشكل
الحقيقى للمثلث ١ ب ح مشابهاً لمثلث آخر معلوم مثل ١ ب ح
- (٢) المطلوب إيجاد مستوى يقطع منشوراً ثلاثياً في مثلث يكون مشابهاً
لمثلث آخر معلوم (هناك على وجه العموم وضعان لمثل هذا المستوى متماثلان
بالنسبة إلى المقطع العمودى للمنشور) .

الفصل الخامس

مسائل القياس

نبر ١٦ : المسألة الأولى

(١) إذا علم مستو من A ونقطة من ϕ فالمطرب تعيين العمود v المار بالنقطة على المستوى .

حل هذه المسألة متوقف على النظرية المعروفة :-

إذا تعامد مستقيم v ومستو A لانه مسقط المستقيم v على أى مستو آخر من II عمودياً على خط تقاطع المستويين وعلى مسقط أى مستقيم من ϕ فى المستوى A يكونه موازياً للمستوى II .

وذلك لأننا إذا فرضنا أن المستقيم v يقابل المستوى A فى ϕ فانه لما كان هذا المستقيم عمودياً على المستوى فهو عمودى على كل مستقيم واقع فى المستوى A وعمودى بصفة خاصة على المستقيم ϕ المرسوم فى المستوى A من ϕ موازياً الى المستوى II . فالزاوية المحصورة بين v و ϕ قائمة وحيث إن أحد ضلعها ϕ مواز بالعمل للمستوى II فيكون مسقطها على II هو نفسه زاوية قائمة أيضاً .

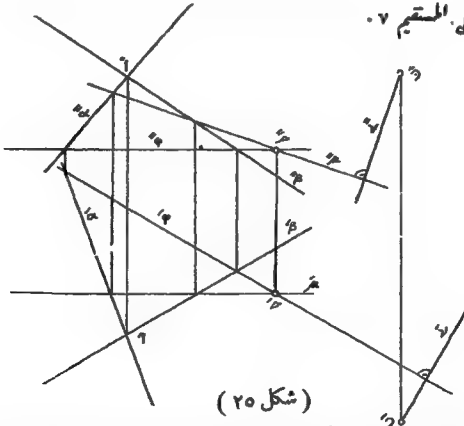
وبناء على النظرية السابقة يكونه المسقط الرأسى v للعمود المطرب عمودياً على المسقط الرأسى μ لى مستقيم أمامى ويكونه كذلك المسقط الاقصى v' عمودياً على المسقط الاقصى ϕ' لى مستقيم أقصى فى المستوى A .

قضى (شكل ٢٥) لتعيين العمود v النازل من النقطة الخارجة ϕ (أو المقام منها إذا كانت ϕ واقعة فى المستوى A) على المستوى A المعلوم بالمستقيمين

α و β المتقاطعين في ١ نعين أولاً (بند ٧ ب) مسقطي أى مستقيم أمامي μ وكذا أى مستقيم أخفى φ في المستوى A . فيكون المسقط الرأسى ν للعمود المطلوب هو المستقيم المرسوم من δ "عمودياً على μ " ويكون المسقط الاخفى ν لهذا العمود هو المستقيم المرسوم من δ "عمودياً على φ " . وبنا نعين العمود المطلوب .

وإذا كانت δ (غير مميّنة بالشكل) نقطة تقابل ν مع المستوى A (بند ١٠) كان البعد الحقيقى بين النقطتين δ و δ' (بند ٢) هو بعد النقطة δ عن المستوى A .

(ب) اذا علم مستقيم ν ونقطة δ فالمطلوب نعين المستوى A المار بالنقطة δ عمودياً على المستقيم ν .



الطريقة لحل هذه المسألة عكس الطريقة السابقة . فإذا رسمنا في (شكل ٢٥) من δ "مستقيماً μ " عمودياً على ν ومن δ' "مستقيماً μ' " موازياً لخط الارض فان المسقطين μ و μ' "يعينان مستقيماً أمامياً μ في المستوى A . وبالمثل اذا رسمنا

من ح' العمودى φ على ν ومن γ "المستقيم" موازياً لخط الأرض فان $\varphi\varphi'$ "يعينان مستقيماً أقيماً φ واقعاً بينهما أيضاً فى المستوى المطلوب A . وعلى ذلك يتعين المستوى A بالمستقيمين $\varphi\varphi'$ والمتقاطعين فى γ .

بدر ١٧ : المسألة الثانية

المطلوب تطبيق مستوى معلوم على مستو مواز لأهم مستوى الإسقاط أى المطلوب تطبيق المستوى ليصبح موازياً لأهم مستوى الإسقاط الرئيسيين .
هذه المسألة من أهم المسائل فى الهندسة الوصفية ولا بد من التعرض لها كلها أردنا إيجاد الشكل الحقيقى لكثير أضلاع أو منحرف واقع فى مستوى معلوم أو إيجاد المقدار الحقيقى للزاوية المحصورة بين مستقيمين متقاطعين الخ . ولا بد لحل هذه المسألة من فهم ما يأتى جيداً :

(١) معنى التطبيق موقع النقطة والشكل المستوى — المعرفة الانشوائية بين مسقط شكل مستوى وموقعه
المعنى الاصلى لتطبيق مستو محدود A على آخر II هو حمل المستوى A فى الفضاء ووضعها بحيث ينطبق تماماً على المستوى II أى بحيث تتحد نقط المستوى A مع نقط المستوى II جميعاً . وهذه العملية يمكن اعتبارها مؤلفة من حركتين مستقلتين الواحدة منهما عن الأخرى : الأولى حركة دورانية للمستوى A حول مستقيم فيه مواز للمستوى II — محور دوران — بحيث يصبح المستوى موازياً للمستوى II . والثانية حركة انتقال للمستوى A فى وضعه الجديد بعد الدوران حتى ينطبق تماماً على المستوى II . فإذا افترضنا امتداد كل من المستويين A و II الى ما لا نهاية فان هاتين الحركتين يؤولان الى حركة واحدة : هى حركة دوران فقط حول خط تقاطع المستويين فى حالة تقاطعها أو حركة انتقال فقط فى حالة توازيهما .

ولما كان المستويان الرئيسيان للاسقاط Π و Π' — وهما المستويان اللذان تطبق عادة المستويات الاخرى على أحدهما — غير محددتين من حيث وضعهما في الفضاء وإنما كان المحدد هو اتجاه كل منهما (انظر بند ٢) فإن عملية التطبيق المشار إليها آنفاً تقتصر على الحركة الأولى وهي حركة الدوران التي يتحول بها مسقط أى شكل مرسوم في المستوى A الى شكله الحقيقي . وكثيراً ما سنستخدم العبارة « تطبيق مستو A على أحد مستويي الاسقاط » بمعنى « تطبيقه على مستو يوازي اتجاه أحد مستويي الاسقاط » أو « إدارة المستوى A الى الوضع الذي يوازي فيه أحد مستويي الاسقاط » .

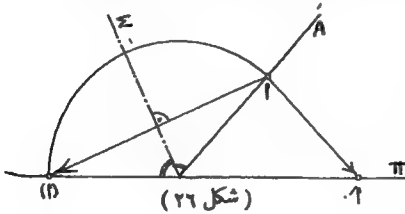
ويسمى محور الدوران السالف الذكر — وهو إما أحد المستقيبات اللاحقة أو الامامية في المستوى A — بمحور الانطباع . ويسمى الوضع الجديد (د) لاية نقطة د في المستوى بعد تطبيقه بموقع النقطة د كما يسمى الوضع الجديد (سم) لاي شكل في المستوى بعد تطبيقه بموقع الشكل سم . ويرمز لموقع النقطة د بالرمز [د] اذا كان المستوى A — الواقعة فيه النقطة د — عمودياً على المستوى Π . فثلاً في (شكل ٤) المستوى المسقط ب ا ب' عمودى على المستوى الاقوى Π ، فبعد تطبيق ذلك المستوى على Π ، رمزنا للوضع الجديد للنقطة ا وهو موقعها بالرمز [ا] .

ويكفى للوصول الى العلاقة الحقيقية بين نقط ومستقيبات مستو مثل A أن يطبق المستوى بالمعنى المتقدم على أحد المستويين الرئيسيين للاسقاط Π أو Π' أما اختيار أحد هذين المستويين في أية مسألة بالذات فيترك لظروف هذه المسألة .

نظرية :

المسقط المتوازي لاي شكل مستو على مستو مثل Π مؤلف من نقط متوازية مع موقعه على هذا المستوى . ويكون هذا الاثنان عمودياً أو مائلاً (بند ١١)

مهما يكن اتجاه الإسقاط عمودياً أو مائلاً على خط تقاطع المستويين (١) .
وذلك لأنه إذا كانت α إحدى نقط الشكل سهم الموجود في
المستوى A (شكل ٢٦) وكانت α' مسقطها المتوازي على المستوى Π فإنه يمكن
اعتبار موقعها (١) على Π مسقطاً لها على نفس المستوى Π في الاتجاه العمودي
على المستوى Σ المنصف لأحدى الزاويتين الزوجيتين المحصورتين بين
المستويين A و Π . وبمقتضى النظرية الرابعة (بند ١٢) يكون بين المسقط
سهم' والموقع (سهم) للشكل سهم اتلاف متوازي حيث محور الاتلاف هو
خط تقاطع المستويين .



وواضح أنه إذا كان
سهم' المسقط العمودي
للشكل سهم على المستوى
 Π فإن خط تقاطع
المستويين A و Π أي

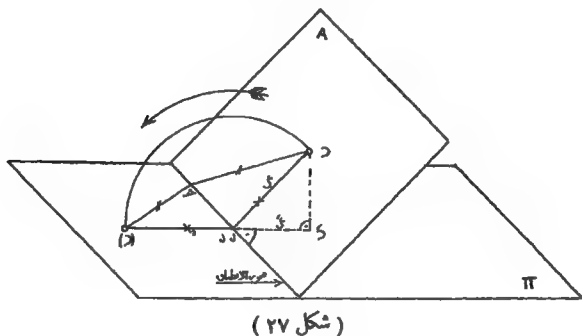
محور الاتلاف يكون في هذه الحالة عمودياً على المستوى $\alpha'\alpha$ وبالتالي على
المستقيم α' (١) وهو اتجاه الاتلاف ومعنى هذا أن الاتلاف المتوازي بين
سهم' (سهم) يكون في هذه الحالة اتلافاً عمودياً . وهذا صحيح أيضاً إذا كان سهم'
المسقط المتوازي المائل للشكل سهم على Π في اتجاه عمودي على خط تقاطع المستويين .
(ب) الخطوات الرئيسية في عملية تطبيق مستر على أحد مستوي الإسقاط في

مارة الإسقاط العمودي

الخطوة الأولى : تحديد المستوى المراد تطبيقه وهو المستوى المراد

(١) معنى هذا أن الاتلاف عمودي حتماً إذا كان الإسقاط عمودياً . أما في حالة
الإسقاط المائل فهو يتوقف على اتجاه الإسقاط .

تعيين العلاقات الهندسية الحقيقية بين أجزاء الشكل المرسوم فيه .
 الخطوة الثانية : تحديد المستوى المراد إجراء عملية التطبيق عليه وكل ما
 يشترط في هذا المستوى أن يكون موازاً إما الى Π أو Π' . وينتج من ذلك
 تعيين محور الانطباق الذي هو خط تقاطع هذا المستوى مع مستوى الشكل الاصلى .
 الخطوة الثالثة : اختيار نقطة ما مثل δ في مستوى الشكل وتعيين موقعها (δ)
 لذلك نفرض في (شكل ٢٧) أن A مستوى الشكل δ Π هو المستوى



المراد إجراء عملية التطبيق عليه وأن δ إحدى نقط المستوى A δ مسقطها
 العمودى على Π ^(١) ويراد تعيين موقعها (δ) .
 فإذا رسمنا في المستوى A المستقيم ذا الميل الاعظم ϵ المار بالنقطة δ وفرضنا
 انه يقابل محور الانطباق في النقطة $L = L'$ كان مسقطه ϵ' على Π وهو المستقيم

(١) لما كان Π موازياً الى Π أو Π' كما قدمنا كانت المساط العمودية للنقط
 والمستقيمات على Π منطبقة على مساطها الاقعية أو الرأسية على التوالي .

هـ' ل' عمودياً على محور الانطباق . ولما كانت النقطة هـ ترسم أثناء دوران المستوى A حول محور الانطباق دائرة مركزها ل ونصف قطرها ل هـ ولما كانت هذه الدائرة واقعة في المستوى المرسوم من هـ عمودياً على محور الانطباق فإن مسقط هـ على II أثناء الدوران يقع دائماً على المستقيم هـ' ل' أو امتداده لأن هذا المستقيم يمثل أيضاً مسقط الدائرة المشار إليها على II . وينتج من ذلك أن الموقع (هـ) للنقطة هـ يوجد على المستقيم المرسوم من هـ عمودياً على محور الانطباق بحيث يكون الطول ل' (هـ) مساوياً للطول ل هـ وهذا الأخير يساوى كما يؤخذ من الشكل وهـ المثلث هـ هـ' ل' القائم الزاوية في هـ والزى أهدر أضموه هـ' ل' أى المسقط المعطى على II للمستقيم هـ ل وضلع الآخر هـ' هـ أى ارتفاع النقطة هـ أو بعدها عن المستوى II . وهذا الارتفاع هـ هـ' معلوم أيضاً ويمكن قياسه من المسقط الرأسى إذا كان II موازياً الى II أو من المسقط الأفقى إذا كان II موازياً الى II^١ .

فالحصول إذن على الموقع المطلوب (هـ) للنقطة هـ يقاس وتر المثلث المشار إليه آنفاً على العمود النازل من هـ على محور الانطباق ابتداء من ل فى إحدى جهتيه حسبما يكون التطبيق فى اتجاه السهم المبين فى (شكل ٢٧) أو فى الاتجاه الآخر ولا فرق بين الحالتين فى حلول المسائل .

ويجب أن يلاحظ أن ل' (هـ) لا يمكن أن يكون أصغر من ل' هـ وأن هذين البعدين يتساويان فى حالة واحدة فقط وهى توازى المستويين A و II وفى هذه الحالة تقول كما قدمنا حركة الدوران الى حركة انتقال .

ويمكن الحصول على الموقع (هـ) بطريقة أخرى : نصل هـ بأية نقطة على محور الانطباق مثل حـ (شكل ٢٧) ثم نعين الطول الحقيقى للمستقيم هـ حـ الواقع فى

(١) فى حالة اختيار II موازياً الى II^٢ يوضع هـ' على الخ بدلاً من هـ' ل' الخ

المستوى A . فاذا ركزنا في ح التي تبقى ثابتة أثناء الدوران وبفتحة تساوى φ ح قطعنا العمود النازل من φ على محور الانطباق في (د) كانت (د) هي الموقع المطلوب للنقطة φ .

الخطوة الرابعة : استخدام الائتلاف المتوازي العمودي المشار اليه في النظرية السابقة بين المسقط والموقع في إيجاد موقع أية نقطة أخرى أو أى مستقيم في المستوى A اذا علم المسقط على II وبالعكس في إيجاد المسقط اذا علم الموقع وذلك بالطريقة المبينة في (بند ١١) حيث أصبح الائتلاف الآن معلوماً بالمحور وهو محور الانطباق — وزوج من النقط المتناظرة φ و φ' .

بند ١٨ : مثال

اذا علم مثلث ا ب ح ومستوى A وكانت م مركز البائرة المارة برؤس المثلث فالمطلوب إيجاد بعد م عن المستوى A .

خطوات العمل المستتجة من الحل الفراغى لهذه المسألة هي :

أولاً : إيجاد م

ثانياً : إيجاد العمود v النازل من م على المستوى A

ثالثاً : تعيين نقطة تقابل v مع A ولتكن φ

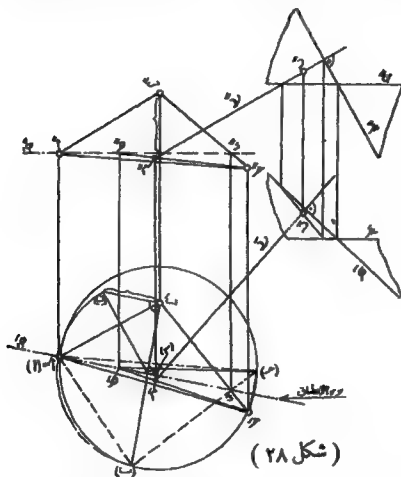
رابعاً : قياس البعد م φ فيكون هو البعد المطلوب

ويلاحظ أن الخطوات الاولى والثانية والرابعة هي من مسائل القياس في حين أن الخطوة الثالثة هي مسألة على الوضع .

ولتطبيق هذا الحل إسقاطياً نفرض في (شكل ٢٨) أن المثلث معلوم بمسقطه الاقوى والراسى ا' ب' ح' ا' ب' ح' وأن المستوى A معلوم بالمستقيمين المتقاطعين μ و ν ونفرض تسليلاً للعمل أن الاول منهما مستقيم أفقى والثانى مستقيم أمامى —

الخطوة الأولى: للحصول على مركز النائرة المارة بـ Q و R أي للحصول على المستطین الاقصى والرأسى $Q'R'$ للنقطة Q يلزم تطبيق المستوى α على مستوی یوازی أحد مستویي الاسقاط وقد اخترنا فی الشكل المستوی α الموازی للمستوی الاقصى Π ، والمار بالنقطة Q والذي يمثله فی المسقط الرأسى

المستقيم φ "المار
بالنقطة α " لاجراء عملية
التطبيق عليه وبذا يمكن
تعيين محور الانطباع
لأنه هو المسقط الاقوى
 $\varphi = \alpha'$ و' لخط تقاطع
المستوى Φ مع مستوى
المثلث. ولايجاد الموقع
(ب) للنقطة ب من
نقط المستوى α ب ح
نزل من ب' عموداً
على α' و' فقابله في ل'



(وقد سقطت سهواً من شكل ٢٨ فلم تبين عليه) م قيس على هذا العمود البعد
 $ل' (ب) = ل' [ب] = وتر المثلث [ب] ب' ل'$ القائم الزاوية في ب' والذي أحد
 أضلاعه $ل' (ب)$ وهو المسقط الاقصى للمستقيم ب ل وضلعه الآخر $[ب] ب'$ مساو
 لارتفاع ب عن المستوى Φ ^(١) وهذا الارتفاع يمكن قياسه من المسقط الرأسى

(١) يلاحظ أن الملك [ب] ب' ل' يمكن اعتباره تطبيقاً للملك ب' ل' الواقع في المستوى المسقط أخيراً للمستقيم ب' ل' ذي الميل الأعظم — على المستوى Φ . فالزاوية [ب] ب' ل' هي لذلك زاوية ميل ب' ل' وكذا ميل المستوى Π ب' ح' على المستوى الأخرى Π (قارن شكل ٢٧ حيث ضم ب' بدلاً من Φ) .

فهو يساوى بعد ب "عن φ " . وباستخدام الائتلاف المتوازي العمودى بين المسقط الاقصى لآى شكل فى مستوى المثلث ا ب ح وبين موقعه حيث المحور هو محور الانطباق φ وحيث φ' (ب) هما زوج من النقط المتناظرة - نعين الموقع (ح) للنقطة ح . أما (١) فتطبق فى هذه الحالة على ا لأن محور الائتلاف يمر بها . ثم نرسم البائرة المارة برؤس الموقع (١) (ب) (ح) للمثلث فيكون مركزها (٢) هو موقع مركز البائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ح . وباستخدام الائتلاف بطريقة بطريقة عكسية نجد م' وذلك بأن فصل (٢) (ح) مثلاً ونمده ليقابل φ فى ه' ثم فصل ه' ح' ليقابل المستقيم المرسوم من (٢) عمودياً على محور الائتلاف فى م' . أما المسقط الرأسى م " للنقطة م فيمكن تعيينه كما سبق يانه فى (بند ١٧) لأن م نقطة فى المستوى ا ب ح معلوم مسقطها الاقصى م' (خط التناظر المرسوم من ه' يقطع φ فى ه" . وتكون م" هى نقطة تقاطع ه" ح" مع خط التناظر المرسوم من م') .

الخطوة الثانية : المطلوب هنا تعيين $\varphi' \varphi$ للعمود ν النازل من م على المستوى A (بند ١١٦) . فحيث إن هذا المستوى معلوم للسهولة بالمستقيمين الاقصى والامامى : ($\varphi' \varphi$) ($\mu' \mu$) فان $\nu' \nu$ هما العمودان النازلان من م' م على $\varphi' \varphi$ على التوالي .

الخطوة الثالثة : تعيين المسقطين الاقصى والرأسى $\varphi' \varphi$ " لنقطة تقابل ν مع المستوى A (بند ١٠) وبذا تحدد النقطة د .

الخطوة الرابعة : تعيين البعد الحقيقى بين النقطتين م' د (بند ٢ شكل ٤) وهذه العملية غير مبنية فى (شكل ٢٨) بقصد التخفيف عنه .

تلمحه مباشرة :

(١) المطلوب إيجاد المقدار الحقيقى للزاوية بين مستقيمين متقاطعين معلومين .

- (٢) المطلوب إيجاد المقدار الحقيقي للزاوية بين مستقيم ومستو معلومين^(١).
 - (٣) المطلوب إيجاد المقدار الحقيقي للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين^(٢) وكذا تعيين المستوى المنصف للزاوية الزوجية.
 - (٤) المطلوب إيجاد أقصر بعد بين مستقيمين معلومين غير متقاطعين.
 - (٥) المطلوب تعيين المستقيم الذي يقابل مستقيمين معلومين غير متقاطعين بحيث يمر بنقطة معلومة أو بحيث يكون موازياً لاتجاه معلوم.
 - (٦) المطلوب إيجاد بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم.
 - (٧) إذا علم مستقيم ومستوى فالمطلوب تعيين النقطة على المستقيم المتساوية البعد عن مستقيمين آخرين معلومين وواقعين في المستوى.
- ملاحظة : لحل هذه التمارين وأمثالها يجب أولاً تحديد خطوات العمل المستتجة من الحل الفراغي فقط (بدون تفكير في مستويات الإسقاط) ثم تطبيق مسائل الوضع والقياس تطبيقاً مباشراً كما سبق بيانه في المثال المتقدم . ويراعى عند البدء بالحل الإسقاطي أن تمثل المعالم بواسطة المسقطين الأفقي والرأسي كما هو مبين في (بند ٣ ٤ ٥) ولا تعتبر المسألة محلولة إلا بعد رسم المطلوب وتمثيله كما جاء في هذه البنود .

- (١) هي الزاوية المحصورة بين المستقيم ومسقطه العمودي على المستوى .
- (٢) تقاس الزاوية الزوجية كما هو معلوم بالزاوية المحصورة بين العمودين المقامين — كل في أحد المستويين — على خط التقاطع من نقطة عليه . أو بالزاوية المحصورة بين العمودين النازلين على المستويين من أية نقطة في الفراغ .

الفصل السادس

تغيير مستوي الاسقاط أو المساقط المساعدة

نمر ١٩ : معنى تغيير مستوي الاسقاط والفرصه من ذلك

إذا فرضنا في (شكل ١) مستوي إسقاط ثابتين Π و Π' متقاطعين في خط الأرض ξ فإن وضع أية نقطة ρ في الفراغ يتحدد كما ذكرنا إذا علم مسقطاها العموديان ρ'' و ρ' على المستويين . وقد بينا في (بند ١) أن كل ما يشترط في هذه الطريقة للاسقاط هو أن يكون المستويان Π و Π' متعامدين وإنما اصطلاح فقط على اختيار أحدهما أقبياً والآخر رأسياً . فلنفرض الآن أننا ثبتنا المستوى الاقوى Π وغيرنا وضع Π' مع بقاءه عمودياً على Π ورمزنا الى الوضع الجديد للمستوى الرأسى Π' بالرمز Π'' — وهو رأسى أيضاً — وإلى خط الأرض الجديد وهو خط تقاطع Π و Π'' بالرمز ξ' وأخيراً الى المسقط الرأسى الجديد ، للنقطة ρ على المستوى Π بالرمز ρ'' " فمركز أنه وضع النقطة ρ في الفراغ يحدد أيضاً بمعنوية ρ' و ρ'' . والمسقط الاقوى ρ' يبقى في هذه الحالة ثابتاً لا يتغير وكذلك يبقى ثابتاً ارتفاع النقطة الثابتة ρ عن المستوى الاقوى Π . أما المسقط الجديد ρ'' " فيمكن رسمه في مستوى الورقة بتطبيق Π' على Π حول خط الأرض الجديد ξ' — وذلك كما سبق لنا تطبيق Π على Π' حول ξ (بند ١) للحصول على ρ' — ثم إزال عمود من ρ' على ξ' فتكون ρ'' واقعة على هذا العمود — الموازى لخطوط التناظر الجديد — بحيث تبعد عن خط الأرض الجديد ξ' يبعد مساو للارتفاع الثابت للنقطة ρ عن Π أى مساو في المقدار والاشارة لبعد المسقط الرأسى القديم ρ' عن خط الأرض القديم ξ .

وبالمثل يجوز تثبيت المستوى الرأسى Π وتغيير المستوى الاقصى Π مع الاحتفاظ به عمودياً على Π فيكون « المسقط الاقصى الجديد » Π' للنقطة ρ على المستوى الاقصى في وضعه الجديد — ولنرمز له بالرمز Π' — وقمّا على العمود النازل من ρ على خط الارض الجديد Π' وهو خط تقاطع Π و Π' بحيث يكون بعد ρ عن Π' مساوياً في المقدار والاشارة لبعد ρ عن خط الارض الاصلى Π لأن كلا من البعدين يساوى في هذه الحالة البعد الثابت للنقطة ρ عن المستو الرأسى الثابت Π ^(١).

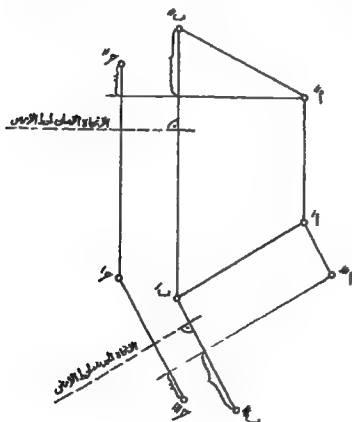
وقد تقضى ظروف المسألة — كما سنرى — بتكرار العملية السابقة أكثر من مرة فهذا التكرار لا يؤثر مطلقاً في القواعد الاساسية المذكورة . فثلاً بعد تثبيت Π وتغيير وضع Π الى Π' فانه يمكن اعتبار Π و Π' المستويين الرئيسيين للإسقاط واعتبار ρ و ρ' المسقطين الاصليين للنقطة ρ أى المسقطين الاقصى والرأسى على التوالى . فاذنا غيرنا بعد ذلك وضع Π الى Π' مثلاً مع بقاءه عمودياً على Π' فان الحصول على « المسقط الاقصى الجديد » للنقطة ρ على Π' يتم في هذه الحالة بنفس الطريقة التى شرحناها سابقاً للحصول على ρ' . وبعد ذلك يمكننا اعتبار Π و Π' المستويين الرئيسيين للإسقاط واعتبار مسقطى النقطة عليهما المسقطين الاصليين الاقصى والرأسى فيجوز على هذا الاساس تثبيت أحدهما وتغيير وضع الآخر مرة أخرى وهكذا .

ويجوز تفسير العمليات السابقة بأنها اختيار مستويات إسقاط جديدة Π و Π' الخ مع الاحتفاظ بالمستويين الرئيسيين الاصليين Π و Π' ولذلك فانه يطلق على تلك المستويات اسم مستويات إسقاط مساعدة كما يطلق على المساقط ρ و ρ' الخ للنقطة ρ على تلك المستويات اسم المساقط المساعدة .

(١) المرجو من القارىء رسم شكل يبين هذه العمليات .

ويؤخذ مما تقدم أنه المستويات المساعدة لمواضع يجب أنه تكونه دائماً عمودية على أى المستويين الرئيسيين لمواضع أو — في حالة تكرار العملية كما تقدم — على أى المستويين اللذين يجوز لنا اعتبارهما على الأساس السابق مستويي الاسقاط الرئيسيين .

ولنفرض الآن أننا حذفنا خطوط الأرض السابقة ٤ ٤ ٤ ٤ ٤ ٤ الخ واكتفينا بمعلومية اتجاهاتها التي تحدد في كل مرة اتجاهات مستويات الاسقاط فديهي أن المساقط المساعدة لنقطة واحدة لا يمكن عندئذ تحديدها لأن إبعاد هذه النقطة عن « مستويات الاسقاط » تصبح في هذه الحالة غير معروفة (بند ٢) . ولكن اذا علمت نقطتان فاكثر كان من الممكن رسم مساقطها المساعدة . ففى



(شكل ٢٩)

(شكل ٢٩) لنفرض أنه يراد رسم المساقط المساعدة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠ للنقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠ بمسقطها الاقوى والرأسى مع حذف خط الأرض : (١' ٢' ٣' ٤' ٥' ٦' ٧' ٨' ٩' ١٠' ١١' ١٢' ١٣' ١٤' ١٥' ١٦' ١٧' ١٨' ١٩' ٢٠' ٢١' ٢٢' ٢٣' ٢٤' ٢٥' ٢٦' ٢٧' ٢٨' ٢٩' ٣٠' ٣١' ٣٢' ٣٣' ٣٤' ٣٥' ٣٦' ٣٧' ٣٨' ٣٩' ٤٠' ٤١' ٤٢' ٤٣' ٤٤' ٤٥' ٤٦' ٤٧' ٤٨' ٤٩' ٥٠' ٥١' ٥٢' ٥٣' ٥٤' ٥٥' ٥٦' ٥٧' ٥٨' ٥٩' ٦٠' ٦١' ٦٢' ٦٣' ٦٤' ٦٥' ٦٦' ٦٧' ٦٨' ٦٩' ٧٠' ٧١' ٧٢' ٧٣' ٧٤' ٧٥' ٧٦' ٧٧' ٧٨' ٧٩' ٨٠' ٨١' ٨٢' ٨٣' ٨٤' ٨٥' ٨٦' ٨٧' ٨٨' ٨٩' ٩٠' ٩١' ٩٢' ٩٣' ٩٤' ٩٥' ٩٦' ٩٧' ٩٨' ٩٩' ١٠٠) وذلك على « المستوى الرأسى الجديد » II الذى يتحدد اتجاهه بمعلومية الاتجاه الجديد المبين لحظ

الأرض . فنوضح السبب المذكور آنفاً أن المسقط المساعد ١ للنقطة الاولى ١ يجوز أن يكون أية نقطة معينة اخرى على خط التناظر الجديد المرسوم من ا' عمودياً

على الاتجاه الجديد لخط الارض . فاذا تم اختيار α " وجب أن يكون بعد β " في الاتجاه الجديد لخطوط التناظر عن المستقيم المرسوم من α " موازياً للاتجاه الجديد لخط الارض — مساوياً لـ β " في الاتجاه القديم لخطوط التناظر عن المستقيم المرسوم من α " موازياً للاتجاه القديم لخط الارض لأن كلا من هذين البعدين يساوى الفرق الثابت بين ارتفاعي النقطتين β " و α " عن المستوى الاقصى II ، الذى لم يتغير اتجاهه . ويلاحظ هنا أنه يستوى قياس البعد المشار اليه بحيث تكون β " كما هو مبين في (شكل ٢٩) أو في الجهة الاخرى بالنسبة للمستقيم المرسوم من α " موازياً للاتجاه الجديد لخط الارض ولكن بعد تثبيت α " مـ " يكون المسقط الجديد حـ " لاية نقطة أخرى مثل حـ قد تحدد تمام التحديد . وغنى عن البيان أنه كان من الممكن اختيار β " أو حـ " أولاً ثم تعيين المسقطين المساعدين للنقطتين الآخرين على النحو السابق .

واذا كان الاتجاه الجديد لخط الارض موازياً الى α ' ب ' فان معنى هذا أننا اخترنا المستوى الرأسى الجديد II م ليكون موازياً الى المستقيم α ب ويحدد مسقطه الجديد α " ب " على II م في هذه الحالة البعد الحقيقى بين النقطتين α م و β (١) . واذا اعتبرنا الآن المسقطين α م و β " (وهذا الأخير غير مرسوم في شكل ٢٩ وإن كان محدداً بالنقطتين α م و β ") للمستقيم α ب على II م ، حيث II م يوازى المستقيم وغيرنا اتجاه II م بحيث يصبح عمودياً على المستقيم فانه يكون في هذه الحالة عمودياً على II م ويمكن لذلك اعتباره في هذا الوضع الجديد مستوياً أفقياً جديداً II م ويكون الاتجاه الجديد لخط الارض — خط تقاطع

(١) يلاحظ انه اذا اخترنا α " واقعة على α نفسها أمكن اعتبار العملية السابقة تطبيقاً للمستوى المسقط أفقياً للمستقيم α ب — على المستوى الاقصى II م واعتبار α " ب " موقع المستقيم α ب بعد التطبيق . وفي هذه الحالة تتفق هذه الطريقة في المبنى — وإن اختلفت في المعنى — مع الطريقة المينة في (شكل ٤) .

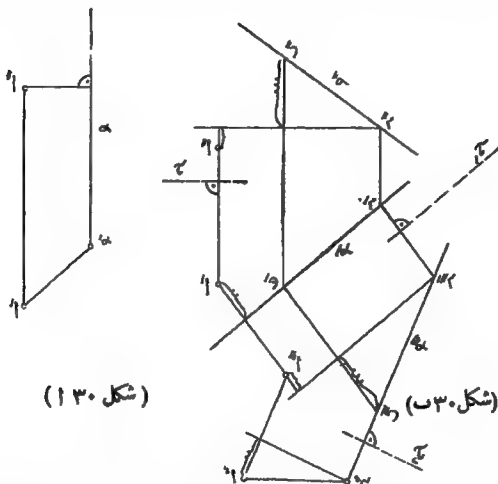
II ٢٠٣ II — عمودياً على ا' ب' و هذا يؤول المسقط الاخير ا' ب' للمستقيم ا ب على II الى نقطة . أى أنه يلزم على وجه العموم تغييره لستوى الإسقاط الرئيسيين لجعل مستقيم ما عمودياً على أحدهما .
و انفرصه من المساط المساعدة إما تسهيل حل المسائل النظرية كما رأينا فيما تقدم وكما سنرى فى المثال الآتى أو إظهار معالم الأجسام وجعلها أكثر وضوحاً اذا كانت موضوعة فى أوضاع خاصة بالنسبة لمستوى الإسقاط الرئيسيين .
فالمسقطان الاقصى والرأسى للهرم المبين فى (شكل ١٧٨) مثلاً لا يعلمان لقارىء الرسم فكرة واضحة عن هيئة الهرم وشكله لأن محوره عمودى على المستوى الاقصى فى حين أن مسقطه الاقصى المساعد على مستو جديد عمودى على المستوى الرأسى ومائل على هذا المحور يساعد كثيراً على إظهار معالمه وتقريبه للذهن .

تمر ٢٠ : مثال

المطلوب إيجاد البعد الحقيقى لنقطة معلومة ا' عن مستقيم معلوم α الخطوات اللازمة لحل هذه المسألة حلاً مباشراً هى :
(أولاً) نعين المستوى المار بالنقطة عمودياً على المستقيم (بند ١٦)
(ثانياً) نجد نقطة التقاطع β لهذا المستوى مع المستقيم (بند ١٠)
(ثالثاً) نجد البعد الحقيقى بين النقطتين ا' β (بند ٢) فيكون هو البعد المطلوب .

وهناك حل آخر لهذه المسألة بأن نطبق المستوى المعين بالمستقيم α والنقطة ا' على أحد مستويى الإسقاط الرئيسيين (بند ١٧) فإذا أنزلنا من الموقع (١) للنقطة ا' عموداً على α فقابله فى (٢) كان (١) (٢) هو البعد المطلوب .
غير أننا نريد الآن أن نبين طريقة حل هذه المسألة باستخدام المساط المساعدة فنقول :

لو أن المستقيم كان عمودياً على أحد مستويي الاسقاط لكان العمود النازل من النقطة عليه موازياً لهذا المستوى ولأمكن لذلك قياس البعد الحقيقي بين النقطة والمستقيم مباشرة من مسقط العمود على هذا المستوى . فالمستقيم α في (شكل ١٣٠) عمودى على المستوى الاقوى II، ولنا كان البعد المطلوب



(شكل ١٣٠)

(شكل ١٣٠ ب)

مساوياً في هذه الحالة المسقط الاقوى للعمود النازل من النقطة على المستقيم أى مساوياً البعد α .

فإذا كان المستقيم المعلوم مائلاً على مستويي الاسقاط الرئيسيين كما هو مفروض في رأس المسألة ^(١) (شكل ١٣٠ ب) وأمكنا تغيير مستويي الاسقاط بحيث

(١) اذا قيل « مستقيم معلوم » فبنى ذلك أنه يجب اختيار هذا المستقيم في وضع عام أى مائلاً بالنسبة لمستويي الاسقاط الرئيسيين أما اذا اريد التخصيص فيجب أن ينص على ذلك في رأس المسألة فيقال مثلاً « المعلوم مستقيم اقوى » او « عمودى على II » الخ .

يصبح أحدهما عمودياً على المستقيم فانا نحصل على الحالة الخاصة المذكورة آنفاً. وللوصول الى هذا الوضع يلزم — كما قدمنا — تغييران لمستوي الاسقاط الرئيسيين أو بمعنى آخر يجب استخدام مستوي إسقاط مساعدين Π_1 و Π_2 ^(١). وقد اخترنا في (شكل ٣٠ ب) أولهما Π_1 عمودياً على المستوى الاقصى Π وموازياً للمستقيم وبذا يكون الاتجاه الجديد τ لخط الارض موازياً الى المسقط الاقصى α للمستقيم فاذا فرضنا نقطتين حيثما اتفق α و τ على المستقيم α وعينا المساط المساعدة α'' و α''' للقط الثلاث α و τ و α' على Π وذلك بالطريقة المشروحة في (بند ١٩) كان $\alpha'' = \alpha''' = \alpha$ المسقطين الرئيسيين الجديدين للمستقيم α والنقطة α' . والآن نعتبر Π_2 مستوي إسقاط الرئيسيين ونختار ثانياً مستوي الاسقاط الماسعين Π_2 عمودياً على المستقيم فيكون عمودياً على Π_1 وبذا يكون الاتجاه الأخير τ لخط الارض عمودياً على α'' و α''' ويؤول مسقط المستقيم على Π_2 الى النقطة α' (حيث يدل الرقم ٤، على عدد الشروط) التي يجوز أن تكون أية نقطة على α'' أما المسقط الأخير α' للنقطة α' فيقع على العمود المرسوم من α'' على τ بحيث يكون بعد α' عن المستقيم المرسوم من α' موازياً الى τ مساوياً لبعد α' عن α'' . فالبعد المطلوب هو إذن البعد بين النقطتين α'' و α''' ^(٢).

معمول : اذا كان الاتجاه الجديد τ لخط الارض عمودياً على الاتجاه الاصلى τ الذى يكون عادة أفقياً فان مستوى الاسقاط الجديد يكون عمودياً على كل من

(١) اذا كان المستقيم موازياً لأحد مستويي الاسقاط الرئيسيين فانه يكفي مستوى مساعد واحد.

(٢) المطلوب استخدام الشكل في رسم المسقطين الاقصى والرأسى η' و η'' للعمود η النازل من النقطة على المستقيم.

المستويين الاقصى والرأسى Π_1 و Π_2 ويسمى في هذه الحالة بالمستوى الرأسى الثانى كما يسمى المسقط عليه بالمقط الرأسى الثانى وكثيراً ما يطلق على هذا المستوى مع Π_1 اسم المستويات الرئيسة للمقط .

الفصل السابع

الظلال

تعريف ومبادئ، أولية — تطبيقات عملية لمسائل الوضع

بند ٢١ : ماهية الظل والاعراض الرئيسية من رسمها

معلوم أنه اذا وقع جسم أو سطح في طريق الأشعة المنبعثة من مصدر ضوء معين فإنه ينشأ عن ذلك ما يعرف باسم الظل .

فاذا علم جسم وأمكن — بعد افتراض وجود مصدر ضوء معين — تحديد هذه الظلال ورسمها أو محاكاتها في مسقط الجسم (وتكون هذه المحاكاة عادة بواسطة التلوين أو التظليل) فالتنا نحصل بذلك على رسم يكون أقرب الى الفهم واكثر بلاغة في التعبير عن الجسم المبين .

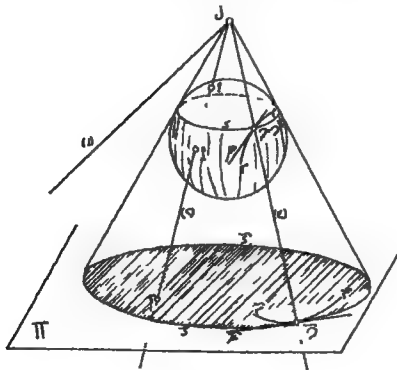
وإن هذه العملية تعتبر من التمارين المهمة في الهندسة الوصفية لما لها من فائدة عظيمة في تربية ملكة التصور عند المبتدىء وتعليمه قراءة الرسومات الهندسية لأن تحديد الظلال يتطلب منه دائماً أن يتصور هيئة الجسم المرسوم ووضعه في الفضاء .

بند ٢٢ : تعريف أساسية

اذا وضعنا كرة غير شفافة (شكل ٣١) أمام نقطة مضيئة L وفرضنا أن الأشعة الضوئية تنبعث من هذه النقطة في خطوط مستقيمة ، فإنه يمكن تقسيم هذه الأشعة بالنسبة الى الكرة الى ثلاثة أقسام : قسم لا يقطع الكرة (في نقط حقيقية) مثل الشعاع (١) وقسم مثل الشعاع (٢) يقطع الكرة في نقطتين منفصلتين A و B حيث A هي النقطة المضيئة L هي النقطة المظلمة . أما القسم

الثالث والأخير فهو مجموعة الأشعة الضوئية التي تمس الكرة وتولد بذلك مخروطاً ضوئياً مرسومة داخله الكرة . فالشعاع (٣) مثلاً وهو أحد رؤاسم المخروط المذكور يمس الكرة في النقطة δ أو بتعبير آخر يقابل الكرة في النقطتين المنطقتين $\delta \equiv \delta$.

والمحل الهندسى للنقطة δ وهو دائرة التماس ϵ بين مخروط الضوء والكرة يسمى خط الظل ويفصل بين الجزء المضاء وبين الجزء المظلم أو الواقع في الظل . وهذا الظل يسمى بالظل الحقيقي وذلك تيمناً له من الظل الظاهري أو الظل الساقط الذى يمكن الحصول عليه إذا قابلت الأشعة الضوئية في طريقها بعد مغادرتها لسطح الكرة سطحاً آخر أو مستويًا مثل المستوى Π فى (شكل ٣١) .



(شكل ٣١)

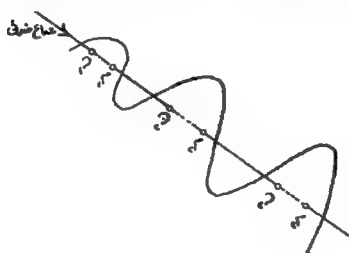
والمنحنى المقفل \sim الذى ينتهى به الظل الساقط هو المحل الهندسى للنقطة δ حيث δ هي ظل النقطة δ أى نقطة تقابل الشعاع الضوئى (٣) الذى يمس الكرة في النقطة δ — مع المستوى Π الذى يستقبل الظل . فالمنحنى

\sim بعبارة أخرى — وهو فى حالة الكرة مقطع مخروطى — هو دائماً ظل خط الظل ϵ . ولهذا السبب فان تعيين خط الظل يسبق فى أكثر المسائل المتعلقة بالظلال إيجاد الظل الساقط على سطح آخر أو مستوى .

ويصدق ما تقدم في جوهره على أجسام كثيرة أخرى غير الكرة مثل الاسطوانة والمخروط وهي التي يقطع فيها الشعاع الضوئي الجسم في نقطتين اثنتين وجميع سطوح الدرجة الثانية (انظر بند ٤٥) من هذا النوع ويصدق كذلك على الاجسام المحدودة بمستويات مثل المنشور والمكعب والهرم الخ . إلا أنه في هذه الحالات يجوز أن يكون خط الظل وكذا الخط المحد للظل الساقط خطأ منكسراً أو منحنيّاً على حسب نوع الجسم (انظر بند ٢٩) .

بند ٢٣ : الظل الحقيقي والظاهري في مادة الاجسام المنقوشة

أما بعض الاجسام التي يقابل فيها الشعاع الضوئي الجسم في أكثر من نقطتين كما هو مبين في (شكل ٣٢) ففي هذه الحالة يمكن دائماً التفرقة بين النقطتين P_1, P_2 الخ وهي التي يكون الشعاع عندها داخل في مادة الجسم وبين النقطتين Q_1, Q_2 الخ وهي النقط التي يكون الشعاع عندها خارجاً من مادة الجسم .



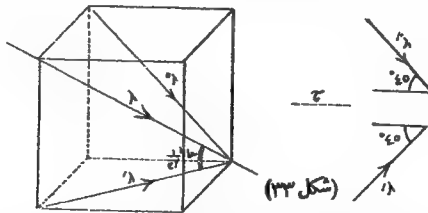
(شكل ٣٢)

فجميع النقط P_1, P_2, Q_1, Q_2 الخ يقال إنها في ظل حقيقي . أما النقط P_1, P_2, Q_1, Q_2 الخ فهي إما مضادة مثل النقطة الاولى P_1 أو في ظل ظاهري مثل Q_1 الخ فالفرق إذن بين P_1, P_2 مثلاً الموجودين

في ظل حقيقي وظاهري على التوالي أن P_1 تكون دائماً مظلمة أي ولو أزلنا الاجزاء المحيطة بها من الجسم ولا يمكن لذلك أن يقع عليها ظل ظاهري في حين أن Q_1 تصبح مضادة بمجرد إزالة جزء الجسم الذي يحجب عنها الضوء .

شر ٢٤ : الاضاءة

مصدر الضوء إما أن يكون نقطة هندسية ، موجودة على بعد محدود من الجسم وذلك مثل الشمعة أو المصباح الكهربائي (وهذا فرض نظري لتسهيل الحل إذ من الواضح أن الاشعة الضوئية المنبعثة من شمعة مثلاً لا تلتقي في الحقيقة في نقطة واحدة) ويطلق على الاضاءة في هذه الحالة اسم الاضاءة المركزية — وإما أن تكون النقطة المضيئة بعيدة جداً بحيث تكتسب أشعتها خاصية التوازي مثل أشعة الشمس وفي هذه الحالة تكون الاشعة الضوئية كلها موازية لاجزاء معين بحيث يؤول مخروط الضوء المذكور في (بند ٢٢) الى أسطوانة ضوئية وتسمى الاضاءة عندئذ بالاضواء المتوازية . وهذا النوع الأخير من الاضاءة هو المستعمل في جميع الرسوم الفنية تقريباً بل إن الاجزاء λ التي تكون الاشعة موازية له يؤخذ في هذه الرسوم زيادة في تسهيل رسم الظلال موازياً لقطر المكعب الذي توازي أوجهه الثلاثة مستويات الاسقاط الرئيسية (شكل ٢٣) لأن كلا من المسقط الاقصى λ والرأس λ لهذا القطر يصنع في هذه الحالة مع الاتجاه τ لخط الارض زاوية مقدارها ٤٥° ويسمى هذا النوع من الاضاءة للتوازية بالاضواء القطبية كما تسمى



الاشعة الضوئية بالاشعة ذات ال ٤٥° . ويجب أن يلاحظ أن زاوية ميل الأشعة في هذه الحالة على المستوى الاقصى أو الرأسى لا تساوى ٤٥° وإنما هي الزاوية التي يجيبها يساوى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ كما يتضح بسهولة من (شكل ٢٣) .

بند ٢٥ : الوجه المظلم والوجه المضاء لسطح أو سطح صغير معارم

إذا تصورنا ضوءاً منبعثاً من نقطة مضيئة وواقعاً على مستو معين أو سطح صغير فع أن كل شعاع يقطع المستوى أو السطح الصغير في نقطة واحدة إلا أنه يمكن التمييز بين ناحيتين : الناحية التي يقع عليها الضوء وتسمى بالوجه المضاء والناحية الأخرى وتسمى بالوجه المظلم .

بند ٢٦ : ظل النقطة

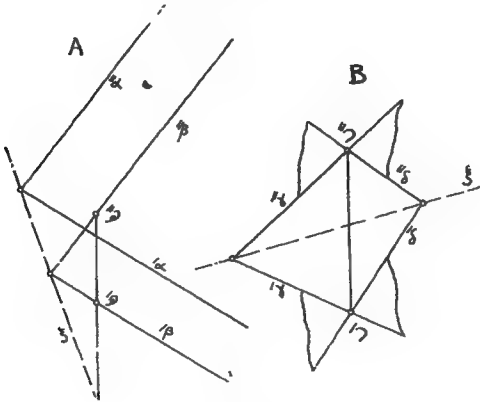
الظل ρ الذي تلقيه نقطة ما مثل ρ على مستو هو نقطة تقاطع الوجه المضاء من المستوى مع شعاع الضوء المار بالنقطة ρ . والظل الذي تلقيه النقطة ρ على سطح ما مثل المئين في (شكل ٣٢) هو النقطة الاولى ρ من نقط تقابل الشعاع الضوئي مع السطح أو هو نقطة تقابل الشعاع مع الجزء المضاء من السطح .

بند ٢٧ : كيفية تمييز الوجه المضاء من الوجه المظلم لسطح معارم في

المسقطين الاقصى والرأسى

قبل أن نبين الطريقة لذلك نذكر أن أى مستو مائل على مستوي الاسقاط الاقصى والرأسى $\Pi \rho, \Pi \rho$ يمكن أن يشغل بالنسبة لها أحد وضعين رئيسيين $A \rho, B \rho$ (شكل ٣٤) . ففي الوضع A يكون محور الاثلاف ρ أى خط تقاطع المستوى A مع مستوى الاثلاف (بنده) واقعاً في جهة واحدة بالنسبة للمسقطين ρ و ρ' " لأية نقطة ρ من نقط المستوى وبذلك تكون نسبة الاثلاف بين مسقطي أى شكل مرسوم في المستوى A (بند ١٤) موجبة . وفي الوضع الثاني B تكون هذه النسبة سالبة . ويختلف المستويان من حيث الوضع بالنسبة لمستوي الاسقاط في أن الوجه الذي يرى في المسقط الرأسى من المستوى A هو نفس الوجه الذي يرى في المسقط الاقصى فإذا كان الوجه مضاء في المسقط الرأسى

كان كذلك أيضاً في المسقط الاقصى وبالعكس . أما المستوى B فبخلاف ذلك إذ أن الوجه الذى نزاه في المسقط الرأسى هو غير الوجه الذى نزاه في المسقط الاقصى . ويمكن تلخيص هذه الظاهرة فيما يلى :-



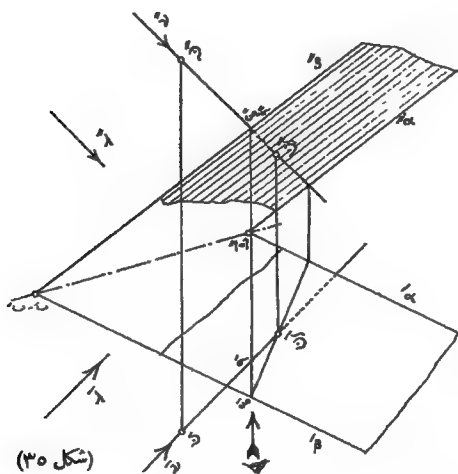
(شكل ٣٤)

إذا كانت نسبة الانحداف بين المسطعين الاقصى والرأسى مستوية ^(١) موجهة وفرضنا نقطة خارج المستوى ونظرتنا عمودياً على المستوى الاقصى ثم على الرأسى فانه هذه النقطة اما أنه تكونه في الخاتين معاً ظاهرة أى واقعة أمام المستوى بالنسبة للنائز أو غير ظاهرة أى خلف المستوى . أما إذا كانت نسبة الانحداف سالبة فانه النقطة تكونه في احدى الخاتين ظاهرة وفى الاخرى مخفية وراء المستوى .
ويمثل الآن (شكل ٣٥) مستوي A بمعلومية المستقيمين المتوازيين α و β

(١) أى نسبة الانحداف بين مسقطى أى شكل مرسوم في المستوى .

فاذا علم أيضا اتجاه الاضائة المتوازية λ فالمطلوب تمييز الوجه المضاء من الوجه المظلم في كل من المسقطين .

أول ما يمكن معرفته من النظرة الأولى هو أن نسبة الالتفاف في هذه الحالة سالبة لأن مسقطي أية نقطة من نقط المستوى A واقعتان في جهتين مختلفتين بالنسبة الى محور الالتفاف $U' = U'' = B$ حيث $U' = A$ هي نقطة تقاطع $\alpha' \alpha''$ وحيث $U' = U'' = B$ هي نقطة تقاطع $\beta' \beta''$.



(شكل ٣٥)

ثم نفترض نقطة مثل δ خارج المستوى ونمر بها الشعاع الضوئي v بان نرسم من δ "المسقط الرأسى v " لهذا الشعاع موازيا الى λ ونرسم من δ "المسقط الاقصى v " موازيا الى λ' . ونجد نقطة تقابل v مع المستوى A (بند ١٠) وهي انتمتة δ فتكون هي ظل النقطة δ .

ولتعيين موضع النقطة ρ من المستوى A في المسقطين نختار في المسقط الرأسي مثلاً النقطة $s'' = s'$ التي هي المسقط الرأسي المشترك لنقطتين: إحداهما s واقعة على الشعاع v والاخرى s' على المستقيم β ثم نجد المسقطين الاقيين s' و s'' لكل من هاتين النقطتين (s' على v و s'' على β) وننظر في اتجاه خطوط التناظر في المسقط الاقي أى في اتجاه السهم اللين في (شكل ٣٥) والذي يمثل اتجاه النظر عمودياً على المستوى الرأسي. فلما كانت s أبعد عن الناظر من s' فإن شعاع الضوء v الواقعة عليه النقطة s يكون في هذا المكان خلف المستوى A بالنسبة الى الناظر عمودياً على المستوى الرأسي ويبقى كذلك حتى يقابل المستوى A في النقطة ρ فيظهر حينئذ أمامه. أى أن النقطة ρ بالنسبة للناظر عمودياً على المستوى الرأسي وراء المستوى A . وحيث إن نسبة الاختلاف سالبة كما قدمنا فإن النقطة ρ تكون بالنسبة للناظر عمودياً على المستوى الاقي ظاهرة أى فوق المستوى A . وبذا يكون المسقطان الرأسي والاقي v و β للشعاع كما هو مبين بالشكل حيث تدل الاجزاء المرسومة بخطوط منقطعة منه على أنها غير منظورة هذا اذا فرضنا أن المستوى A محدود بالمستقيمين α و β وليس يمتد الى ما لا نهاية.

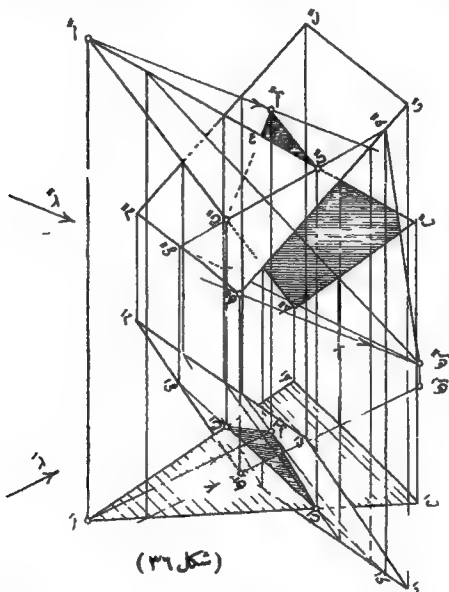
وبمجرد تحديد هذه الاجزاء الظاهرة والمختفية من شعاع الضوء في المسقطين يمكننا الاستنتاج بغير عناء بأن الوجه الظاهر من المستوى A في المسقط الرأسي هو وجه مظلم في حين أن الوجه الظاهر منه في المسقط الاقي وجه مضاء.

بم ٢٨ : مثال

المعلوم مثلث abc في المستوى A ومتوازي أضلاع $هـ م ل$ في المستوى B (شكل ٣٦) والمطلوب تعيين ورسم الظلال الناتجة من وجود اضلاع متوازية

معلومة اتجاهها ^(١)

الخطوة الأولى : أوجد خط تقاطع المستويين : $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ " (بند ١٠)
الخطوة الثانية : عين إشارة نسبة الالتفاف لكل من المستويين . ويلاحظ
هنا أنه لا لزوم لرسم محور الالتفاف نفسه في الحالين وإنما يكفي أن تصور



امتداد ل' م' ل' م' حتى يتقابلا وكذا امتداد و' ه' و' ه' " لنعلم أن نسبة
الاختلاف للمستوى B موجبة وب نفس الطريقة نجد أن هذه النسبة للمستوى A سالبة.

(١) يلاحظ أننا نقرض في هذه المسألة عند الكلام عن المستويين $B \leq A$ أن كلا منهما محدود بالأضلاع المذكورة وليس ممتداً إلى ما لا نهاية.

الخطوة الثالثة : حدد الاجزاء الظاهرة والمختفية كما سبق يسانه (في بند ٢٧)
ومن هذا التحديد يتضح أن الجزء ١ هـ من المثلث في المسقط الرأسى أمام
المستوى B وأن الجزء هـ س من متوازى الاضلاع أمام المستوى A . وفي
المسقط الاقصى يكون الجزء ١ هـ من المثلث ظاهراً فوق المستوى B والجزء
هـ س من متوازى الاضلاع مخفياً تحت المستوى A .

الخطوة الرابعة : اوجد الظلين α هـ و α س للنقطتين ١ هـ على المستويين
A و B على التوالى . فبتطبيق ما سبق ذكره في (بند ٢٧) يمكن بسهولة إدراك
أن ما يرى من المستوى B هو الوجه المضاد في كل من المسقطين الاقصى
والرأسى . أما المستوى A فيرى منه الوجه المضاد كذلك في المسقط الرأسى والوجه
المظلم في المسقط الاقصى وهذا الاخير هو الجزء الوحيد الواقع في ظل حقيقى .

الخطوة الخامسة : الظلال الظاهرية . قصى المسقط الاقصى لما كان وجه المثلث
مظلماً بطبيعته فهو لا يستقبل ظلاً ظاهرياً ويكون الظل الظاهرى الوحيد الذى
يمكن رسمه في المسقط الاقصى هو ما يليه الجزء ١ هـ من المثلث على المستوى
B ولايجاد هذا الظل نصل α ب كل من α هـ و α س فيكون α هـ و α س هـ
المسقطين الاقصىين لظلى ١ هـ و ١ س على التوالى . ويكون α هـ و α س هـ
هو المسقط الرأسى للظل الذى يليه الجزء ١ هـ من المثلث على المستوى B
إنما لا يظهر من هذا الظل سوى الجزء α هـ ع لان الباقي منه يخفى وراء
المثلث ١ هـ س . ولما كان وجه المثلث في المسقط الرأسى مضاداً فانه يستقبل
الظل الذى يليه الجزء هـ س من متوازى الاضلاع لوجود هذا الجزء أمام
المستوى A . ولتحديد هذا الظل نصل المسقط الرأسى هـ لظل النقطة هـ على
المستوى A بكل من س و س (حيث س هـ هما نقطتنا تقابل هـ و هـ م

مع المستوى A^(١) فيكون هـ "م" ص" هو الظل الظاهري الذي يليه الجزء هـ م م على المستوى A إنما لا يظهر منه سوى الجزء المين بالشكل لأن باقي الظل يقع بعضه خارج الثلث ا ب ح وبعضه لا يرى لأنه مخف وراء متوازي الاضلاع.

معمول : رغبة في جعل الرسومات المينة بها الظلال أكثر وضوحا قد جرت العادة بتمييز الظلال الحقيقية من الظاهرية عند التعبير عنها في الرسم ويكون ذلك بتظليل النوع الثاني تظليلا أنقل من الاول (قارن شكل ٣٦).

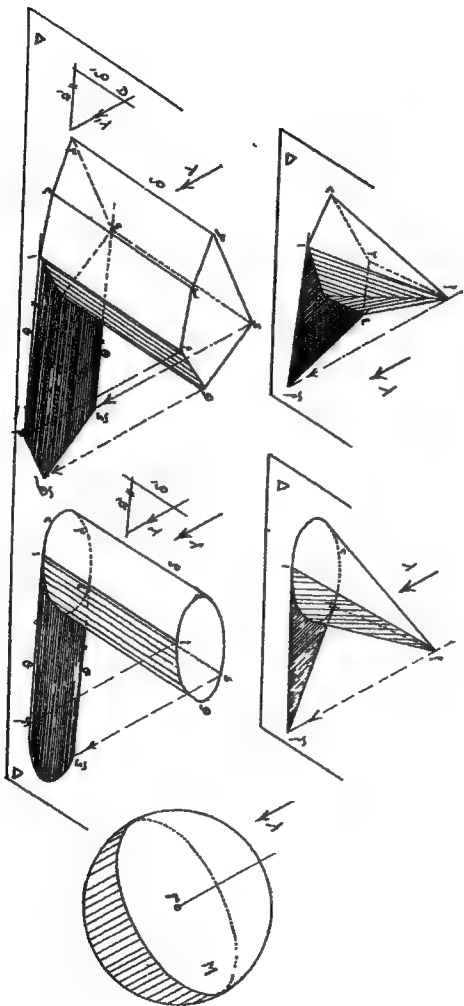
بنر ٢٩ : تمثيل بعض الاجسام البسيطة

نورد فيما يلي كيفية تعيين الظلال ورسمها للهرم والمنشور والمخروط والاسطوانة والكرة في حالة الاضلاع المتوازية مقتصرين على الشرح الفراغي وتاركين للقارىء أن يتابع الحل الاسقاطي بنفسه (شكل ٣٧).

فلايجاد الظل الذي يليه الهرم المين بالشكل على مستوى قاعدته Δ نمر برأسه ا شعاع الضوء الموازي لاتجاه الاضلاع ا ب ثم نجد نقطة تقابله \bar{a} مع Δ فتكون هي ظل النقطة ا على هذا المستوى . فاذا رسمنا من \bar{a} في المستوى Δ المستقيمين المرفيعين $\bar{a} ١ ٢$ (الذين يشترك كل منهما مع القاعدة في نقطة واحدة فقط) فان هذين المستقيمين يحددان الظل الظاهري $\bar{a} ٣ ٢ ١$ الساقط على المستوى Δ . ويكون خط الظل للهرم كما يتضح بسهولة من الشكل هو الخط المنكسر $\bar{a} ٣ ٢ ١ ١$ حيث يفصل كل مستقيم من مستقيمت هذا الخطيين وجبين أحدهما مضاء والآخر مظلم فثلا المستقيم ١ ١ يفصل بين الوجه المضاء ٢ ١ والوجه المظلم ٥ ١ ١ والمستقيم ٢ ١ يفصل بين الوجه المضاء ٢ ١ والقاعدة المظلمة وهكذا .

(١) يلاحظ أن هاتين النقطتين « نظريتان » وليس لهما وجود فعلي لانهما فرضنا أن المستوى A ينتهي بالمستقيمين ا ب ١ ٢ ح .

(۱۷۷/۵۵۵)



وبالمثل تماماً يمكننا تعيين الظل $\alpha 1 2 3$ الذى يلقيه المخروط المبين بالشكل على مستوى قاعدته Δ وذلك برسم المماسين (بدلاً من المستقيمين الحرفيين في حالة المنشور) $\alpha 1 2 3$ للقاعدة من α التى هي ظل الرأس 1 على المستوى Δ . ويكون خط الظل في هذه الحالة هو $1 2 3 4$.

أما في حالتى المنشور والاسطوانة فتفترض نقطة في الفراغ مثل h ويرسم منها مستقيمان $h 1 2$ يوازيان على التوالي اتجاه الاضائة 1 وأحرف المنشور (أو رؤوس الاسطوانة) $1 2$. فاذا تقاطع المستوى المستوى المعين بالمستقيمين $h 1 2$ مع مستوى القاعدة Δ في المستقيم h ورسم في حالة المنشور المستقيمان الحرفيان (وفي حالة الاسطوانة المماسان للقاعدة) $h 1 2$ و $h 3 4$ الموازيان الى h فان هذين المستقيمين (أو المماسين) يحددان من الخارج الظل الظاهرى الذى يلقيه المنشور (أو الاسطوانة) على مستوى القاعدة. ويكون خط الظل في حالة المنشور هو الخط المنكسر $1 2 3 4 5$ وفي حالة الاسطوانة الخط $1 2 3 4 5 6$.

وبلاحظ أن الرواسم الفاصلة بين الاجزاء المضائة والمظلمة في حالتى المخروط والاسطوانة هي رؤوس النحاس بين كل منهما وبين المستويات المماسية له الموازية لاتجاه الاضائة. كما يلاحظ أن هذه الرواسم قد تزيد في كل حالة عن اثنين إذ أن هذا العدد يتوقف على عدد المماسات التى يمكن رسمها من α الى القاعدة فلو كانت قاعدة المخروط أو الاسطوانة منحنيّاً من الرتبة الثالثة مثلاً (انظر بند ٣٣) لأمكن على وجه العموم رسم ثلاث مماسات من α الى القاعدة.

وبلاحظ أيضاً أنه اذا كان كل من المنشور والاسطوانة منتهيّاً من أعلا بمستوى يوازي القاعدة كما هو مبين في (شكل ٣٧) فان $h 1 2$ و $h 3 4$ وفي حالة المنشور يكونان موازيين الى $h 1 2$ ويكون ظل قوس الدائرة $1 2$ و $h 3 4$ على Δ في حالة

الاسطوانة باعتبارها أسطوانة دائرية — هو قوس دائرة أخرى مساوية للاولى .
ولتعيين خط الظل في حالة الكرة الميئة في (شكل ٣٧) نجد المستوى M
المرار بالمركز م عمودياً على اتجاه الاضاءة λ فيقطع الكرة في دائرة عظمى تكون
هى خط ظل الكرة .

والظل الظاهرى الذى يلقيه جسم ما على مستو لوجود نقطة مضئية أو
إضاءة متوازية يمكن اعتباره على التوالى مسقطاً مركزياً للجسم (منظور) أو
مسقطاً متوازياً ماثلاً له على هذا المستوى . وتعتبر النقطة المضئية في الحالة الاولى
مركزاً للاسقاط كما يعتبر اتجاه الاضاءة في الحالة الثانية اتجاه الاسقاط .

بند ٣٠ : نظريات ونماذج

النظريات الآتية المتعلقة بظلال المستقيمت في حالة الاضاءة المتوازية مفيدة
في الاحوال العملية واكثرها واضح من نفسه لايحتاج الى برهان :

- (١) ظل الخط المستقيم على مستو هو خط مستقيم يمر بنقطة تقابله مع المستوى .
- (٢) ظل المستقيم على مستو يوازيه هو خط مستقيم مواز للمستقيم نفسه .
- (٣) اذا فرضنا نقطتين a و b على المستقيم المذكور في النظرية السابقة فان
ظل a على المستوى الموازى له وهو \tilde{a} يساوى ويوازى b . ومن ذلك
نستنتج أن ظل الدائرة على مستو يوازى مستويها هو دائرة أخرى مساوية
للاولى ومركزها هو ظل مركز الدائرة الأصلية على المستوى .

- (٤) ظلال المستقيمت المتوازية على مستو هى نفسها مستقيمت متوازية .
- (٥) ظلال خط مستقيم واحد على مستويين يتقابلان على خط تقاطع المستويين .
- (٦) ظلال خط مستقيم على مستويين متوازيين هما مستقيمان متوازيان ^(١) .

(١) المفروض في النظريات الرابعة والخامسة والسادسة أن اتجاه الاضاءة واحد
لكل منها .

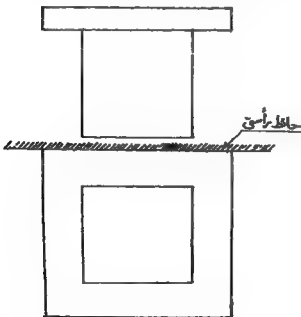
- (٧) اذا فرضنا مستقيماً عمودياً على أحد مستويي الاسقاط وليكن Π فان ظله على أى مستوي موازى Π يكون موازياً للبقط الرأسى π لاتجاه الاضاءة .
- (٨) الظل الذى يلقبه المستقيم المذكور فى النظرية السابعة على أى جسم يكون مسقطه الرأسى خطأ مستقيماً موازياً للبقط الرأسى π لاتجاه الاضاءة .

تعاريف

- (١) اذا علم اتجاه الاضاءة أو نقطة مضيئة فاوجد الظل الذى يلقبه مستقيم معلوم على :

- (١) كرة (ب) اسطوانة دورانية (ح) مخروط دورانى
- (٢) اذا علم اتجاه الاضاءة أو نقطة مضيئة فاوجد الظل الذى يلقبه كل من مستقيمين غير متقاطعين على الآخر .

- (٣) المعلوم مثلث ABC ومستوى A والمطلوب إيجاد اتجاه الاضاءة



- المتوازية الذى يجعل الظل ABC للثلث المعلوم على المستوى A مثلثاً متساوياً الاضلاع .

- (٤) عين فى المسقطين الاقصى والرأسى الظلال الحقيقية للهرم والمنشور والمخروط والاسطوانة المائلة (شكل ٣٧) وكذا الظل الظاهرى الذى يلقبه كل منها على مستوى قاعدته .

(شكل ٣٨)

- (٥) المطلوب تعيين ورسم

- الظلال الحقيقية للجسم المئين فى (شكل ٣٨) وكذا الظل الذى يلقبه هذا الجسم على الجدار الرأسى المئين وذلك عندما تكون الاضاءة قطرية .

الباب الثاني

المنحنيات والسطوح

تعريف ومبادئ أساسية

الفصل الاول

المنحنيات المستوية

بدر ٣١ : تعريف

يسمى المنحنى مستوياً اذا كانت جميع نقطه واقعة في مستو واحد . ويمكن اعتباره متوالياً إما عن تحرك نقطة في المستوى بحيث يكون المنحنى المحل الهندسي لهذه النقطة أو عن تحرك مستقيم في المستوى أيضاً بحيث يكون المنحنى ماساً لهذا المستقيم في جميع أوضاعه ويطلق على المنحنى في هذه الحالة اسم غلاف المستقيم . وواضح أنه في كل نقطة من نقط المنحنى باعتباره المحل الهندسي لنقطة متحركة يمكن رسم مماس له وهذه المماسات هي الاوضاع المختلفة لمستقيم يتحرك مغلفاً للمنحنى .

ولنفرض الآن أن ρ نقطة على منحنى ما وأتينا رسمنا مستقيماً ماراً بها ليقطع المنحنى في نقطة مثل ρ مجاورة للنقطة الاولى . فإذا أخذت ρ في التحرك على المنحنى متجهة نحو ρ فإن المستقيم القاطع ρ يدور في المستوى حول ρ ويسمى الوضع النهائي له عند ما تنطبق ρ على ρ بمماس المنحنى في النقطة ρ أو بعبارة أخرى :

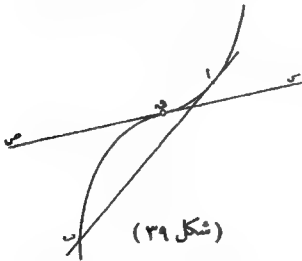
المماس لمنحنى ما هو المستقيم الذي يصل نقطتين متجاورتين ومتقاربتين قريباً لانهائياً
أى نقطتين « متاليتين » من قطع المنحنى ^(١) .
وإذا اعتبرنا المنحنى غلغلاً لمستقيم متحرك فبنفس التفكير السابق نستطيع
القول إن :

قطعة التماس هي قطعة تقاطع مماسين « متالين » من مماسات المنحنى .
ويسمى المستقيم المرسوم في مستوى المنحنى من نقطة عليه عمودياً على المماس
فيها بعمودي المنحنى في هذه النقطة .

يتضح من التعاريف السابقة أنه في كل نقطة « عادية » من قطع المنحنى يمكن
رسم تماس واحد له كما أن لكل تماس عادي نقطة تماس واحدة — نقول « عادية »
لأن هناك حالات يلازم نين بعضاً منها فيما يلي .

بئر ٣٢ : التقط والمماسات الشاذة

تماس المنحنى في نقطة عادية مثل ١ (شكل ٣٩) يشترك مع المنحنى كما قدمنا



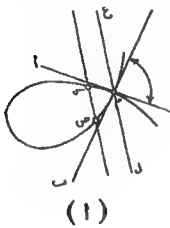
في نقطتين متاليتين ومتحدتين في
النقطة ١ . فإذا قطع هذا المماس المنحنى
في نقطة « ثالثة » مثل ب ثم أخذ في
التحرك مغلفاً للمنحنى فإن نقطة
التقاطع ب تتحرك على المنحنى فإذا
كانت هذه الحركة بحيث تقترب
النقطتان ب ١ — نقطة التقاطع

ونقطة التماس — فانه يحدث في بعض الأحيان أن يكون هناك وضع للتماس

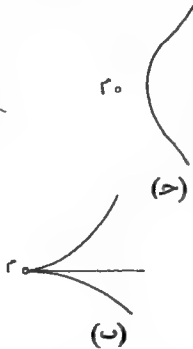
(١) إذا كانت « نقطة » عادية ، على المنحنى فإنا نصل إلى وضع نهائي واحد
للمستقيم التقاطع « » سواء أخذنا « » إلى اليمين النقطة « » أو إلى يسارها .

تحد فيه ب ١ في نقطة واحدة على المنحنى مثل σ . فهذه النقطة σ التي تجمعت فيها ثلاث نقط متقاربة : النقطتان المتتاليتان المتحدتان في σ والنقطة الثالثة σ — هي نقطة شاذة وتسمى نقطة انحراف . ويسمى المماس الشاذ σ من للمنحنى في مثل هذه النقطة وهو يشترك مع المنحنى في مموت فقط متحدة مماس انحراف .

وكل واحدة من النقط الميئة في (شكل ٤٠) تسمى بالنقطة المزدوجة لأن أى مستقيم مار بأية بنقطة مزدوجة σ مثل المستقيم σ ل في (شكل ٤٠) يشترك مع المنحنى في نقطتين متحدين في النقطة σ وهذا الاتحاد ينتج من اقتراب المستقيم الذي يقطع المنحنى في النقطتين القريبتين σ من — من المستقيم σ ل . ونوجه نظر القارىء الى أن النقطتين σ لا يجوز اعتبارهما «متتاليتين» بالمعنى المذكور



(شكل ٤٠)



(ب)

سابقا لأنهما واقعتان على فرعين مختلفين من المنحنى في حين أن النقطتين المتتاليتين يشترط فيهما أن يكونا في الاصل على فرع واحد مثل σ أو σ . فالوضع النهائي لكل من المستقيمين القاطعين σ σ σ σ هو مماس للمنحنى في σ ويشترك

معه في مموت فقط متحدة في σ اثنتان منها متتاليتان .

ويطلق على النقطة المزدوجة في (شكل ٤٠) اسم النقطة المعقودة أو العقدة . وعندها يمكن رسم مماسين حقيقيين σ σ ب للمنحنى .

أما النقطة المزدوجة σ الميئة في (شكل ٤٠) ب فتسمى نقطة رجوع وعندها

ينطبق المماسان المذكوران آنفاً ويؤولان إلى مماس واحد يشترك كما قدمنا مع المنحنى في ثلاث نقط متحدة في M . ويستطيع القارئ أن يحصل على مثل هذه النقطة برسم المنحنى من $s^2 = s^3$ فإن نقطة الأصل التي هي إحدى نقط المنحنى هي نقطة رجوع.

وأخيراً يجوز أن يكون المماسان للمنحنى في نقطة مزدوجة M تخيلين وذلك إذا كانت M إحدى نقط المنحنى ولكنها منفصلة عنه (شكل ٤٠ ح) وتسمى لذلك النقطة المزدوجة في هذه الحالة بالنقطة المنعزلة. فثلاث نقطة الأصل في المنحنى من $s = \sqrt{s^2 - 1}$ هي نقطة منعزلة.

بدر ٢٢ : أنواع المنحنيات المستوية

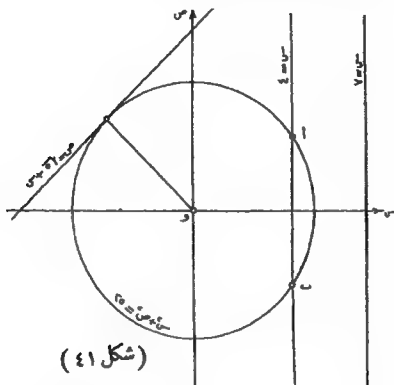
يسمى المنحنى المستوي قانونياً إذا نشأ عن تحريك نقطة أو مستقيم في المستوى بكيفية خاصة وعلى حسب « قانون » معين . مثال ذلك المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوي بحيث يكون مجموع بعدها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي مقداراً ثابتاً هو منحنى قانوني ويسمى كما هو معروف بالقطع الناقص .

وتنقسم المنحنيات القانونية إلى مبرية وغير مبرية

فالمنحنى المبرى هو المنحنى الذي يقطع أى مستقيم موجود في مستوي في عدد معين ثابت من النقط .

وبعض هذه النقط أو كلها يجوز أن تكون إما حقيقة منفصلة أو حقيقية متحدة أو تخيلية . فثلاث المنحنى من $s^2 + s^2 = 25$ (شكل ٤١) هو منحنى جبرى لأن أى مستقيم واقع في مستوي يقطعه في نقطتين اثنتين حيث تقطعا التقاطع في حالة مستقيم مثل المستقيم الذي معادلته $s = 5$ هما نقطتان حقيقتان منفصلتان لأن جذرى المعادلة في هذه الحالة حقيقيان وغير متساويين . وتقطعا التقاطع مع المستقيم الذى معادلته $s = \sqrt{s^2 - 5}$ هما مثلثا حقيقتان متحدتان أو منطبتان لأن

جنرى المعادلة في هذه الحالة يكونان حقيقيين ومتساويين فالمستقيم إذن مماس للدائرة. وإخيراً يجوز أن تكون نقطتا التقاطع تخيليتين إذا كان جذرا المعادلة تخيليين كما هو الحال مثلاً في المستقيم الذي معادلته $y = ٧$.



ويكونه المنحنى غير مبرى إذا لاه عدد نقط التقاطع حقيقية كانت أو تخيلية مع أي مستقيم — غير ثابت ويتوقف على وضع المستقيم في المستوى. وذلك مثل المنحنى الجبري $y = ٧$ جاس فإن عدد نقط تقاطع هذا المنحنى مع مستقيم ما في المستوى حقيقية كانت أو تخيلية يختلف بين صفر و ∞ .

ويسمى المنحنى الجبري منحنياً من الدرجة n الثانية مثلاً إذا كان كل مستقيم في مستوييه يقطعه في n من النقط حقيقية أو تخيلية فثلاً المنحنى السالف الذكر $y^2 + x^2 = ٢٥$ هو منحنى جبري من الدرجة الثانية.

ويسمى المنحنى الجبري منحنياً من الرتبة n الثانية مثلاً إذا أمكن رسم L من المماسات حقيقية كانت أو تخيلية إلى المنحنى من كل نقطة في مستوييه.

الدرجة والرتبة لمنحن جبرى غير متساويين على وجه العموم ولكنهما في حالة الدائرة مثلا وكذا جميع منحنيات الدرجة الثانية متساويان .

ويمكن البرهنة تحليلياً على أن :

أى منحنيين جبريين أحدهما من الدرجة ٢ والثانى من الدرجة ٣ يتقاطعا في (٢×٣) من النقط . وأن :

أى منحنيين جبريين أحدهما من الرتبة ١ والثانى من الرتبة ٢ يمكن رسم (١×١) مماس مشترك لهما .

بند ٣٤ : الخواص الاسقاطية للمنحنيات

الخواص الهندسية التى لا تتغير بالاسقاط متوازياً كان أو مركزياً تسمى بالخواص الاسقاطية كما يسمى فرع الهندسة الذى يبحث فى هذه الخواص بالهندسة الاسقاطية (انظر بند ٧٩) .

فالدرجة والرتبة لمنحن جبرى هما من الخواص الاسقاطية لأن مسقط منحن من الدرجة النونية أو من الرتبة اللامية هو منحن جبرى من الدرجة النونية أو من الرتبة اللامية أيضاً (١) .

وكذلك التماس من الخواص الاسقاطية لأن مسقط المماس لمنحن فى إحدى نقطه هو نفسه مماس لمسقط المنحنى فى مسقط النقطه .

أما نصف قطر الانحناء (بند ٣٦) فلا يعتبر خاصه إسقاطية لأنه يتغير بالاسقاط .

ويتعين المنحنى المستوى فى طريقة مونيخ للاسقاط بمعلومية المستوى الموجود فيه المنحنى وأحد مسقطيه الاقصى والرأسى .

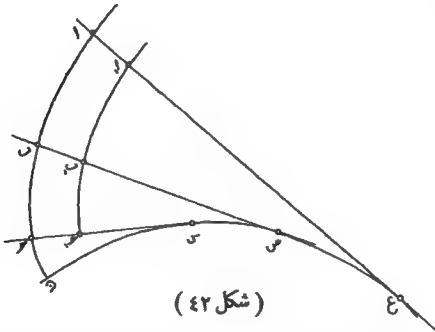
(١) انا قطع مستقيم منحنيّاً مستويّاً فى \odot من النقط فان مسقطه على مستو ما يقطع مسقط المنحنى فى \odot من النقط أيضاً هى مساقط النقط الأولى على هذا المستوى .

بنر ٣٥ : غروف العموديات ومعادير المماسات

اذا فرضنا في (شكل ٤٢) أن $ا ب ح$ منحني مستو ورسمنا عموديات المنحني في عدة نقط متتالية من قطعه فان غلاف هذه العموديات هو منحني جديد $س ص ع$ يسمى غروف العموديات للمنحني $ا ب ح$.

ويرى من نفس الشكل أن المنحني $ا ب ح$ عمودي على مماسات المنحني $ع ص س$ في نقطه المختلفه . ويسمى المنحني العمودي على مماسات منحني آخر بمعادير المماسات .

ويمكن تصور رسم منحني معامد $ا ب ح$ للمماسات منحني معلوم $س ص ع$ بالطريقة الآتية :



تصور خيطاً ثابت الطول $ع د$ أحد أطرافه $ع$ مثبت في نقطة من نقط المنحني المعلوم $س ص ع$ ومنطبق بتمامه على المنحني . فاذا تحرك الطرف الآخر $د$ مبتعداً عن المنحني $س ص ع$ وظل الخيط مشدوداً فان $د$ ترسم منحنياً معامداً $ح ب ا$ للمماسات المنحني $ع ص س$. فالمنحني $ا ب ح$ نشأ من فرد أو بسطه الخيط ولهذا السبب يطلق عليه أحياناً اسم $بسط$ أو $فرد$ المنحني $س ص ع$ كما يطلق

على المنحنى s من s ع اسم مبسوط أو مفرد المنحنى 1 ب ح . ولو أن الباسطه (وجمعها بواسط) شائعة الاستعمال في التعبير عن معامد المماسات إلا أننا نفضل على وجه العموم التسمية التي اتخذناها عنواناً لهذا البند كلما أردنا التكلم عن المنحنيين معاً وذلك منعاً للبس .

ينتج مما تقدم :-

اولاً : أن أى منحنى مستو له غلاف واحد لعمودياته وعدد لا نهاية له من بواسطه أو معامدات مماساته .

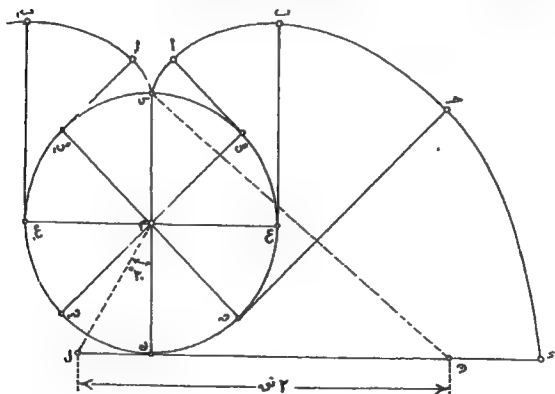
ثانياً : اذا اعتبرنا في (شكل ٤٢) معامد المماسات 1 ب ح للمنحنى s من s ع فظاهر من عملية فرد الخيط السابق شرحها أن الفرق بين طول المماس s ب للمنحنى s من s ع في s وبين طول المماس s ح في s يكون مساوياً لطول الجزء s من s من المنحنى .

ثالثاً : اذا أريد رسم أحد المعامدات 1 ب ح لمماسات منحنى معلوم s من s ع (شكل ٤٢) فإنا نقسم المنحنى المعلوم الى عدة أقسام في نقط متقاربة مثل s من s ع فاذا قسنا على المماس في كل نقطة من هذه النقط طولاً مساوياً لطول المماس في النقطة التي قبلها مباشرة زائداً طول جزء المنحنى المحصور بين النقطتين فإن المحل الهندسي لنهايات هذه المماسات يكون المعامد المطلوب 1 ب ح لمماسات المنحنى المعلوم s من s ع وأى معامد جديد مثل 1 ب ح 1 يكون موازياً للمعامد الأول ويمكن الحصول عليه بتغيير طول المماس في النقطة الاولى للمنحنى المعلوم s من s ع .

فمثلاً اذا أريد رسم المعامد المار بالنقطة s من المماسات الدائرة m في (شكل ٤٣) أى رسم باسط الدائرة المار بالنقطة s — نقسم الدائرة الى عدة أجزاء في النقط s من s ع ... ثم نرسم المماسات فيها للدائرة وتأخذ عليها الأبعاد s من s ع s ع

و ح د و ... مساوية على التوالي لأطوال الأقواس من د ع من د ه من د
ك من ... أى مساوية إلى $\frac{\text{ط ن ه}}{4} \frac{\text{ط ن و}}{4} \frac{\text{ط ن ح}}{4} \frac{\text{ط ن د}}{4}$... حيث ن هو
نصف قطر الدائرة. فالمنحنى من ا ب ح و ... الذى يصل هذه النقاط هو معامد
المماسات المطلوب .

والطريقة البسيطة الآتية المعروفة باسم طريقة كو خانسكي ^(١) تسمح بقياس محيط الدائرة على خط مستقيم قياساً تقريبياً صحيحاً بقدر الامكان :



(شکل ۴۳)

نرسم (شكل ٤٣) مماسحيًا اتفق للدائرة مثل ل و ونرسم من المركز م المستقيم م ل ليقابل المماس في ل صانعا معه زاوية مقدارها ٦٠°. ثم نقيس على المماس ابتداء من ل في اتجاه نقطة التماس — البعد ل م مساويا ثلاثة أمثال

نصف قطر الدائرة ونصل ρ س حيث س هي نقطة الدائرة المقابلة لنقطة التماس فيكون ρ س مساوياً لنصف محيط الدائرة أى مساوياً πr تقريباً . ويستطيع القارئ أن يحقق هذه النتيجة بنفسه بعملية حسابية بسيطة .

رابعاً : المنحنى المعامد للمماسات منحني معلوم يتقاطع معه في نقطة رجوع . فالنقطة س في (شكل ٤٣) هي نقطة رجوع وتألف المنحنى المعامد للمماسات الدائرة في هذا الحالة من الفرعين الحزوينين س ١ ب ح و ... س ١ ب ح و ... وهذه النتيجة تتضح من عملية فرد الخيط التي أشرنا إليها في أول هذا البند .

بند ٢٦ : نصف قطر الانحناء ودوائره

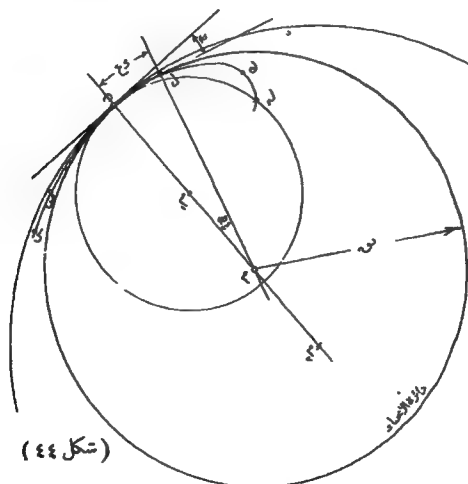
معلوم أن الدائرة منتظمة الانحناء ، في جميع نقاطها وأن هذا الانحناء يقاس بمقلوب نصف القطر فإذا كان هذا صغيراً قيل إن انحناء الدائرة كبير وبالعكس . فإذا فرضنا الآن منحنيّاً مستويّاً مثل المنحنى س س ١ ل و المبين في (شكل ٤٤) فلا شك أن مثل هذا المنحنى لا يمكن اعتباره كالدائرة منتظمة الانحناء في جميع نقطه إذ من الواضح أن مقدار الانحناء عند النقطة س مثلاً غيره عند ل . فإذا كانت ρ إحدى نقط المنحنى وأريد قياس انحنائه عندها فالتا نفرض نقطة مثل ل على المنحنى قريبة من النقطة الأولى ونعتبر الجزء ρ ل من المنحنى قوساً من دائرة مركزها م هو نقطة تقابل عمودى المنحنى في ρ ل . فإذا كانت ل قريبة جداً من ρ بحيث يمكن اعتبار ρ ل نقطتين متاليتين فإن م تسمى في هذه الحالة مركز انحناء وتسمى الدائرة التي تشترك مع المنحنى في الجزء ρ ل والتي مركزها م بدائرة انحناء . وبطبيعتنا مقلوب نصف قطرها ρ المسمى بنصف قطر انحناء مقياساً لانحناء المنحنى عند ρ . فإذا رمزنا إلى جزء المنحنى ρ ل بالرمز ω وإلى الزاوية الصغيرة بين مماسي المنحنى في ρ ل بالرمز ϕ وهي تساوى الزاوية بين العموديين المتساويين للمنحنى في ρ ل فإن $\rho = \frac{\omega}{\phi}$ بحيث يكون

$$\gamma = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{1}{\nu}$$

حيث ν هو نصف قطر الانحناء γ مقياس الانحناء عند ψ .

يؤخذ بما تقدم:

أولاً — اذا فرضنا في (شكل ٤٤) أن الدائرة التي مركزها μ على عمودى المنحنى في النقطة ψ والتي تمس المنحنى في هذه النقطة — تقطع المنحنى في نقطة أخرى



(شكل ٤٤)

مثل μ فالوضع النهائي للمركز μ اذا تحرك المركز μ على عمودى المنحنى بحيث تبقى الدائرة مماسة للمنحنى في ψ وبحيث تأخذ نقطة التقاطع μ في الاقتراب من نقطة التماس ψ الى أن تنطبق عليها — هذا الوضع النهائي μ هو مركز الانحناء عند ψ ويكون μ نصف قطر الانحناء وتكون الدائرة المماسية التي مركزها μ دائرة الانحناء.

ثانياً — لما كانت أية دائرة مماسة للمنحنى في ρ تشترك معه في نقطتين متتاليتين ولما كانت دائرة الانحناء هي الوضع النهائي للدائرة المماسية اذا تقاطعت مع المنحنى في نقطة «ثالثة» ρ ، وذلك عندما تنطبق ρ على ρ فيتسج من ذلك أنه دائرة الانحناء تشترك مع المنحنى في ثلاث نقط متتالية وتسمى أحياناً لهذا السبب بالدائرة الموصقة.

ثالثاً — يقال للدائرة الانحناء إنها تمس وتقطع المنحنى في نفس الوقت أو بمعنى آخر إنها تعبر المنحنى عند النقطة .

رابعاً — لايجاد مركز الانحناء ودائرته بالتقريب لمنحن غير قانوني ^(١) في إحدى نقطه ρ — نختار النقطة ρ على المنحنى القريبة منها قريباً كافياً فيكون مركز الانحناء ρ هو نقطة تقابل عمودي المنحنى في ρ ρ ويجب كما قلنا أن تكون دائرة الانحناء «عابرة» للمنحنى عند النقطة ρ وهذه الحقيقة من شأنها أن تسهل رسم دائرة الانحناء رسماً مضبوطاً بقدر الامكان . فاذا قلنا في (شكل ٤٤) دائرة الانحناء ρ بكل من الدائرتين ρ ρ وجدنا أن الدائرتين الاخيرتين وكذا أية دائرة ماسة أخرى غير دائرة الانحناء تمس المنحنى بمحوار النقطة ρ من جهة واحدة فقط في حين أن دائرة الانحناء ρ تمس المنحنى من الخارج الى يمين النقطة ρ ومن الداخل الى يسارها .

واذا طبقنا ما تقدم على المنحنى الميّن في (شكل ٣٩) عند نقطة الانقلاب ρ وجدنا أن نصف قطر الانحناء يساوي ∞ . والواقع أن المنحنى يكون انحناءه صفراً عند نقطة الانقلاب إذ تقول دائرة الانحناء الى تماس الانقلاب فيها . ويكون نصف قطر الانحناء صفراً في حالة نقطة الرجوع (شكل ٤٠ ب) .

(١) اذا كان المنحنى قانونياً فانه يمكن التعبير عنه على صورة معادلة وفي هذه الحالة يمكن إيجاد مركز الانحناء ونصف قطره بالضبط . أنظر ملامنحيات الدرجة الثانية .

الفصل الثاني

المنحنيات الفراغية

بند ٣٧ : تعاريف

يسمى منحنياً فراغياً أو ملتزماً أو مضاعفاً الانحناء كل منحنٍ لا تقع جميع نقطه في مستو واحد .

ماس المنحنى الفراغى في إحدى نقطه هو المستقيم الذى يصل نقطتين متاليتين .
وأى مستو يمر بمثل هذا المماس يكون مستوياً مماساً ويشترك مع المنحنى في نقطتين متاليتين أيضاً فإذا قطعه في نقطة « ثالثة » ، وأخذت هذه النقطة تتحرك على المنحنى فإن المستوى يدور حول المماس . فإذا كانت نقطة التقاطع تتحرك على المنحنى مقتربة من نقطة التماس فإنه يطلق على المستوى المماس فى وضعه النهائى عند ما تنطبق النقطة المتحركة على نقطة التماس اسم المستوى المماس .

فالمستوى المماس فى نقطة مثل ρ من نقط منحنٍ فراغى يمر بالمنحنى ويقطعه فى نفس الوقت أى يمر بالمنحنى عند النقطة ρ بحيث يمكن اعتبار الجزء من المنحنى المجاور من الجهتين لنقطة التماس ρ مرسوماً فى المستوى المماس إذا أخذناه صغيراً صغراً كلفياً .

ويشترك المستوى المماس عند النقطة ρ مع المنحنى فى مموت نقط متالية وضمنة فى ρ أو بعبارة أخرى يمر بمماسين متالين .

والدائرة الواقعة فى المستوى المماس والمارة بنقط المنحنى الثلاث المتحدة فى ρ (والتي تسمى المماسين المتالين للمنحنى) هى دائرة الانحناء للمنحنى عند النقطة ρ ونصف قطرها هو نصف قطر الانحناء ρ .

ويحدد لنا ρ مقياساً لانحناء الاول للمنحنى عند النقطة ρ إذ أن هذا المقياس

كما قدمنا في المنحنيات المستوية هو

$$\frac{\varphi \epsilon}{\psi \epsilon} = \frac{1}{\mu}$$

حيث $\varphi \epsilon$ هي الزاوية المحصورة بين المماس في النقطة ϵ والمماس في نقطة تالية لها ϵ ، وحيث $\psi \epsilon$ هو طول الجزء الصغير $\epsilon \epsilon'$ من المنحنى .

غير أن هناك انتهاءً تاماً للمنحنى الفراغى ولذا سمي مضاعف الانحناء — ذلك هو مقدار « بروزه » أو انحنائه عن المستوى . ويرتبط هذا الانحناء الثانى بالزاوية الزوجية المحصورة بين المستويين المماسين في نقطتين متاليتين . فاذا رمزنا لهذه الزاوية بالرمز ψ وطول المنحنى بين النقطتين المتاليتين بالرمز $\psi \epsilon$ فإن

$$\frac{\psi \epsilon}{\psi \epsilon} = \text{الانحناء الثانى}$$

وهذا المقدار يساوى صفراً اذا كان المنحنى مستوياً لان جميع المستويات المماسقة تنطبق في هذه الحالة على المستوى المرسوم فيه المنحنى .

ويسمى المستوى المار باحدى نقط منحنى فراغى عمودياً على المماس فيها بالمستوى العمودى . كما يسمى خط تقاطع المستوى العمودى مع المستوى المماس بالمعمودى الرئيسى أو العمودى الاول وذلك تمييزاً له من العمودى الثانى وهو المستقيم المار بنقطة تماس عمودياً على المستوى المماس .

والمماسات المختلفة لمنحنى فراغى تولد كما سنرى فيما بعد سطوحاً قابلاً للانفراد يسمى بالسطح المماسى للمنحنى .

بم ٣٨ : أنواع المنحنيات الفراغية

تنقسم المنحنيات الفراغية « القانونية » كما تنقسم نظيراتها المستوية الى منحنيات جبرية وغير جبرية

فيسمى منحنياً مبرهاً من الدرجة μ المنحنى الفراغى الذى يقطعه كل مستو فى الفضاء فى μ من النقط حقيقية أو تخيلية . فاذا وجد مستو يقطع منحنياً فراغياً جبرياً من

الدرجة ∞ في أكثر من ∞ من نقط المنحنى فإن جزءا من المنحنى يقع بنهاه في المستوى أو يؤول المنحنى الى منحنى مستو .

ويمكن اعتبار المنحنى الفراغى القانونى أنه غلاف مستو متحرك هو في جميع أوضاعه المستوى الملائق للمنحنى بحيث يكون خاضعا أثناء الحركة لقانون معين . ففى هذه الحالة يكون خط تقاطع أى وضعين متتاليين من أوضاع المستوى مماسا للمنحنى كما تكون نقطة تقابل أى ثلاث مستويات متتالية نقطة من نقط المنحنى . وبناء على هذا التعريف الجديد فإنه يطلق على المنحنى الفراغى القانونى اسم منحنى ميرى من الرتبة n إذا أمكن رسم n من المستويات الملائقة له حقيقة أو تخيلية من كل نقطة في الفراغ .

أبسط أنواع المنحنيات الفراغية هى تلك التى من الدرجة الثالثة لأن المنحنى الفراغى من الدرجة الاولى هو المستقيم والمنحنى الفراغى من الدرجة الثانية إما أن يكون مستويا (مقطعا مخروطيا) أو مكونا من مستقيمين غير متقاطعين . أما المنحنى الفراغى ذو الدرجة الثالثة فيمكن الحصول عليه في حالة تقاطع السطوح المسطرة التى من الدرجة الثانية كالسطوح المخروطية والاسطوانية لأن خط تقاطع أى اثنين منها باعتبار كل منها سطحا من الدرجة الثانية هو كما سئى بعد منحنى من الدرجة الرابعة فإذا اشترك السطحان في راسم واحد فإن منحنى التقاطع ينحى الى هذا الراسم المستقيم وهو من الدرجة الاولى ومنحنى من الدرجة الثالثة ^(١) .

بئر ٢٩ : مقاطع المنحنيات الفراغية — قانونه بموفيسى

مسقط منحنى فراغى جبرى من الدرجة n هو منحنى مستو من الدرجة n أيضا

(١) منحنيات الدرجة الثالثة الفراغية يطلق عليها أحيانا اسم « المقاطع المخروطية التكميلية » فيقال قطع ناقص تكميلى أو قطع زائد تكميلى أو قطع مكافئ تكميلى على حسب نوع الاسطوانة التى يمكن رسم هذه المنحنيات على سطحها .

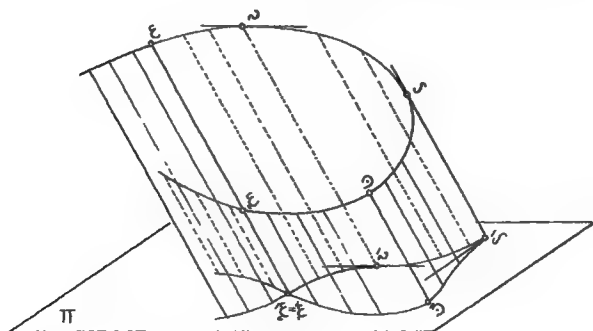
بشرط أن لا يكون مركز الإسقاط — سواء كان على بعد نهائى فى حالة الإسقاط المركزى أو لا نهائى فى حالة الإسقاط المتوازى — إحدى نقط المنحنى . أما إذا أسقطنا منحنيًا فراغيا من الدرجة ∞ من إحدى نقطه على مستوي Π فإن المسقط يكون منحنيًا مستويًا من الدرجة $(\infty - 1)$ مثال ذلك إذا كان للمنحنى الفراغى من الدرجة الثالثة وأسقطناه من إحدى نقطه على Π فإن المسقط يكون منحنيًا مستويًا من الدرجة الثانية أى مقطعًا مخروطيًا .

وذلك لأن أى مستقيم واقع فى المستوى Π يمثل مستويًا ماراً بمركز الإسقاط وبذا يكون عدد نقط تقاطع هذا المستقيم مع مسقط المنحنى مساويًا لعدد نقط تقاطع المستوى مع المنحنى الفراغى نفسه . هذا فى الحالة الأولى أما فى الحالة الثانية فلما كان أى مستوى مار بمركز الإسقاط التى هى إحدى نقط المنحنى الفراغى من الدرجة ∞ يقطعه فى $(\infty - 1)$ من النقط زيادة على تلك النقطة فإن أثر هذا المستوى على المستوى Π وهو خط مستقيم يقطع مسقط المنحنى فى $(\infty - 1)$ من النقط أى أن هذا المسقط هو منحنى مستوي من الدرجة $(\infty - 1)$ ^(١) .

ويبين (شكل ٤٥) بعض الاحتمالات الممكنة عند إسقاط منحنى فراغى إسقاطاً متوازياً على مستوي مثل Π وهى صحيحة أيضاً فى حالة الإسقاط المركزى . فالعقدة $ع_1 = ع'_1$ هى « عقدة ظاهرية » فى المسقط سببها أن الشعاع المار بها موازياً لاتجاه الإسقاط (أو بتعبير أعم ماراً بالمركز فى حالة الإسقاط المركزى) قطع بالصدفة المنحنى الفراغى فى نقطتين $ع_1 ع'_1$.

(١) يلاحظ أن البرهان فى الحالة الثانية مبنى على فكرة أساسية هى عدم إمكان تحديد مسقط معين لمركز الإسقاط فى المستوى Π بحيث أن هذه النقطة الفريدة فى الفراغ لا يمكن تعيين نقطة مناظره لها فى المستوى المذكور .

وإذا فرضنا أن المستوى للملاصق عند النقطة u على المنحنى الفراغى يوازى اتجاه الإسقاط (أو يمر بمركز الإسقاط) فإن أثره على المستوى Π لابد أن يمر بالمسقط u' مشتركاً معه فى ثلاث نقط متتالية وعابراً له عند u' وهذا لا يكون إلا إذا كان الأثر مماساً انقلاب . فالنقطة u' هى فى هذه الحالة إذن نقطة انقلاب . وإذا كان مماس المنحنى الفراغى فى نقطة مثل r يوازى اتجاه الإسقاط (أو يمر بمركز الإسقاط) فإن مسقطه على Π يؤول الى نقطة واحدة هى r' فإذا تتبعنا مساقط عدة نقط على المنحنى قبل وبعد r وجدنا أن r' لابد أن تكون نقطة رجوع . ويتقاطع المستوى للمستوى الملاصق للمنحنى فى r مع المستوى Π فى هذه الحالة فى المماس المزدوج للمسقط عند r' .



(شكل ٤٥)

يرى مما تقدم أنه إذا كانت u نقطة عادية على منحنى فراغى وكان $N_{u,v}$ المماس والمستوى الملاصق للمنحنى عند هذه النقطة وكانت u' مسقط u على Π من مركز الإسقاط m الذى يجوز أن يكون على بعد نهائى فى حالة الإسقاط المركزى أو لا نهائى فى حالة الإسقاط المتوازى—فانه يمكن التفرقة دائماً بين الاحتمالات الآتية:—

(١) إما أن تكون M خارج المستوى N وفي هذه الحالة تكون ρ نقطة عادية أيضاً.

(ب) وإما أن تكون M واقعة في المستوى N ولكنها ليست واقعة على v وفي هذه الحالة تكون ρ نقطة انقلاب.

(ج) وأخيراً يجوز أن تكون M واقعة على v ففي هذه الحالة تكون ρ نقطة رجوع.

المعروفة التي تربط نصف قطر الانحناء ρ عند إحدى نقطه بنظيره للسطح العمودي للمنهني عند مسقط النقطة:

إذا كان ρ نصف قطر الانحناء لمنحنى (فراغى أو مستو) عند إحدى نقطه وكان ρ' نصف قطر الانحناء لمسقط المنحنى العمودى عند مسقط النقطة ورمزنا إلى زاويتى ميل المماس والمستوى المماسق للمنحنى عند النقطة على مستوى الإسقاط بالرمزين α و α' على التوالى فإن

$$\rho' = \rho \times \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

وهذه هي العلاقة المعروفة باسم قانون بلافيثس (١).

وللبرهنة عليها نقرض في (شكل ٤٦) أن المماسين المتتاليين للمنحنى عند النقطة ρ وهما ρ_1 و ρ_2 يحصران بينهما زاوية صغيرة مقدارها φ وأن مسقطيهما العموديين ρ'_1 و ρ'_2 على المستوى Π يحصران بينهما زاوية مقدارها φ' وأن ρ هو طول الجزء الصغير من المنحنى المحدود بالنقطة ρ والنقطة التالية لها ρ' هو طول المسقط العمودى لهذا الجزء فيكون

$$\rho' = \rho \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}$$

ولكن $\rho' = \rho \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}$ جتا α (١)

وبما أن مساحة المثلث $ه' ا' ب'$ تساوى مساحة المثلث $ه ا ب$ مضروبة في جتا ω لأن الاول منها هو المسقط العمودى للثاني ولما كان $ه ب = ه' ب'$ تقريبا $ه' ب' = ه ب$ تقريبا وكان $ه' ا' = ه ا$ جتا α فان

$$\omega (ه' ا' جا \varphi) = (ه ا جا \varphi) \text{ جتا } \omega$$

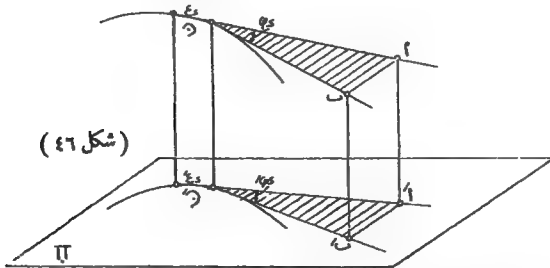
ولكن $ه ا جا \varphi = ه' ا' جا \varphi$ تقريبا

$$\omega (ه' ا' جا \varphi) = ه ا جا \varphi \cdot \omega \text{ جتا } \omega$$

$$(٢) \dots\dots\dots \frac{\omega \text{ جتا } \omega}{\alpha \text{ جتا } \alpha} = ه' ا' \dots\dots\dots$$

وبقسمة المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن

$$ه' ا' = ه ا \times \frac{\alpha \text{ جتا } \alpha}{\omega \text{ جتا } \omega} \text{ وهو المطلوب.}$$



(شكل ٤٦)

وتطبيق هذا القانون على النقطتين $ه' ا'$ و $ه ا$ في (شكل ٤٥) اذا افترضنا الاسقاط عموديا نجد أن :

$$ه' ا' = ه ا \cdot \frac{\alpha \text{ جتا } \alpha}{\omega \text{ جتا } \omega} \text{ (لأن } \omega = ٩٠^\circ \text{ في هذه الحالة)}$$

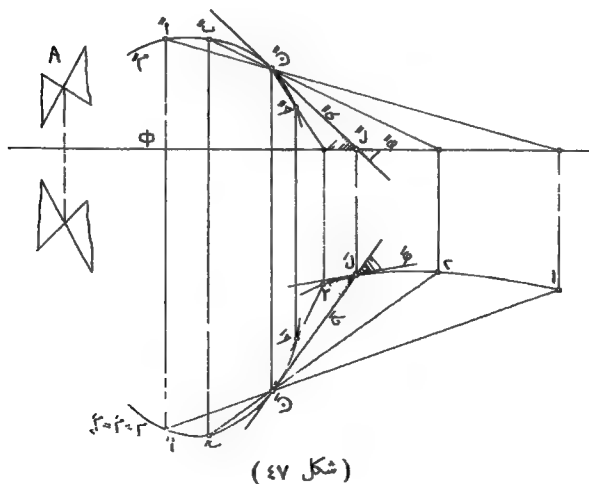
$$\infty =$$

ومعنى هذا أن $ه'$ نقطة انقلاب كما قدمنا .

بشر ٤٠ : تعيين المستوى المماس ونصف قطر الانحناء

المستوى المماس عند نقطة على منحنٍ يحتوى المماس للنحنى فى النقطة فاذا أمكننا إيجاد مستقيم ثان واقع فيه تعيين المستوى .

لتفرض فى (شكل ٤٧) أن M منحنٍ فراغى معلوم بمسقطيه الاقصى والرأسى $M' M''$ فلايجاد المستوى المماس له فى إحدى نقطه ϕ نختار عدة نقط ϕ قريبة من ϕ على المنحنى مثل $\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots$ ونصل ϕ بـ $\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots$ ثم نجد نقط تقاطع هذه المستقيمت مع أى مستواقصى Φ وهى النقط $\phi_1' \phi_2' \phi_3' \dots$ فى المسقط الاقصى . فاذا كان المماس σ للمنحنى M فى ϕ يقابل المستوى Φ فى



ل فان المستقيمت لـ $\phi_1' \phi_2' \phi_3' \dots$ هى آثار المستويات المارة بالمماس σ والنقط $\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots$ على المستوى Φ . والوضع النهائى لهذه المستويات عند ما تقترب

النقطة ١ من ρ هو كما قدمنا المستوى الملاصق للمنحنى في ρ . ولكن في هذه الحالة تقرب أيضا النقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ من ρ وتوول الاوتار ل' ١ ل' ٢ ل' ٣ ل' ٤ ل' ٥ ل' ٦ ل' ٧ ل' ٨ ل' ٩ ل' ١٠ الى المماس ρ للمنحنى ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ في النقطة ل' ويكون المستقيم ρ هو أثر المستوى الملاصق المطلوب على المستوى الاقوى ρ . وبواسطة المستقيمين ρ α ρ المتقاطعين في ل' يتعين المستوى الملاصق في ρ .

ولما كان المستوى الملاصق يشترك مع المنحنى م كما قدمنا في ثلاث نقط متتالية فاذا أسقطنا هذا المنحنى على المستوى الملاصق له في إحدى نقطه ρ ورمزنا الى المسقط بالرمز م، فإن م يكون منحنيًا مستويًا مارًا بهذه النقط الثلاث المتتالية والمتحدة في النقطة ρ . وينشأ عن اتحاد المنحنيين م ρ م في ثلاث نقط متتالية عند ρ تساوي نصفى قطرى الانحناء لها عند هذه النقطة ولما كانت دائرة الانحناء للمنحنى الفراغى م واقعة في المستوى الملاصق (بند ٣٧) كانت هذه البائرة هي نفس دائرة الانحناء للمنحنى المستوى م عند ρ .

ولتطبيق هذه الطريقة في (شكل ٤٧) أسقطنا المنحنى الفراغى م على المستوى الملاصق في ρ إسقاطًا عموديًا على المستوى الاقوى وبذا يكون المسقط الاقوى م' للمنحنى المستوى م، السالف الذكر منطبقًا على المسقط الاقوى م' للمنحنى الفراغى نفسه . وبمعلومية م' والمستوى الملاصق المرسوم فيه المنحنى يتعين م (بند ٣٤) . فاذا كان (١٢) هو الموقع للمنحنى م، الذى يمكن الحصول عليه بتطبيق المستوى الملاصق على أحد مستويى الاسقاط الرئيسيين (بند ١٧) وعينا في الموقع نصف قطر الانحناء للمنحنى (١٢) في النقطة (ρ) بالتقريب كما قدمنا في (بند ٣٦) كان هو نصف قطر الانحناء المطلوب للمنحنى الفراغى م في النقطة ρ . أما دائرة الانحناء نفسها فسقطها على كل من المستويين الاقوى والرأسى قطع ناقص يمكن رسمه بسهولة بواسطة الاتلاف (١) .

(١) يحسن بالتقريب رسم مسقطى البائرة بنفسه في (شكل ٤٧) .

بند ٤١: تعيين نقط تقاطع منحنى فراغى مع مستوى معلوم

هناك طريقتان لذلك :

الطريقة الاولى: نجد المسقط المساعد M'' للمنحنى M على مستوى مساعد للاسقاط II يكون عمودياً على المستوى المعلوم A . فاذا كان Q أثر المستوى A على II وقطع Q المسقط الجديد M'' للمنحنى في عدة نقط كانت هذه النقط هي المساطات المساعدة لنقط التقاطع المطلوبة.

الطريقة الثانية: نسقط المنحنى M على المستوى A فنحصل بذلك على منحنى مستو M' يتقاطع مع المنحنى الاصلى M في نقط التقاطع المطلوبة. (شكل ٤٧) أسقطنا المنحنى M على المستوى A في الاتجاه الرأسى وبذا يكون المسقط الاقصى M' للمنحنى المستوى M منطبقاً على المسقط الاقصى M' للمنحنى M . فاذا رسمنا المسقط الرأسى M'' للمنحنى M الذى أصبح متحدداً بمعلومية M' والمستوى A وذلك بتعيين المساطات الرأسية لنقطه المختلفة والمماسات فيها (بند ٧) فان M'' M' يتقاطعان عندئذ في المساطات الرأسية لنقط التقاطع المطلوبة.

الفصل الثالث

السطوح

بند ٤٢ : تعاريف

السطح هو مجموعة من النقط موزعة توزيعاً ذا بعدين . ومعنى هذا أننا إذا أخذنا جزءاً صغيراً من سطح ما محتوي على نقطة معينة ρ فإنه يمكن دائماً تعيين اتجاهين اثنين مستقلين (متعامدين) على السطح والكلام عن علاقة النقط المجاورة للنقطة ρ بالنقطة ρ ذاتها في هذين الاتجاهين المستقلين .

والذي يتميز به السطح من حيث أنه سطح هو هذا العدد «٢» للاتجاهات المستقلة في مجموعة النقط المحيطة بنقطة واقعة عليه كما يتميز الخط بالعدد «١» إذ في هذه الحالة يوجد اتجاه واحد لتوزيع النقط المتولفة له (يعتبر الاتجاهان المتضادان اتجاهاً واحداً أحدهما موجب والآخر سالب) وكما يتميز الفضاء ذو الابعاد الثلاثة بالعدد «٣» لوجود ثلاثة اتجاهات مستقلة فيه ^(١) .

وتقسم السطوح على وجه العموم الى قانونية وهي التي تتوزع نقطها طبقاً لقانون معين ينص عليه وغير قانونية وهي التي لا يتوافر فيها هذا الشرط مثل السطوح الطبوغرافية (أنظر الباب التاسع) .

وتحدد السطح القانوني في كثير من الحالات بأنه متولد من شيء معين مركزه P يسمى الراس ويمحور أن يكون منحنيًا أو مستقيماً — بطريقة معينة كأن يرتكز أو يتكئ أثناء حركته على منحنيات ثابتة يسمى كل منها بالربيل ^(٢)

(١) فتلافي وصف العلاقة بين النقط المختلفة المحيطة بنقطة واقعة على جزء صغير من سطح الكرة الارضية يمكن الكلام عن شرق (وغرب) وشمال (وجنوب) . أما إذا رسمنا خطاً من خطوط الطول فلا يمكن الكلام حينئذ الا عن شمال (وجنوب) .

(٢) يمكن اعتبار السطح غير القانوني بالمثل متولداً عن حركة منحرف راسه متحركاً أثناءها على أدلة ثابتة غير أن عدد هذه الأدلة يكون في هذه الحالة لا نهائياً .

ففى حالة المخروط الدائرى مثلاً يمكن تصور تولد السطح عن حركة مستقيم راسم متحركاً على مقطع مخروطى ثابت وماراً بنقطة ثابتة فى الفضاء (رأس المخروط). وفى حالة السطح الاسطوانى يتصور التولد عن حركة مستقيم مواز لاتجاه ثابت ومتحرك أثناء الحركة على منحني معين (مستوى أو فراغى) هو دليل السطح. وغنى عن البيان أن السطح الواحد يمكن أن يتولد بطرق كثيرة مختلفة فمن هذه الطرق تصور التولد عن حركة منحني متغير الشكل كأن يتصور بناء المخروط الدائرى من مقاطعه المختلفة الموازية لمستوى ثابت فتعتبر هذه المقاطع أوضاعاً مختلفة لمقطع مخروطى متغير الشكل يطلق عليه أيضاً اسم الراسم وفى هذه الحالة تكون الأدلة خمسة مستقيمت مارة برأس المخروط وواقعة على السطح (لأن المقطع المخروطى يتعين بخمس نقط).

بدر ٤٣ : المماسات والمستويات المماسية

إذا تصورنا ثلاث نقط ρ ١ ٢ ٣ ب على سطح معلوم فإن المستوى ρ ١ ٢ ٣ فى وضعه النهائى عند ما تقترب كل من ρ ١ ٢ — ويكون هذا الاقتراب بتحريكها على السطح — من النقطة ρ يسمى المستوى المماس للسطح عند ρ . فإذا كان هذا المستوى معيناً بالنقطة ρ وحدها وغير متوقف على ρ (أى إذا كان الوضع النهائى للمستوى ρ ١ ٢ هو نفسه الوضع النهائى للمستوى ρ ١ ٣، حيث ρ ١ ٣ نقطتان غير ρ ١ ٢) سميت النقطة ρ نقطة «عادية» على السطح وأمكن رسم مستو واحد مماس للسطح عندها. أما إذا لم يتوافر هذا الشرط قيل إن النقطة ρ نقطة «مائلة» وأمكن عندئذ رسم أكثر من مستو واحد مماس للسطح عندها (قارن بندى ٣١ و ٣٢ فيما يتعلق بالمنحنيات).

وكذلك مستقيم مرسوم فى المستوى المماس ماراً بالنقطة ρ يسمى مماساً للسطح فى ρ .

ويمكن اعتباره الوضع النهائي للمستقيم القاطع الذى يصل \odot بأية نقطة أخرى على السطح مثل ١ عندما تقرب ١ - راسمة بذلك منحنيًا حيثما اتفق على السطح - من النقطة \odot . وإذا رسمنا أى مستو آخر مار بالنقطة \odot فإنه يقطع السطح فى منحن ويقطع المستوى المماس فى مستقيم هو مماس للسطح ومماس فى الوقت نفسه للمنحنى . ومعنى ذلك أن المماس لآى منحن واقع على السطح ومار بالنقطة \odot - فى النقطة \odot ذاتها هو مماس للسطح ويقع فى المستوى المماس عند النقطة \odot الذى هو لذلك المحل الهندسى لجميع مماسات السطح فى \odot .

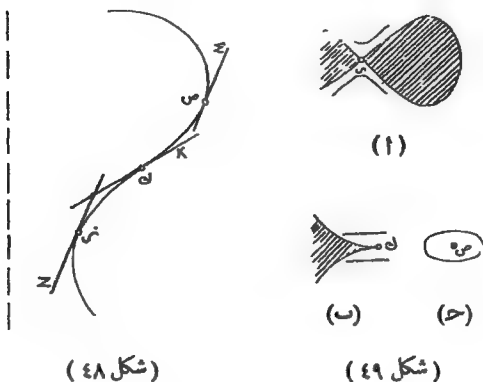
ويسمى المستقيم المار بالنقطة \odot عمودياً على المستوى المماس فيها بعمودى السطح فى النقطة \odot .

وإذا تقاطع المستوى المماس مع السطح فى منحن فإنه يتضح بمراجعة (بند ٣٢) أنه نقطة التماس لا بد أنه تكونه نقطة مزدوجة على منحنى التقاطع وأنه يمكن على وجه العموم رسم مماسين عندها لمنحنى التقاطع يطلق عليهما اسم المماسين الرئيسيين للسطح عند نقطة التماس^(١) . ويوضح (شكل ٤٨ و ٤٩) طريقة حدوث ذلك لسطح دورانى معلوم فى (شكل ٤٨) بالمحور والمنحنى الراسم من \odot - فى الاحوال الرئيسية الثلاثة وهى :-

(١) المماس الزاوية ويمكن الحصول عليها عندما يكون المستوى المماس قاطعاً للسطح فى منحن حقيقى كما هو الحال عند النقطة الزاوية \odot - فى (شكل ٤٨) .

(١) لان كل مستقيم فى المستوى المماس باعتباره مماساً للسطح فى نقطة التماس ومشاركاً معه فى نقطتين متجاورتين يشترك كذلك مع منحنى التقاطع فى نقطتين متجاورتين متحدين فى نقطة التماس وهذا لا يحدث إلا اذا كانت نقطة التماس نقطة مزدوجة على منحنى التقاطع . ويشترك المماسان لهذا المنحنى فى نقطة التماس مع المنحنى وبالتالي مع السطح فى ثلاث نقط متجاورة ولذا أطلق عليها اسم المماسين الرئيسيين .

ففى هذه الحالة يكون مقطع السطح بمستوى Z , قريب من المستوى المماس Z وموازي له هو بالتقريب قطع زائد^(١) (شكل ٤٩) يؤول فرعاه فى حالة التماس الى فرعين متقاطعين فى نقطة التماس نر أى أن نر تكون فى هذه الحالة نقطة معقودة على منحنى تقاطع السطح مع المستوى المماس فيها Z .



(شكل ٤٨)

(شكل ٤٩)

(٢) الطارة المماسية ويمكن الحصول عليها عندما يكون المستوى المماس عابراً للسطح كما هو الحال عند النقطة المماسية K فى (شكل ٤٨) . ففى هذه الحالة يكون

(١) اذا كان M مستويا مماسا فى نقطة عادية على سطح ما وكان M مستويا موازيا له وقريبا منه فان منحنى تقاطع السطح مع M يمكن اعتباره منحنيًا من الدرجة الثانية (قطع ناقص أو مكافئ أو زائد) اذا أهملنا المقادير المتناهية فى الصغر التى من درجة أعلا من الدرجة الثانية . وتعرف هذه النظرية باسم نظرية دوبان Ch. Dupin ويمكن البردة u, v بواسطة الهندسة التفاضلية .

مقطع السطح بمستوى K قريب من المستوى المماس K وموازيه — قلنا مكافئاً ينحل إلى مستقيمين متوازيين (شكل ٤٩ ب) متباثلين بالنسبة إلى نقطة تؤول في حالة التماس إلى نقطة مجموع K على منحنى تقاطع السطح مع المستوى المماس K . فجميع نقط الدائرة التي ترسمها نقطة الانقلاب على المنحنى الراسم أثناء دورانه حول المحور — هي نقط مكافئة. ويؤخذ من ذلك أنه في حالة النقطة المكافئة K لا يمكن رسم سوى مماس رئيسي واحد للسطح ماراً بها (هو مماس منحنى التقاطع في K).

(٣) الحالة الناقصة ويمكن الحصول عليها عند ما يكون السطح في المنطقة المجاورة لنقطة التماس موجوداً في جهة واحدة بالنسبة للمستوى المماس كما هو الحال عند النقطة $ص$ في (شكل ٤٨) حيث المستوى المماس فيها Σ لا يقطع السطح (في منحن حقيقي). ففي هذه الحالة يكون المقطع بمستوى Σ قريب من المستوى المماس Σ وموازيه — قطعاً ناقصاً (شكل ٤٩ ج) وكلما اقترب Σ من Σ صغر هذا القطع الناقص ويؤول في النهاية إلى نقطة التماس نفسها التي يصح اعتبارها في هذه الحالة نقطة منفرجة على منحنى تقاطع السطح مع المستوى المماس فيها Σ . وينتج من ذلك أن المماسين الرئيسيين للسطح في نقطة ناقصة تخيلان أي أنه لا يمكن رسم مماسين رئيسيين حقيقيين لسطح في نقطة ناقصة عليه.

وقد يكون المستوى المماس مماساً للسطح عند نقطة عليه في اللانهاية كما هو الحال في السطح الزائدي الدوراني مثلاً (بند ١٠٥). ومثل هذا المستوى يطلق عليه عندئذ اسم المستوى التقريبي.

نستنتج مما تقدم النظريات الهامة الآتية: —

(١) تعيين المستوى المماس لسطح ما في أمره نقط يكفي معرفة أي اثنين من مماسات السطح في هذه النقطة. ويمكن الحصول على هذين المماسين باختيار

منحنيين مناسبين واقعين على السطح ومارين بالنقطة ثم رسم المماسين لهما في هذه النقطة . فإذا أمكن أن يمر بالنقطة مستقيم واقع بينهما على السطح فإن المستوى المماس للسطح عند هذه النقطة يحتوى هذا المستقيم .

(٢) إذا قطع مستو سطحاً ما في منحن فماس هذا المنحنى في إحدى نقطه هو خط تقاطع المستوى المماس للسطح فيها مع المستوى القاطع .

(٣) مماس منحنى تقاطع سطحين في إحدى نقطه هو خط تقاطع المستويين المماسين للسطحين في هذه النقطة .

(٤) إذا تماس سطحان في نقطة (أى إذا كان المستوى المماس عندها لكل من السطحين واحداً) فانه هذه النقطة تكونه نقطة مزدوجة على منحنى تقاطعهما .

بشر ٤٤ : تمثيل السطح — المحيط الحقيقي والمحيط الظاهري للسطح

إذا كان السطح غير قانونى فن الواضح أنه لا بد لتمثيله من معرفة اكبر عدد ممكن من نقطه وخطوطه (أنظر السطوح الطبوغرافية مثلاً) .

أما إذا كان السطح قانونياً — وهو المقصود بالبحث هنا — بحيث يمكن تصور تولده عن خط (منحن أو مستقيم) يتحرك بكيفية وشروط خاصة كما قدمنا فإن تمثيله بواسطة إسقاط نقطه وخطوطه على مستوى الإسقاط يكون عيباً إذ أن قانون الحركة وأحد أوضاع المنحنى الراسم يكفيان في هذه الحالة لتحديد السطح القانونى (أنظر مثلاً السطح الدورانى المين في شكل ٤٨) .

ويتحدد السطح كذلك إذا علمت مساقط عدة أوضاع من الراسم المتحرك . وهذه الاوضاع التى يمكن الحصول عليها بواسطة قانون الحركة المشار اليه في حالة السطح القانونى — والتى نفترض معرفتها على صورة خطوط بيانية معلومة في مستوى الإسقاط في حالة السطوح غير القانونية — من شأنها أن تساعد أيضاً على إظهار معلم السطح وتقريبه الى الذهن وذلك بواسطة رسم ما يسمى

بالمحيطات الظاهرية للسطح في المساطات المختلفة . وهذه المحيطات هي التي نريد تعريفها فيما يلي : —

إذا فرضنا في (شكل ٣١) أننا أبدلنا النقطة المضبوطة ل بنقطة بصر (عين أنسان) أو مركز إسقاط وأبدلنا الكرة بسطح منحني حيثما اتفق وأطلقنا على مخروط الضوء السالف الذكر اسم مخروط البصر فإن المنحنى الذي يتماس بطوله مخروط البصر والسطح وهو ما أسميناه سابقاً خط الظل يسمى في هذه الحالة بالمحيط الحقيقي للسطح بالنسبة لمركز الإسقاط أو نقطة البصر ل وهو يفصل بين الجزء المنظور من السطح المحتوى على جميع النقاط التي مثل ١ وبين الجزء غير المنظور الواقعة عليه جميع النقاط التي مثل ١ .

ويسمى منحنى تقاطع مخروط البصر مع أى مستو مثل II وهو المنحنى و في (شكل ٣١) الذي أطلقنا عليه سابقاً اسم الظل الظاهري — بالمحيط الظاهري للسطح على المستوى II بالنسبة لنقطة البصر ل . ويمكن تلخيص ما تقدم في التعريفين الآتيين : —

المحيط الحقيقي للسطح ما بالنسبة لمركز معين هو المحل الهندسي لجميع نقط السطح التي تكون فيها المستويات المماسية لمارة بهذا المركز ^(١) .

والمحيط الظاهري للسطح على مستو ما بالنسبة لمركز إسقاط معين ل هو المقط المركزي للمحيط الحقيقي للسطح من ل على المستوى .

ومن الواضح أن المحيطين الحقيقي والظاهري لسطح ما يتغيران بتغير مركز الإسقاط الذي يجوز أن يكون نقطة في اللانهاية وفي هذه الحالة يؤول الإسقاط المركزي الى إسقاط متوازي ويؤول مخروط البصر الى أسطوانة بصر . فإذا كان الإسقاط عمودياً على مستو ما مثل II فإنه يكفي عندئذ أن يقال « المحيط

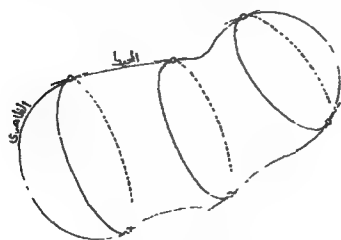
(١) كل مستو مار بمركز الإسقاط يسمى « مستوياً مسقطاً » .

الظاهرى للسطح على المستوى Π ، فيفهم من ذلك المحل الهندسى للسقاط العمودية لجميع نقط السطح التى تكون فيها المستويات المماسية عمودية على المستوى Π .

نظرية

إذا رسم منحنى μ على سطح ما وتقاطع هذا المنحنى مع المحيط الحقيقى للسطح بالنسبة الى مركز الإسقاط معين - فى نقطة مثل ω فانه المقيط μ لهذا المنحنى من مركز الإسقاط على مستو مثل Π بمس المحيط الظاهرى للسطح فى المقيط المركزى ω للنقطة ω .

للبهنة على هذه النظرية الهامة نفرض فى (شكل ٣١) أن μ منحن حيثما اتفق واقع على السطح وقاطع المحيط الحقيقى ω فى النقطة ω وأن μ هو المماس لهذا المنحنى فى النقطة ω فيكون المستوى المماس M للسطح عند النقطة ω ماراً بالمماس μ (بند ٤٣). ولما كانت ω إحدى نقط المحيط الحقيقى فإن المستوى M يمر بمركز الإسقاط L فهو إذن مستو مسقط بحيث يكون المسقط المركزى μ للمماس μ من L على المستوى Π - منطبقاً على أثر المستوى M على المستوى



(شكل ٥٠)

Π . ولما كان المستوى M هو فى نفس الوقت مستو مماس لخروط البصر المتقاطع مع Π فى المحيط الظاهرى ω ولما كان التماس بين السطح المخروطى والمستوى المماس له يكون كما هو معلوم بطول راسم تماس هو فى

(شكل ٣١) الراسم ω فى ω فيتبع من ذلك أن الأثر μ للمستوى M على Π الذى

يمس المسقط المركزي \tilde{M} للنحنى — يمس في الوقت ذاته المحيط الظاهري \tilde{S} في \tilde{D} أو بعبارة أخرى أن المنحنيين \tilde{M} و \tilde{S} متماسان في \tilde{D} .

ينتج من النظرية السابقة أن المحيط الظاهري لسطح معلوم بمساقط عدة أوضاع من المنحنى الراسم له هو المنحنى المغلف لهذه المساقط (شكل ٥٠) . وتكون نقط التماس بين المحيط الظاهري وهذه الأوضاع هي النقاط التي تفصل بين الأجزاء المنظورة وغير المنظورة .

بم ٤٥ : أنواع السطوح

(١) تقسيم السطوح الى جبرية وغير جبرية

إذا قطع كل مستقيم في الفراغ سطحاً قانونياً في \tilde{D} من النقطة (حقيقة كانت أو تخيلية) سمى هذا السطح سطحاً جبرياً من الدرجة n .^(١)

وإذا تصورنا السطح متولداً عند مستوي يتحرك في الفضاء بطريقة معينة مغلفاً للسطح بحيث يكون في جميع أوضاعه مستوياً مماساً له أمكننا تعريف السطح القانوني الجبري من الرتبة n بأنه السطح الذي يمكن إمرار n من المستويات المماس له (حقيقة أو تخيلية) بكل مستقيم في الفراغ .

أما السطح القانوني غير الجبري فهو ما كانت معادلته غير جبرية وليس هناك عدد معين ثابت لنقط تقاطعه مع أى مستقيم في الفراغ . ويمكن البرهنة على النظريات الآتية تحليلياً وهي : —

(١) إذا قطع مستقيم في الفراغ سطحاً جبرياً من الدرجة n في أكثر من n من النقط كان هذا المستقيم واقفاً بتمامه على السطح .

(١) معادلة السطح في هذه الحالة هي معادلة جبرية من الدرجة n .

(٢) خط تقاطع السطح الجبري ذي الدرجة n مع أى مستو هو منحن مستو من الدرجة n أيضا .

(٣) خط تقاطع سطحين جبريين أحدهما من الدرجة m والثاني من الدرجة n هو منحن فراغي من الدرجة $(m \times n)$.

(٤) أى منحن فراغي جبري من الدرجة n يقطع سطحاً جبرياً من الدرجة m في $(n \times m)$ من النقاط فإذا زاد عدد النقاط المشتركة عن هذا العدد كان جزء من المنحنى أو المنحنى كله واقعاً على السطح .

(٥) ثلاثة سطوح جبرية من الدرجات m, n, p تقاطع في $(m \times n \times p)$ من النقاط .

والمستوى هو السطح الوحيد ذو الدرجة الاولى .

وأهم السطوح الجبرية هي سطوح الدرجة الثانية مثل الكرة والمخروط والاسطوانة (إذا كان دليل كل منها منحنياً من الدرجة الثانية) والسطح الناقصي والزائد والمكافئ . ويكون خط تقاطع أى واحد من هذه السطوح مع مستو منحنياً من الدرجة الثانية أى مقطعاً مخروطياً على وجه العموم ^(١) . ويكون خط تقاطع أى اثنين منها منحنياً من الدرجة الرابعة .

(ب) تقسيم السطوح على حسب نوع الراسم

تقسم السطوح على هذا الاساس الى مسطرة وغير مسطرة .

فالسطح المسطر هو السطح الذى يمكن أنه يمر بكل نقطة من نقطة مستقيم واحد على الاقل يكونه واقعاً بتمامه على السطح .

ويمكن لذلك تصور تولد السطح المسطر عن حركة مستقيم ما بطريقة معينة

(١) اذا مر المستوى القاطع برأس المخروط مثلاً فإنه يقطعه في راسمين مستقيمين ويقال عندئذ إن المنحنى من الدرجة الثانية قد « انحل » الى هذين المستقيمين .

فالسطح المخروطى مثلاً يتولد كما قدمنا عن حركة مستقيم يمر بنقطة ثابتة متحركاً أثناء الحركة على دليل ثابت .

وتنقسم السطوح المسطرة الى سطوح قابلة للبسط أو الاستواء وهى التى يكون فيها أى وضعين متتاليين من أوضاع المستقيم الراسم متقاطعين بحيث يمحصران بينهما عنصراً مستوياً يمكن تطبيقه على العنصر المستوى المجاور له حول راسم تقاطعها وهكذا الى أن يتم بسط السطح على مستو واحد (١) .

وأما اذا كان أى وضعين متتاليين من أوضاع الراسم غير متقاطعين كان السطح غير قابل للبسط وسمى سطحاً أعرجاً أو معرجاً مثال ذلك السطح المتولد عن حركة مستقيم بحيث يوازى على الدوام مستوياً ثابتاً معلوماً ويقطع مستقيمين ثابتين غير متقاطعين (السطح المكافئ الزائدى) فان أى وضعين متتاليين للراسم فى هذه الحالة لا يمكن أن يتقاطعا والا كان المستقيمان الثابتان موجودين فى مستو واحد وهو ما يخالف الفرض .

(ح) تقسيم السطوح الى دورانية ولولبية

يسمى سطحاً دورانياً ما أمكن تولده عن دوران منحن معين مستو (ثابت الهيئة) حول مستقيم ثابت فى مستويه يسمى محور الدوران مثل الكرة والمخروط الدورانى .

والسطح المتولد عن دوران منحن فراغى حول محور ثابت هو أيضاً سطح دورانى لانه يمكن تولده عن حركة دوران منحنى تقاطعه مع أى مستو مار بالمحور المعلوم .

(١) السطحان المخروطى والاسطوانى هما حالتان خاصتان من السطوح المسطرة القابلة للبسط حيث تتقاطع جميع الرواسم فى نقطة واحدة على بعد نهائى أولاً نهائى على التوالى .

ويسمى سطحاً لولبياً ما أمكن تولده عن حركة منحني معين ثابت الهيئة حركة لولبية حول محور ثابت أي حركة دوران حول المحور مصحوبة بحركة انتقال في اتجاهه بحيث تكون النسبة بين السرعة الزاوية للحركة الدورانية والسرعة الخطية للحركة الانتقالية تساوى مقداراً ثابتاً .

الباب الثالث

منحنيات الدرجة الثانية

أو

المقاطع المخروطية

الفصل الاول

القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ

بعض خواصها الرئيسية

بند ٤٦ : كلمة عامة

نذكر في هذا الفصل بعض الخواص الرئيسية للمقاطع المخروطية التي يمكن استنتاجها من تعاريفها الأساسية باعتبارها منحنيات مستوية وبدون إشارة إلى المخروط أي باعتبارها مسارات نقطة أو غلافات خط مستقيم يتحرك كل منها في المستوى على حسب قانون معلوم (بند ٣١) .

ولما كانت الخواص المذكورة هنا تعتبر من المبادئ الأولية البسيطة التي يجوز أن نفترض في القارئ الإلمام بها فقد رأينا سردها باختصار مقتصرين على ذكر ماله صلة خاصة باغراض الكتاب . أما التوسع في دراسة هذه المنحنيات على الأساس السابق فيرجع فيها القارئ إلى الكتب المؤلفة خصيصاً لهذا الغرض .

بند ٤٧ : القطع الناقص

(١) تعريف

يمكن تعريف القطع الناقص بأنه المحل الهندسي لنقطة تترك في مستوى بحيث

يكوره مجموع بصريها عن نقطتين ثابتتين في المستوى مساوياً على الدوام مقررًا ثابتاً .
وهذا لمقدار الثابت يساوى ١ ٢ أى طول المحور الاكبر. وتسمى النقطتان
الثابتتان بالبؤرتين كما يسمى المستقيم الذى يصل أية نقطة من نقط المنحنى باحدى
البؤرتين بالبصر البؤرى .

(ب) كيفية رسم القطع الناقص — بعض الخواص

لرسم القطع الناقص اذا علمت بؤرتاه والمقدار الثابت ١ ٢ عدة طرق ولكننا
سنقتصر هنا على ذكر الطريقة المباشرة مع ذكر بعض الخواص المهمة التى يمكن
استخلاصها منها :

نأخذ أية نقطة مثل ع على مستقيم ما طوله س ص = ١ ٢ (شكل ٥١) ثم
نركز فى البؤرتين ب ١ ب ٢ وبفتحتين تساويان ص ع ٢ ص ع ١ على التوالي
نرسم قوسى دائرتين يتقاطعان فى ه ١ ه ٢ فتكونان نقطتين على المنحنى لأن مجموع
البعدين البؤريين لكل منهما يساوى ١ ٢ على حسب العمل . واذا عكسنا
الطريقة السابقة بدون أن نغير فتحتى البرجل وذلك بأن نجعل ب ١ ب ٢
مركزين لقوسى دائرتين نصف قطرهما س ع ٢ ص ع ١ على التوالي (بدلا من
ص ع ٢ ص ع ١) حصلنا على نقطتين جديدتين ل ١ ل ٢ وهكذا بتكرار هذه العملية
مع تغيير فتحات البرجل نحصل فى كل مرة على أربع نقط على المنحنى .

نستنتج من هذه الطريقة : —

اولا : أن القطع الناقص منحنى مقفل منته فى اتجاه المحور الاكبر والاتجاه
العمودى عليه بالنقط ح ١ ح ٢ ١ ح ٢ التى يطلق عليها اسم رؤوس القطع .
ثانياً : أن القطع الناقص متماثل عمودياً بالنسبة للمحور الاكبر ح ١ ح ٢ كما أنه
متماثل بالنسبة للمستقيم ١ ح ٢ وعمودى على ح ١ ح ٢ والثى يطلق عليه اسم المحور
الوصلى . وذلك لأن النقط الاربعة ل ١ ل ٢ ه ١ ه ٢ التى يمكن الحصول عليها فى

(ح) مماس القطع الناقص في إحدى نقطته

نظرية :

مماس القطع الناقص وعموده في إحدى نقطته ينصف الزاوية الخارجة والداخلية المحصورة بين البعدين البؤريين للنقطة .

لبرهنة على هذه النظرية برهاناً أولياً تفرض في (شكل ٥١) أن المستقيم $هـ ط$ ينصف الزاوية الخارجة بين البعدين البؤريين للنقطة $هـ$ ثم نبرهن على أن هذا المستقيم ممس القطع الناقص في $هـ$. لذلك نسقط من إحدى البؤرتين $ب$ وتكون $ب$ عموداً على $هـ ط$ ليقابله في $ب$ ويقابل امتداد $ب هـ$ في $ب$ ونستخرج من تطابق المثلثين $ب هـ ب$ $ب هـ ب$ $ب هـ ب$ أن $ب هـ ب = ب هـ ب$ وأن $ب هـ ب = ب هـ ب$ أي أن $ب هـ ب$ هي النقطة المحيطة للبؤرة بالنسبة إلى $هـ ط$ وأن $ب هـ ب = ب هـ ب = ١٢$ طول المحور الأكبر .

فاذا أخذنا أية نقطة غير $هـ$ مثل $ط$ على المستقيم $هـ ط$ فن الواضح أنه لما كان $ب هـ ب = ب هـ ب$ فإن

$$ط ب + ط ب = ط ب + ط ب < ب هـ ب < ١٢$$

وهذا صحيح بالنسبة لجميع نقاط المستقيم $هـ ط$ ما عدا النقطة $هـ$ نفسها الواقعة على القطع الناقص .

يتضح من ذلك أن المستقيم $هـ ط$ لا بد أن يكون مماساً للقطع الناقص في $هـ$ كما يتضح أن عمودى القطع الناقص في $هـ$ وهو عمودى على المماس الذى ينصف الزاوية الخارجة بين البعدين البؤريين — ينصف الزاوية الداخلة بينهما .

(٥) الدائرة المساعدة ودائرتا البورتين

أولاً : الدائرة المساعدة

بما أن $م ب$ يوازي $ب ي$ ويساوي نصفه (شكل ٥١)

وبما أن $ب ي = ٢ ا'$

∴ $م ب = ا' =$ نصف المحور الاكبر = مقداراً ثابتاً

وبالمثل اذا انزلنا من $ب$ العمود $ب ب'$ على المماس ليقابله في $ب'$ فانه يمكن البرهنة على أن $م ب' = ا' =$ مقداراً ثابتاً .

ينتج من ذلك أن النقطتين $ب ب'$ واقعتان على دائرة مركزها $م$ ونصف قطرها يساوي نصف المحور الاكبر $ا'$. وتسمى هذه الدائرة بالدائرة المساعدة أو الدائرة اوصلية .

ولما كان هذا حقيقياً لكل مماس آخر للقطع الناقص فانه يمكننا أن نقرر :

تقطع مماسات القطع الناقص مع الاعمدة الثلاثة عليها من البورتين تجمع جميعاً على الدائرة المساعدة .

ثانياً : دائرتا البورتين

بما أن $ب ي = ٢ ا' =$ مقداراً ثابتاً

وبما أن هذا صحيح بالنسبة لأي مماس آخر للقطع الناقص فينتج أن :

المحل الهندسي للنقطة $ي$ التي تماس البؤرة $ب$ بالنسبة لأي مماس للقطع الناقص هو دائرة مركزها البؤرة الثانية $ب$ ونصف قطرها يساوي طول المحور الاكبر $٢ ا'$. وبالمثل تجمع النقط $ي$ المماسات للبؤرة $ب$ بالنسبة لجميع مماسات القطع الناقص على دائرة ثانية مركزها $ب$ ونصف قطرها $٢ ا'$.

ويطلق على كل واحدة من هاتين الدائرتين اسم دائرة البورتين^(١) . فيقال « دائرة البورتين ب » ، ويقصد بذلك الدائرة التي مركزها ب ، وتقع عليها جميع النقط المماثلة الى ب ، بالنسبة الى مماسات القطع الناقص . ويقال مثل ذلك عن « دائرة البورتين ب » .

ملحوظة :

بما أن $ط ب = ط ب$ وهذا صحيح بالنسبة لجميع نقط المماس فينتج من ذلك أننا إذا ركزنا في أية نقطة على أحد مماسات القطع الناقص ورسمنا دائرة تمر بأحدى البورتين فإن هذه الدائرة تمر بالنقطة المماثلة لهذه البورة بالنسبة للمماس .

(هـ) القطع الناقص معتبراً كغلاف مستقيم متحرك

لما كانت الدائرة المساعدة هي دائرة ثابتة وقد سبق البرهنة على أنها المحل الهندسي لنقط تلاقي مماسات القطع الناقص مع الاعمدة النازلة عليها من البورتين فينتج من ذلك ما يصح اعتباره تعريفاً جديداً للقطع الناقص وهو :

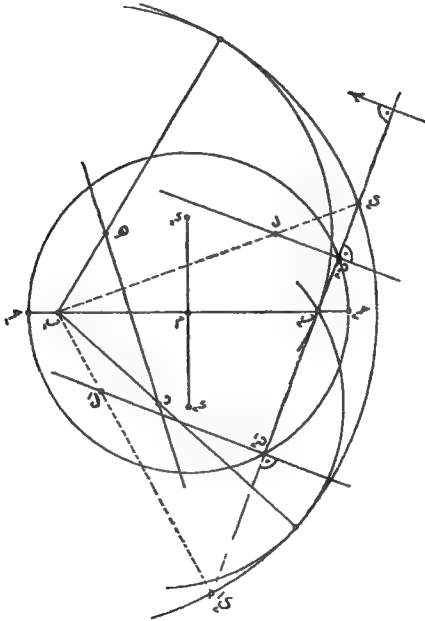
إذا تحركت زاوية قائمة في مستوى دائرة ثابتة مركزها م بحيث يكون رأسها واقعاً دائماً على الدائرة وأخر ضلعيها ماراً على الدوام بنقطة ثابتة موجودة داخل الدائرة وفي مستورها فانه الضلع الاخر يغلف قطعاً ناقصاً مركزه م وأحدى بؤرتيه النقطة الثابتة وطول محوره الاكبر يساوي قطر الدائرة .

(و) كيفية رسم مماسين لقطع ناقص معلوم من نقطة خارجة

يتعين المماسان المرسومان من النقطة الخارجة هـ (شكل ٥٢) إذا علمت النقطتان م_١ م_٢ المائلتان لأحدى البورتين (ولتكن ب_١) بالنسبة الى المماسين . فهاتان النقطتان واقعتان :

(١) وذلك لان كل واحدة من هاتين الدائرتين متعلقة بالبورتين معا فهي الدائرة التي مركزها إحدى البورتين والتي تمر بالنقط المماثلة للبورة الاخرى بالنسبة لجميع مماسات القطع الناقص .

نقطتي تقاطع دائرة البورتين التي مركزها $ب$ مع العمود النازل من $ب$ على الاتجاه المعلوم . ويكون المماسان هما العمودان $ب٢$ و $ب٣$ ل $ل'$ المقامان على



(شكل ٥٣)

$ب٢$ و $ب٣$ من منتصف $ب٢$ و $ب٣$ و منتصف $ب٢$ و $ب٣$. ويمكن الحصول على نقطتي التماس $ل٢$ و $ل٣$ كما تقدم .

(٢) نقطتا تقاطع مستقيم معلوم مع قطع ناقص

يتضح من (شكل ٥١) أنه إذا ركزنا في أية نقطة على القطع الناقص مثل

هو ورسمنا دائرة نصف قطرها يساوى h أى بعد h عن إحدى البؤرتين فإن هذه الدائرة تمس دائرة البؤرتين التى مركزها البؤرة الأخرى h وتكون نقطة تماس الدائرتين وهى النقطة m هى النقطة المائلة للبؤرة الاولى h بالنسبة الى تماس القطع الناقص فى h . من ذلك نستنتج النظرية الآتية التى يصح اعتبارها تعريفاً جديداً للقطع الناقص :

المحل الهندسى لمركز دائرة تسمى على الدوام من الدائرتين دائرة ثابتة مركزها h وتعم نقطة ثابتة h موجودة داخل هذه الدائرة هو قطع ناقص بؤرتاه h_1 و h_2 وتكون الدائرة الثابتة إحدى دائرتى البؤرتين لهذا القطع ونصف قطرها = طول المحور الأكبر $= 2a$.

فبناء على هذه النظرية تكون نقطتا تقاطع مستقيم مثل h و مع قطع ناقص معلوم (شكل ٥٢) هما مركزا الدائرتين اللتين تمران بأحدى البؤرتين h_1 و h_2 من الداخل دائرة البؤرتين التى مركزها البؤرة الأخرى h_2 (نقطتا التقاطع هما h_1 و h_2) وهذه عملية معروفة فى الهندسة المستوية وقد رأينا عدم رسمها فى الشكل منعاً لتزاحم المخطوط .

بند ٤٨ : القطع الزائد

(١) تعريف

يمكن تعريف القطع الزائد بأنه المحل الهندسى لنقطة تحرك فى المستوى بحيث يكونه الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين فى المستوى مساوياً على الدوام مقدراً ثابتاً .

وهذا المقدار الثابت يساوى $2a$ وهو طول المحور القاطع . وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين كما يسمى المستقيم الذى يصل أية نقطة من نقط القطع بأحدى البؤرتين بالبعد البؤرى .

الناقص حصلنا على نقطتين جديدتين M_1 و M_2 وهكذا كلما اخترنا نقطة جديدة على امتداد MS حصلنا على أربع نقط على المنحنى .

وبنتج مما تقدم :

أولاً : أن القطع الزائد بخلاف القطع الناقص يتكون من شعبتين منفصلتين متممات الى ما لا نهاية (وذلك لأن النقطة E السالفة الذكر يمكن اختيارها على امتداد MS بعيدة بعداً لا نهائياً) ويقال كما سنرى في الفصل الثانى انه المستقيم الذى فى النهاية « الواقع » فى مستوى القطع الزائد يقطع فى نقطتين حقيقيتين .
ثانياً : أن القطع الزائد متماثل مثل القطع الناقص بالنسبة الى محورين متعامدين أحدهما CH ويسمى بالمحور القاطع والآخر CV ويسمى بالمحور المرافق .

ثالثاً : أن القطع الزائد مثل القطع الناقص أيضاً متماثل بالنسبة للنقطة M التى يطلق عليها اسم مركز القطع الزائد .

رابعاً : اذا أخذنا البعدين $M_1M_2 = M_3M_4$ فى اتجاهين متضادين على المحور المرافق بحيث كان $M_1M_2 = M_3M_4 = M_5M_6 = M_7M_8$ فإن البعد M_1M_2 يسمى طول المحور المرافق . وتجب الإشارة الى أن M_5M_6 غير واقعتين على المنحنى ولو أنه يمكن البرهنة تحليلياً على أن النقطتين « التخيليتين » اللتين بعدهما $M_5M_6 = M_7M_8$ فى الاتجاهين المتضادين على المحور المرافق — واقعتان على المنحنى .
ويؤخذ من المعادلة السابقة أن المحور القاطع يصح أن يكون أكبر من أو مساوياً أو أصغر من المحور المرافق . وفى حالة التساوى يسمى القطع الزائد متساوى المحورين أو قائم (لأن الزاوية بين مستقيمية التقريين تكون فى هذه الحالة قائمة) .

(ح) مماس القطع الزائد في إحدى نقطه

نظرية : مماس القطع الزائد وعموديه في إحدى نقطه ينصفانه على التوالي الزاوية الراحلة والمخارجه المحصورة بين البعدين البؤريين للنقطة .
والبرهان على هذه النظرية يشبه تماماً نظيره في حالة القطع الناقص .

(و) الدائرة المساعدة ودائرتا البؤرتينأولاً : الدائرة المساعدة

المحل الهندسى لنقط يتوفى مماسات القطع الزائد مع الدائرة النازلة عليها من البؤرتين هو دائرة مركزها مركز القطع ونصف قطرها نصف المحور القاطع أ' (شكل ٥٤) . وتسمى هذه الدائرة بالدائرة المساعدة (راجع البرهان في حالة القطع الناقص)

ثانياً : دائرة البؤرتين

المحل الهندسى للنقطة يـ التي تمسك البؤرة بـ بالنسبة لـى مماس للقطع الزائد هو دائرة مركزها البؤرة الثانية ب' ونصف قطرها يساوى طول المحور القاطع أ' ٢ . وبالمثل جمع النقط يـ للمماسات للبؤرة ب' بالنسبة لجميع مماسات القطع الزائد على دائرة ثانية مركزها ب' ونصف قطرها أ' ٢ .
ويطلق على كل واحدة من هاتين الدائرتين اسم دائرة البؤرتين (راجع القطع الناقص) .

معمرك :

إذا ركزنا في أية نقطة على أحد مماسات القطع الزائد ورسمنا دائرة تمر بأحدى البؤرتين فإن هذه الدائرة تمر بالنقطة المائلة لهذه البؤرة بالنسبة للمماس (راجع القطع الناقص) .

(هـ) القطع الزائد معتبراً كخلاف مستقيم متحرك

بطريقة مشابهة لما سبق ذكره في حالة القطع الناقص نستطيع هنا أيضاً أن نقرر :

إذا تحركت زاوية قائمة في مستوى دائرة ثابتة مركزها $م$ (الدائرة المساعدة) بحيث يكون رأسها واقعاً دائماً على الدائرة وأحد ضلعها مماساً على الدوام بنقطة ثابتة موجودة خارج الدائرة وفي مستورها فانه الضلع الآخر يغلف قطعاً زائداً مركزه $م'$ وأحدى بؤرتيه النقطة الثابتة وطول محوره القاطع يساوى قطر الدائرة . وبالنظر الى أن المماس في $هـ$ (شكل ٥٤) عمودى على $بم$ من منتصفه وأن $م$ واقعة دائماً على دائرة البؤرتين التي مركزها $ب$ فالتا نستطيع أن نعطي القطع الزائد ما يمكن اعتباره تعريفاً جديداً كثيراً ما يستعمل لرسماً دقيقاً (١) :-

إذا فرضت دائرة ثابتة مركزها $ب$ في مستو وفرضت نقطة ثابتة $ب'$ خارجها في نفس المستوى ووصلت $ب$ بنقطة مثل $م$ موجودة على الدائرة وتحرك عليها فالمستقيم العمودى على $بم$ من منتصفه يغلف قطعاً زائداً بؤرتاه $ب$ و $ب'$ وطول محوره القاطع $بب'$ يساوى نصف قطر الدائرة التي هي إحدى دائرتي البؤرتين للنحنى وتكون نقطة التماس $ه$ لاي وضع من أوضاع المستقيم الذي يتحرك مغلفاً للقطع الزائد هي نقطة تقاطعه مع امتداد $بب'$.

(و) المستقيمان التقريبان

هما المماسان للقطع الزائد في قطبي تقاطعه مع المستقيم الننى في اللانهاية . ومن السهل الحصول عليها اذا طبقنا أحد التعريفين المذكورين في الفقرة السابقة وذلك باخذ الوضع النهائي للمماس عندما تصبح نقطة تماسه على بعد لانهاى . فاذا رسمنا من $ب$ مثلاً (شكل ٥٤) مماسين للدائرة المساعدة فانها يمسان

(١) أوجد التعريف المناظر في حالة القطع الناقص .

أيضاً دائرة البورتين التي مركزها ب_١ ويكون المستقيمان التقريبان هما المستقيمان اللذان يصلان المركز م بنقطتي التماس م_١ م_٢ مع الدائرة المساعدة .

ولما كان المثلثان م_١ م_٢ ب_١ م_٢ ح_١ م_٢ ح_٢ منطبقين فينتج أن م_١ م_٢ ح_١ م_٢ ح_٢ = م_١ م_٢ .
وإذن فللحصول على المستقيمين التقريبين بطريقة أبسط نركز في م وبفتحة تساوي م_١ م_٢ = م_١ م_٢ نرسم دائرة تقطع المماسين في الرأسين ح_١ م_١ ح_٢ م_٢ في النقطتين ط_١ م_١ ح_١ فيكون المستقيمان التقريبان هما م_١ ط_١ م_٢ ح_٢ .

$$\frac{م_١ م_٢}{م_١ م_٢} = م$$

حيث م هي الزاوية المحصورة بين كل من المستقيمين التقريبين والمحور القاطع.
(س) كيفيه رسم مماسين لقطع زائد من نقطة غير واقعة عليه .

تتبع طريقة العمل التي بناها سابقاً للقطع الناقص (بند ٤٧ س) مع ملاحظة ما يأتي : —

اولاً : أن النقطة المراد رسم المماسين منها يجب أن تقع بين الشعبتين وهذه المنطقة تسمى بالمنطقة الخارجة وإلا كان المماسان تخيليين وهذا الشرط يشبه اشتراط وجود النقطة خارج القطع الناقص لا مكان رسم مماسين حقيقيين منها له .

ثانياً : إذا كان المطلوب رسم مماسين موازيين لاتجاه معلوم ورسمنا من م موازياً لهذا الاتجاه فلا بد أن يقع هذا الموازي داخل الزاوية ك م_١ م_٢ (شكل ٥٤)
المحصورة بين المستقيمين التقريبين أى يجب أن تكون الزاوية الحادة التي يميل بها الاتجاه المعلوم على المحور القاطع اكبر من م . وإلا فإن العمود النازل على هذا الاتجاه من ب_١ مثلاً لا يقطع دائرة البورتين التي مركزها ب_١ (في نقط حقيقية) ويكون المماسان في هذه الحالة تخيليين ^(١) .

(١) أما في القطع الناقص فانه يمكن دائماً رسم مماسين حقيقيين له يوازيان اتجاهها معلوما .

(ج) نقط تقاطع خط مستقيم مع قطع زائد معلوم

النظرية الآتية صحيحة ويمكن البرهنة عليها كما تقدم في بند (٤٧ ج) :

المحل الهندسى لمركز دائرة تمس على الدوام من الخارج دائرة ثابتة مركزها ب_١ ونمير نقطة ثابتة ب_٢ موجودة خارج الدائرة وفي مسورها هو قطع زائد بورتاه ب_١ ب_٢ وتكون الدائرة الثابتة إحدى دائرتي لهذا القطع ونصف قطرها = طول المحور القاطع = ١٢ .

فبناء على هذه النظرية تكون نقطتا تقاطع مستقيم مع قطع زائد معلوم هما مركزا الدائرتين اللتين تمران بإحدى البورتين وتمسان من الخارج دائرة البورتين التي مركزها البورة الثانية .

بند ٤٩ : القطع المكافئ

(١) تعريف

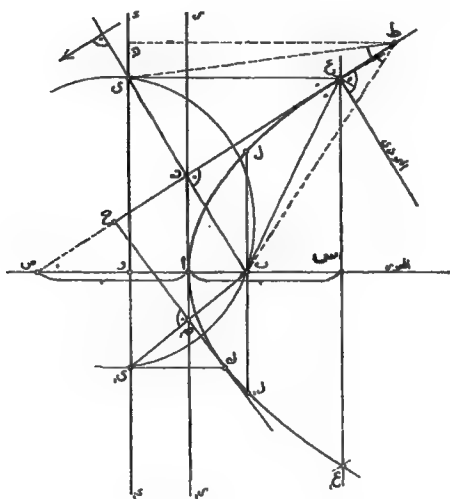
يمكن تعريف القطع المكافئ بأنه المحل الهندسى لنقطة تحرك في مسو بحيث يكونه بعدها عن نقطة ثابتة في المستوى مساويا على الدوام بعدها عن مستقيم ثابت . وتسمى النقطة الثابتة بالبورة ويسمى المستقيم الثابت بالريل كما يسمى المستقيم الذى يصل أية نقطة من قطع المنحنى بالبورة بالبعد البورى .

(ب) كيفية رسم القطع المكافئ — بعض الخواص

المعلوم البورة ب والدليل د ، فلرسم القطع المكافئ نسقط من ب عموداً على الدليل فيقطعه فى و فاذا نصفنا ب و فى ا كانت ا إحدى النقط وتسمى رأس القطع ويسمى المستقيم م م_١ المرسوم منها موازياً للدليل بالماس فى الرأس كما يسمى العمود النازل منها على الدليل محور القطع المكافئ .

فاذا أخذنا نقطة ما مثل م على المحور ورسمنا منها موازياً للدليل ثم ركزنا فى

ب وبفتح تساوى و س قطعنا هذا الموازى فى ع ٢ ع ٢ كانت ع ٢ ع ٢ تقطعين من تقطع المنحنى وبتكرار هذه العملية يمكننا أن نحصل على أى عدد من النقاط . ويطلق على المستقيم ل ل المار بالثورة عودياً على المحور (حيث ل ل ل) قطعنا تقاطعه مع المنحنى (اسم الوزن البربرى العمودى وهو يساوى كما يتضح من الشكل أربعة أمثال بعد الثورة عن الرأس .



(شکل ۵۵)

وینتج ما تقدم :

اولاً : لما كانت النقطة الاختيارية س في (شكل ٥٥) يصح أن تأخذ أى وضع على المحور الى يمين الرأس ويجوز أن تبعد عنه بعداً لا نهائياً فانقطع المقياس من غير محدود وعندئذ الى ما لا نهاية في الجهة المذكورة . ويقال انه المستقيم الذى

في النهاية الموهود في المستوي بمس وإن نقطة التماس التي يعبر عنها « باتجاه المحور هي النقطة الثانية لتقاطع المحور مع المنحنى .

ثانياً : أن القطع المكافئ متماثل بالنسبة الى مستقيم واحد هو المحور
ثالثاً : أن القطع المكافئ بخلاف القطعين الناقص والزائد ليس له مركز على بعد نهائي ولذا سمي القطع غير المركزي .

رابعاً : أن « أقطار » القطع المكافئ كلها موازية للمحور وذلك بخلاف الحال في القطعين الناقص والزائد فالقطر فيها هو المستقيم المار بالمركز .

(ح) مماس القطع المكافئ في إحدى نقطه

نظرية : مماس القطع المكافئ وعموده في إحدى نقطه ينصفاه على التوالي الزاوية المرافقة والظاهر المحصورة بين البعد البؤري للنقطة وبين القطر المار بها ^(١) .
البرهان على هذه النظرية يشبه نظيره في حالة القطع الناقص فلو رسم من ع (إحدى نقط المنحنى) المستقيم ع ص منصفاً للزاوية ب ع ي (شكل ٥٥) وأنزل من ب العمود ب ي على ع ص فقابل المستقيم المرسوم من ع موازياً للمحور في ي فن الواضح أن النقطة ي هي المائلة للبؤرة بالنسبة الى ع ص وأنها تقع على الدليل وأن ط ب لا يساوى ط د لاية نقطة مثل ط واقعة على ع ص ما عدا النقطة ع نفسها الواقعة على المنحنى . وينتج من ذلك أن ع ص هو مماس القطع المكافئ في ع .

ولما كان المثلثان ب ب ص م و ب ع ي منطبقين فينتج أن

$$ب ب ص = ب ع ي = و م$$

$$ب ب ص = ب ع ي = و م$$

أي أن

(١) أى المستقيم المرسوم منها موازياً للمحور ويسمى هذا المستقيم أحياناً « بالبعد البؤري الثاني » للنقطة لأنه يعتبر ماراً ببؤرة القطع المكافئ الثانية التي على بعد لانهاى .

وهذا يعطينا طريقة بسيطة جداً لرسم المماس في أية نقطة على القطع المكافئ.

(د) المماس في الرأس والدليل

يتضح من (شكل ٥٥) أن نقطة تقاطع المماس في ع مع العمود النازل عليه من البؤرة وهي النقطة د — واقعة على المماس في الرأس كما يتضح أن النقطة د المماثلة للبؤرة بالنسبة للمماس المذكور واقعة على الدليل . ولما كان هذا صحيحاً لكل مماس آخر للقطع المكافئ فينتج أن :

أولاً : المحل الهندسي لنقط تلاقي مماسات القطع المكافئ مع الاعمدة النازلة عليها من البؤرة هو المماس في الرأس .

ومعنى ذلك أن الدائرة المساعدة في حالتى القطع الناقص والزايد تؤول في حالة القطع المكافئ الى مستقيم هو المماس في الرأس .

ثانياً : المحل الهندسي للنقط التى تماثل البؤرة بالنسبة الى مماسات القطع المكافئ هو الدليل .

ومعنى هذا أن دائرة البؤرتين في حالتى القطع الناقص والزايد تؤول في حالة القطع المكافئ الى مستقيم هو دليله .

ملحوظة :

لما كان $ط ب = ط د$ (شكل ٥٥) فاذا ركزنا في أية نقطة على أحد مماسات القطع المكافئ ورسمنا دائرة تمر بالبؤرة فان هذه الدائرة تمر بالنقطة المماثلة للبؤرة بالنسبة للمماس .

(هـ) القطع المكافئ معتبراً كغلاف مستقيم متحرك

لما كان موقع العمود النازل من البؤرة على أى مماس للقطع المكافئ يقع كما قدمنا على المماس في الرأس فينتضح من ذلك أنه :

اذا تحركت زاوية قائمة في مستو بحيث يكون رأسها موجوداً دائماً على مستقيم ثابت في المستوى وأحد ضلعها ماراً على الدوام بنقطة ثابتة موجودة في المستوى وغير واقعة على المستقيم فانه ضلعها الاخر ينفق قطعاً ملائماً بؤرة النقطة الثابتة ومماسه في الرأس المستقيم الثابت .

(م) كيفية رسم مماسات لقطع مكافئ من نقطة خارجة

نفرض في (شكل ٥٥) أن النقطة المعلومة ح . فاذا ذكرنا في ح وبفتحة تساوى ح ب رسمنا دائرة فان هذه الدائرة تمر بالنقطتين مـى، المائلتين للثورة بالنسبة للمماسين المطلوبين (راجع الملحوظة في الفقرة و) . ولكن النقطتين مـى، واقعتان أيضاً على الدليل (أنظر الفقرة و) فهما إذن نقطتا تقاطع الدليل مع الدائرة المشار اليها . ويكون المماسان المطلوب رسمهما هما العمودان النازلان من ح على مـى، مـى . ويقابل هذان المماسان المستقيمين المرسومين من مـى، مـى موازيين لل محور في نقطتي التماس عـى، (ويلاحظ أن مـى، يجب أن تكونا واقعتين على المماس في الرأس) .

واذا أريد رسم «مماسين» للقطع المكافئ موازيين لاتجاه معلوم (اتجاه السهم في شكل ٥٥) نزل من الثورة عموداً على الاتجاه المعلوم فيقابل الدليل في نقطة واحدة مـى هي النقطة المائلة للثورة بحيث يكون العمود المقام على مـى من منتصفه أحد المماسين المطلوبين . أما المماس الثاني فليس تخيلاً وإنما هو — كما سيأتى بيانه في (بند ٧٤) — المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى والنزى يمكن اعتباره «ماراً» بالاتجاه المعلوم ويرى من ذلك أنه لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد لقطع ملائى يكونه موائياً لاتجاه معلوم .

(ح) نقطتا تقاطع مستقيم مع قطع مكافئ معلوم

اذا ذكرنا فى أية نقطة على القطع المكافئ مثل ع (شكل ٥٥) ورسمنا دائرة

نصف قطرها $ع$ فإن هذه الدائرة تمس الدليل بحيث يمكننا القول إن :
المحل الهندسي لمركز دائرة تمر على الدوام بنقطة ثابتة ونمسى مستقيماً ثابتاً
هو قطع مكافئ، بؤرته النقطة الثابتة ووليده المستقيم الثابت .
فقطعتنا تقاطع مستقيم مع قطع مكافئ معلوم بالبؤرة والدليل هما إذن المركزان
الموجودان على المستقيم للدائرتين اللتين تمران بالبؤرة وتمسان الدليل .

الفصل الثانى

المقاطع المستوية للمخروط الدوراني

بند ٥٠ : نظرية دندلوم^(١)

تقطع التماس بين المستوى القاطع للمخروط الدوراني وبين الكرة الماسة له والمستمرة داخل المخروط هي إمري بؤرة معنى القاطع .
 فإذا أمكن رسم كرتين تقيان بالشرطين السابقين كان المقطع منحنيًا له بؤرتان (قطع ناقص أو زائد) . أما إذا لم يكن هناك سوى كرة واحدة فالمقطع منحني ذو بؤرة واحدة (قطع مكافئ) .

البرهان :

للبرهنة على هذه النظرية يجب اعتبار الاوضاع المختلفة التي يمكن أن يشغلها المستوى القاطع Σ بالنسبة للمخروط . فإذا أسمينا نصف زاوية رأس المخروط α وزاوية ميل المستوى القاطع على المحور β واستبعدنا الحالتين اللتين يكون فيهما المستوى Σ إما ماراً برأس المخروط فيقطعه في مستقيمين راسمين (حقيقيين أو تخيليين) أو عمودياً على محور المخروط فيقطعه في دائرة — فإن المستوى القاطع Σ لا يمكن أن يشغل بالنسبة للمخروط أكثر من أوضاع ثلاثة :

- (١) إما أن تكون $\alpha < \beta$ وفي هذه الحالة يقابل المستوى القاطع جميع رواسم المخروط ويكون إذن منحنى التقاطع منحنيًا مقفلاً^(٢) (شكل ٥٦ ١)
- (٢) وإما أن تكون $\alpha > \beta$ وفي هذه الحالة يوجد راسمان في المخروط .

(١) G.P. Dandelin

(٢) وذلك لأن منحنى تقاطع سطح مخروطي مع مستويًا يألف كما هو مفهوم من قط تقاطع رواسمه مع المستوى .

يوازيان المستوى القاطع ويكون حيثخذ خط التقاطع مؤلفاً من شعبتين أو فرعين منفصلين ويمتدين الى مالا نهاية (شكل ٥٦ ب)

(٣) وأخيراً يجوز أن تكون $\alpha = \beta$ وفي هذه الحالة يوجد راسم واحد مواز للمستوى القاطع ويكون حيثخذ خط التقاطع منحنيًا ذا فرع واحد يمتد الى مالا نهاية (شكل ٥٦ ج) .

وسنقتصر الآن على الحالة الاولى التي فيها $\alpha < \beta$ فبهرن فيما يلي على أن منحنى التقاطع قطع ناقص :

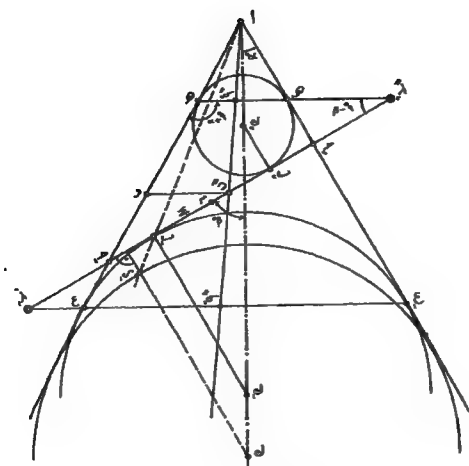
لذلك نفرض في (شكل ٥٦ ا) أن مستوى الورقة يمثل المستوى الرأسى Π ويمر بمحور المخروط فيقطعه في الراسمين ١ ع ١ ع ٢ وأن المستوى القاطع Σ عمودى على Π ونفرض أيضاً أن الكرتين ١ ع ١ ع ٢ المرسومتين داخل المخروط يمسان Σ في النقطتين ب ١ ب ٢ ويتماسان مع المخروط في دائرتين عموديتين على Π ويمثلهما المستقيمان ع ١ ع ٢ ه ١ ه ٢ على التوالي . فاذا كانت د نقطة على منحنى التقاطع (حيث د تقع على المستقيم ح ١ ح ٢ الذى يمثل Σ) وكانت س ١ س ٢ نقطتي تماس الراسم ١ د المار بهما مع الكرتين ١ ع ١ ع ٢ ه ١ ه ٢ على التوالي (حيث س ١ س ٢ هما نقطتا تقاطع ١ د مع ع ١ ع ٢ ه ١ ه ٢) فان المماسين د ب ١ د ب ٢ المرسومين من النقطة د الى الكرة ١ يكونان متساويين وكذلك يتساوى المماسان د ب ١ د ب ٢ المرسومين منها الى الكرة ٢ ولما كان ١ ع ٢ هو أحد الوضعين اللذين يتخذها الراسم ١ د أثناء دورانه حول ١ وذلك عند وقوعه في المستوى Π بحيث يكون وع ١ د هو البعدين الحقيقيين للجزمين د س ١ د س ٢ من هذا الراسم فانه ينتج أن

$$د ب ١ = د س ١ = وع ١$$

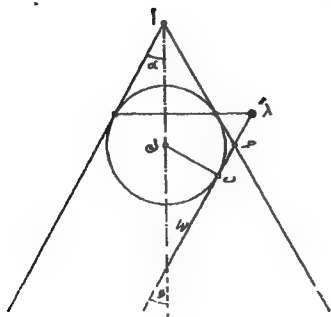
$$د ب ٢ = د س ٢ = وه ٢$$

$$\therefore د ب ١ + د ب ٢ = وع ١ + وه ٢ = ع ه ١ = مقداراً ثابتاً = ح ١ ح ٢ (١)$$

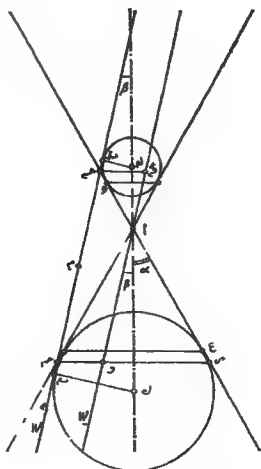
(١) البرهنة على أن ه ع = ح ١ ح ٢ تؤخذ النقطة د من منطقة أولاً على ح ١ ثم على ح ٢ .



(شکل ۱۰۶)



(شکل ۱۰۷)



(شکل ۱۰۸)

فالمنحني الهندسي للنقطة \odot هو انحناء قطع ناقص β \odot α β ومحوره
الأكبر α β .

أما إذا كانت $\alpha > \beta$ فإنه يمكن البرهنة بمثل الطريقة السابقة على أن
الفرق بين β \odot α β يساوي على الدوام مقداراً ثابتاً أي أن المنحني الهندسي
النقطة \odot هو قطع زائد محوره القاطع α β .

وفي حالة تساوي الزاويتين α β يتقاطع المستوى Σ ومستوى دائرة
التماس بين المخروط والكرة (حيث لا يمكن في هذه الحالة رسم أكثر من كرة
واحدة داخل المخروط تكون ماسة للمستوى Σ) في مستقيم (عمودي على
المستوى Π) يمكن إثبات أن بعد أية نقطة مثل \odot على منحنى التقاطع عنه
يساوي على الدوام بعدها عن نقطة تماس الكرة مع المستوى Σ أي أن منحنى
التقاطع هو قطع مكافئ، دليله المستقيم المشار إليه وبؤرته نقطة التماس.

ملزمة هامة :

من الواضح أنه إذا رسم داخل المخروط في أية حالة من الحالات الثلاث
السابقة كرة حيثما اتفق مركزها \odot (شكل ١٥٦) ثم رسم قطر الكرة العمودي
على المستوى القاطع Σ وكان α β \odot α β هما نهايتا هذا القطر (يلاحظ أن α β
غير مبيّنة في الشكل) فإن النقط α β \odot α β تكون على استقامة واحدة
وبالمثل يكون α β \odot α β مستقيماً. فهذه الحقيقة تساعد على تعيين بؤرتي منحنى
التقاطع بطريقة بسيطة يمكن وضعها في الصورة الآتية :

إذا قطع مستر مخروطاً دائرياً قائماً كانت بؤرتا منحنى التقاطع هما المقتطاه المركزيات
(من رأس المخروط على المستوى القاطع) لنهائى القطر العمودى على المستوى القاطع
لأية كرة مرسومة داخل المخروط .

بند ٥١ : نتائج نظرية مخروطه

النتيجة الاولى

المقطع المستوي لمخروط دوراني يكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما اذا كان المستوى المار برأس المخروط موازياً للمستوى القاطع — يتقاطع مع المخروط في راسين (حقيقيين منفصلين) أو يمسّه أو لا يتقاطع معه على التوالي (١).

النتيجة الثانية

المقاطع المخروطية يمكن اعتبارها مقاطع مركزية للدائرة (٢) (قارن النتيجة الخامسة). ولما كانت العلاقة الهندسية بين أى شكل مستو ومسقطه المركزى تسمى بالاشتراك المركزى (بند ٦٣) فإنه يمكننا أن نقول إن المقاطع المخروطية مؤتلفة مع الدائرة متوافاً مركزياً.

النتيجة الثالثة

نظراً إلى أن الاسطوانة الدائرية القائمة هي حالة خاصة من المخروط الدوراني فالتا نستطيع أن نبرهن بمثل البرهان السابق (بند ٥٠) على أن أى مستوي يقطع الاسطوانة الدورانية على وجه العموم في قطع ناقص (بصرف النظر عن الحالة التي

(١) يتضح بمراجعة (بند ٤٥) أن هذا يصدق أيضاً على السطح المخروطى العام اذا كان من الدرجة الثانية أى اذا كان دليله منحنيّاً من الدرجة الثانية .

(٢) اذا اعتبرنا هذه النظرية كنتيجة مباشرة لنظرية دندلان فإنه يشترط أن يكون مركز الاسقاط نقطة على محور تماثل الدائرة . غير أنه لما كان منحنى تقاطع مستوع مخروط دائرى مائل (وهو الشكل العام لكل سطح مخروطى من الدرجة الثانية) هو منحنى من الدرجة الثانية أو مقطع مخروطى (بند ٤٥) فإن المسقط المركزى للدائرة هو على وجه العموم مقطع مخروطى أينما كان مركز الاسقاط .

يكون فيها المقطع دائرة أو مستقيمين راسمين) ويتضح من ذلك أن المسقط المتوازي مائل فله أو عمودياً للدائرة هو على وجه العموم قطع ناقص . وكذلك الظل الذي تلقيه دائرة أو قطع ناقص على مستو هو على وجه العموم قطع ناقص في حالة الاضاءة المتوازية . أما اذا كان مصدر الضوء نقطة فالظل الحادث هو على وجه العموم مقطع مخروطي .

فالمقطع الناقص إذن فضلاً عن كونه مثل بقية المقاطع المخروطية مؤثلاً مع الدائرة أثلاً مركزياً فهو مؤثلف معها أيضاً أثلاً متوازياً . وهنميزة خاصة للمقطع الناقص يسهل بفضلها حل كثير من المسائل المتعلقة به (بند ١٣) .

النتيجة الرابعة

الطريقة المستعملة في (شكل ٥٤) لرسم المستقيمين التقريبيين لقطع زائد والتي عبرنا عنها في (بند ٤٨ و) بالمعادلة :

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2} \quad \text{جنا } \omega$$

حيث ω هي زاوية ميل كل من المستقيمين التقريبيين على المحور القاطع $ح_١ ح_٢$ — يمكن البرهنة عليها بواسطة نظرية دندلان كما يلي :

اذا فرضنا في (شكل ٥٦ ب) أن $\Sigma_١$ هو المستوى المار برأس المخروط موازياً للمستوى القاطع Σ فان $\Sigma_١$ يتقاطع مع المخروط في راسمين يوازيان المستقيمين التقريبيين . فاذا رمزنا الى أحد الراسمين بالرمز $\omega_١$ وإلى مسقطه الرأس المنطبق على المستقيم الممثل للمستوى $\Sigma_١$ — بالرمز $\omega_٢$ "وه" فان زاوية ميل المستقيم $\omega_١$ و $\omega_٢$ على Π تكون مساوية للزاوية المحصورة بين كل من المستقيمين التقريبيين والمحور القاطع وهي الزاوية التي رمزنا اليها بالرمز ω وينتج من ذلك أن

$$\frac{و١"و١"}{و١"و١"} = \text{جتا } \omega$$

ولكن $و١"و١" = ح١ح١ = ٢٢ ح١$

والطول الحقيقي للمستقيم $و١و١ =$ طول الرأس $ح١ح١$ الواقع في المستوى II

$$= ح١ح١ + ح١ح١ + ح١ح١$$

$$= ح١ح١ + ح١ح١ + ح١ح١$$

$$= ح١ح١ = ح١ح١$$

$$\therefore \text{جتا } \omega = \frac{ح١ح١}{ح١ح١} = \frac{ح١ح١}{ح١ح١}$$

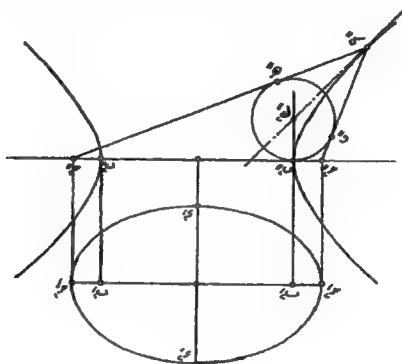
النتيجة الخامسة

بوجه عدد لا نهائية لـ من المخاريط الدورانية التي يقطعها مستر معين في مقطع مخروطي معلوم واقع في المستوى .

فاذا فرضنا في (شكل ٥٧) أن المقطع المخروطي المعلوم هو قطع ناقص واقع في المستوى الاقوى II، فان أحد هذه المخاريط الدورانية يمكن الحصول عليه برسم كرة حيثما اتفق تماس المستوى الاقوى II في إحدى بؤرتي القطع الناقص المعلوم — ولتكن ب١ — ويقطعها المستوى الرأسى II المار بالمحور الاكبر ح١ح١ للمقطع الناقص في دائرة عظمى تماس ح١ح١ في المسقط الرأسى ب١ للبقرة — ثم رسم مماسين لهذه الدائرة العظمى من ح١ح١ "ح١ح١" يتقابلان في س". فالمخروط الذي رأسه س والذي يقطعه المستوى الرأسى II في الرأسين س"ح١ح١" س"ح١ح١" هو مخروط دوراني يقطعها المستوى الاقوى II بناء على نظرية دندلان في القطع الناقص المعلوم.

ومن السهل البرهنة على أن المحل الهندسى لرأس المخروط الدوراني المشار

اليه هو قطع زائد واقع في المستوى II، المار بالمحور الاكبر للقطع الناقص عمودياً على المستوى II، المرسوم فيه القطع الناقص وأن رأسى القطع الزائد ويؤثر به هما على التوالي يؤرتا ورأسا القطع الناقص المعلوم^(١). فكل مقطع مخروطى معادى يمكن لهذا السبب اعتباره مسقطاً مركزياً لعدد لا نهاية من الدوائر التى يمكن الحصول عليها بقطع هذه المخاريط الدورانية بمستويات عمودية على محاورها.



(شكل ٥٧)

واذا كان المقطع المخروطى المعلوم قطعاً زائداً فالحل الهندسى لرأس المخروط الدورانى فى هذه الحالة هو قطع ناقص واقع فى المستوى المار بالمحور القاطع عمودياً على مستوى القطع الزائد ورأساه (الواقعتان على المحور الاكبر) ويؤرتاه هما على التوالي يؤرتا ورأسا القطع الزائد .

(١) لان $س"ح" - س"ح" = هـ"ح" - و"ح"$
 $ح"ب" - ح"ب" = ح"ب" - ح"ب"$
 $ب"ب" = ب"ب" = مقداراً ثابتاً .$

أما إذا كان المقطع المخروطي المعلوم قطعاً مكافئاً فالمحل الهندسي لرأس المخروط الدوراني يكون في هذه الحالة قطعاً مكافئاً أيضاً واقعا في المستوى المار بالمحور عمودياً على مستوى القطع المكافئ المعلوم ورأسه وبؤرته هما على التوالي بؤرة ورأس القطع المكافئ المعلوم .

النتيجة السادسة

إذا علم مخروط دوراني فانه من الممكن دائماً تطبيق أى قطع ناقص أو مكافئ معلوم على سطحه أى إيجاد مستوي يقطع المخروط في قطع ناقص (أو مكافئ) ينطبق تمام الانطباق على قطع ناقص (أو مكافئ) معلوم . أما إذا كان المعلوم قطعاً زائداً فإن هذا لا يتيسر إلا إذا كانت $\alpha \leq \omega$ حيث α هي نصف زاوية رأس المخروط المعلوم ω هي زاوية ميل كل من المستقيمين التقريين على المحور القاطع .

النتيجة السابعة : التعريف العام للمقاطع المخروطية

إذا فرضنا في (شكل ١٥٦) أن المستوى القاطع Σ يقابل مستويي دائرتي التماس ع ع_١ ع_٢ ه ه_١ ه_٢ بين الكرتين ك_١ ك_٢ وبين المخروط في المستقيمين ك_١ ك_٢ العموديين على المستوى الرأسى II (حيث مسقطاهما في الشكل هما النقطتان ك_١ ك_٢) وإذا رمزنا لبعدي أية نقطة مثل د على منحنى التقاطع — عن هذين المستقيمين بالرمزين د_١ د_٢ فإن هذين البعدين يظهران بحقيقتهما في المسقط أى يساويان د_١ د_٢ على التوالي . ولما كان

$$د = د_1 = د_2 = س = پ = و$$

$$\therefore \frac{د_1}{د_2} = \frac{و}{د_2} = \frac{ح_1}{ح_2} = \frac{جنا}{جنا} = \text{مقداراً ثابتاً}$$

وواضح أن هذا المقدار الثابت لا يتوقف إلا على الزاويتين α و β فهو أصغر من أو يساوى أو أكبر من الواحد الصحيح على حسب ما إذا كانت β أكبر من أو تساوى أو أصغر من α على التوالى .

ويمكن تلخيص هذه النتيجة فى التعريف الآتى للمقاطع المخروطية جميعاً :-

المقطع المخروطى هو المحل الهندسى لنقطة تحرك فى المستوى بحيث تكون نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) الى بعدها عن مستقيم ثابت (الربيل) مساوية على الدوام مقداراً ثابتاً يسمى الاختلاف المركزى .

ويكون الاختلاف المركزى ≥ 1 على حسب كون المقطع المخروطى قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً على التوالى (١).

(١) فى حالة الدائرة تنطبق البؤرتان عند مركز الدائرة ويبعد الربيل الى ما لا نهاية وبذلك يؤول الاختلاف المركزى الى الصفر .

الفصل الثالث

النسب المضاعفة والتقسيم التوافقي

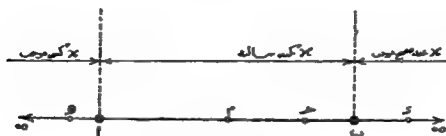
الخواص القطبية للدائرة والمقاطع المخروطية

نمر ٥٢ : النسبة البسيطة لتموت نقط أو نسبة التقسيم

(١) تعرف

لتكن A, B, C ثلاث نقط على استقامة واحدة (شكل ٥٨). فلذا فرضنا أن النقطتين A, B ثابتتان وأن النقطة C تتحرك على المستقيم AB وامتداده في جهتيه وإذا فرضنا أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه من A إلى B المبين بالسهم وأطلقنا على النسبة :

$$\frac{AC}{BC} = x$$



(شكل ٥٨)

لاى وضع من أوضاع C اسم النسبة البسيطة أو نسبة التقسيم النقط الثلاث A, B, C وأطلقنا على النقطتين الثابتتين A, B اسم النقطتين الأساسيتين وعلى النقطة C اسم نقطة التقسيم — فانه يؤخذ من ذلك أن بين النسبة x والنقطة C مناظرة الفرد للفرد بمعنى أنه إذا علمت النقطتان الأساسيتان A, B فيكفى أن

تلم « (مصحوبه بالاشارة الموجبة أو السالبة) ليتحدد وضع نقطة التقسيم ح تمام التحديد وبالعكس أو بتعبير آخر أن كل نقطة مثل ح تقسم المسافة الثابتة المعلومة ا ب بنسبة بسيطة واحدة وأن ما يقابل نسبة معينة « هو نقطة واحدة فقط مثل ح تقع على ا ب الممتد من جهته الى ما لا نهاية وتقسمة في النسبة للمعينة « . فثلا في (شكل ٥٨) لما كان ا ح = ٤ سم وكان ح ب = ١ سم فإن النسبة البسيطة :

$$\cdot \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \quad \text{«} \quad (١)$$

(ب) الاوضاع المختلفة للنقطة ح وقيم « التي تناظرها

إذا انطبقت ح على ا فن الواضح أن « = صفر . وإذا أخذت ح أى وضع بين ا و ب فإن « تكون سالبة وتساوى ١ - اذا انطبقت ح على م حيث م منتصف ا ب . وإذا أخذت نقطة التقسيم أى وضع الى يمين ب مثل د فإن « = $\frac{1}{2}$ = كية موجبة اكبر من الواحد الصحيح وإذا أخذت أى وضع الى يسار ا مثل هـ فإن « = $\frac{1}{2}$ = كية موجبة أيضاً ولكنها أصغر من الواحد الصحيح . وقبل أن تنطبق نقطة التقسيم مباشرة على ب آتية من ا تكون « = مقداراً سالباً كبيراً يؤول الى -∞ عند انطباقها على ب فإذا جاوزتها قليلاً انتقلت « فجأة الى +∞ ومعنى هذا أن الدالة غير متصلة عند النقطة ب .

(١) يلاحظ أن قيمة « الجبرية للنقطة « الأخرى ، التي تقسم البعد ا ب من

« الخارج ، بالنسبة ٤ أيضاً هي ٤ + وليس ٤ - .

إذا تقرر هذا فنحن نتساءل ما هي النهاية التي تقول إليها x عند ما تتحرك نقطة التقسيم إلى يمين b أو إلى يسار a مبتعدة بعداً لا نهائياً؟
نأخذ أولاً الحالة الأولى ونفرض أن نقطة التقسيم قد اتخذت وضعاً اختيارياً إلى يمين b مثل u فإن

$$1 + \frac{a}{u} = \frac{a + u}{u} = \frac{a}{u} = x$$

ولكن $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a}{u} = 0$ $\lim_{u \rightarrow \infty} x = 0$

$$\therefore \lim_{u \rightarrow \infty} x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{u}\right) = 1$$

ومعنى هذا أن النهاية التي تقول إليها x عند ما تتحرك نقطة التقسيم إلى يمين b مبتعدة بعداً لا نهائياً هي 1 وبالمثل نستطيع أن نبرهن على أن هذه هي النهاية نفسها للنسبة x إذا تحركت نقطة التقسيم إلى يسار a نحو اللانهاية .

$$\therefore x = 1 + \frac{a}{u} \text{ عند النقطة التي في النهاية للمستقيم } a .$$

(ح) النسبة البسيطة تبقى ثابتة بعد الاسقاط المتوازي ولكنها تتغير

بالاسقاط المركزي

البرهان على هذه النظرية ينتج مباشرة من (شكل ٥٩) إذ يتضح من (شكل ٥٩ أ) أن

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

حيث a, b مستقيم مار بالنقطة a موازياً للمسقط $a'b'$ كما يتضح من

(شكل ٥٩ ب) أن النسبة $\frac{ا}{ح}$ لا يمكن أن تساوى النسبة $\frac{ا'}{ح'}$ (إلا اذا

ا' ب' يوازي ا ب) .

(٥) النتيجة

سبق لنا القول

(بند ٥١) إن المقاطع

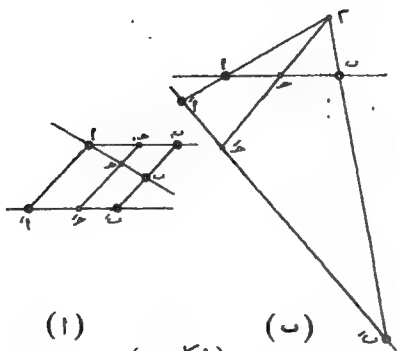
المخروطية يمكن الحصول

عليها بإسقاط الدائرة

إسقاطاً مركزياً والآن

برهنا على أن النسبة

البسيطة لثلاث نقط



(ا)

(ب)

(شكل ٥٩)

تغير بالإسقاط المركزى فينتج من ذلك أنه للحصول على الخواص الإسقاطية للمقاطع المخروطية (المستتجة من خواص الدائرة) لابد من البحث عن نسبة أخرى لا تتغير بالإسقاط المركزى ، هذه النسبة هى النسبة المضاعفة كما سنبينه فى البند التالى .

نبر ٥٣ : النسبة المضاعفة

(١) تعريف النسبة المضاعفة لاربعة نقط على مستقيم

لنفرض فى (شكل ٦٠) أن ا ب نقطتان ثابتتان (أساسيتان) وأن ح و ح' ونقطتا تقسيم حيث ا ب ح و ا ب ح' و على استقامه واحدة أى أربع نقط من مجموعة النقط التى تولف ما يسمى بنصف النقط على المستقيم ا ب .

فكون النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ب ح و (بند ٥٢) هى :

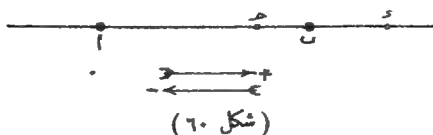
$$\frac{ا}{ب} = ١\%$$

وتكون النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ب و هي :

$$\frac{س ا}{ب و} = ٢\%$$

ويسمى خارج قسمة هاتين النسبتين :

$$(ا ب و) = \frac{س ا}{ب و} : \frac{ا}{ب} = \frac{١\%}{٢\%} = \psi$$



بالنسبة المضاعفة للنقط الاربعة ا ب و ح و

فالأصطلاح (ا ب و ح) يعبر إذن عن النسبة المضاعفة للنقط الاربعة ويؤخذ منه :

أولاً : أن ا ب هما النقطتان الاساسيتان

ثانياً : أن الاتجاه الموجب هو من ا إلى ب

ثالثاً : أن ح هي نقطة التقسيم الاولى وأن و نقطة التقسيم الثانية

رابعاً : أن (ا ب و ح) = $\frac{\text{النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ب و ح}}{\text{النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ب و}}$

ويتضح مما تقدم أن ترتيب الحروف ضرورى لمعرفة قيمة النسبة المضاعفة

لاربعة نقط معلومة فمثلا (ا ب و ح) لا تساوى (ب ا و ح) وكذلك (ا ب و ح)

لاتساوى (ا ب ح د) وطبيعى أن (ا ب ح د) لاتساوى أيضاً (ا ح د ب) ولكن :

$$(ا ب ح د) = (ب ا د ح) = (ح د ا ب) = (د ح ا ب)$$

ومعنى هذا أن النسبة المضاعفة لاربع نقط تتغير قيمتها اذا غيرنا اثنتين من النقط بحيث تحل كل منهما محل الاخرى وثبتنا فى الوقت نفسه النقطتين الباقيتين وتتغير أيضاً اذا حلت إحدى نقطتى التقسيم محل نقطة أساسية فى حين أننا اذا أجرينا عملية التغير هذه على النقط الاربعة جميعا مأخوذة مثنى (أى مع جعل النقطتين الأساسيتين إما ا ب أو ح د) فان قيمة النسبة المضاعفة لا تتغير^(١).

(ب) بعض الاوضاع الخاصة لنقطتى التقسيم وقيم ψ التى تقابلها

أولاً : متى تكون $\psi = 1$ ؟ اذا كانت $x = y$ وهذا لا يتأتى الا اذا انطبقت نقطتا التقسيم وفى هذه الحالة تؤول النسبة المضاعفة لاربع نقط الى نسبة بسيطة لثلاث نقط مقسومة على نفسها .

ثانياً : متى تكون $\psi = 0$ ؟ اذا انطبقت ح وحدها على ا أو انطبقت د وحدها على ب وفى كلتا الحالتين تؤول النقط الاربعة الى ثلاث .

ثالثاً : متى تكون $\psi =$ مقداراً موجباً ؟ اذا كانت كلتا النسبتين البسيطتين متحدتى الإشارة لذلك يجب أن تكون نقطتا التقسيم إما بين ا ب معاً أو خارج المسافة ا ب معاً .

رابعاً : متى تكون $\psi =$ مقداراً سالباً ؟ اذا كانت إحدى النسبتين البسيطتين موجبة والاخرى سالبة ففى هذه الحالة تكون إحدى نقطتى التقسيم بين ا ب وتكون الاخرى إما الى يمين ب أو الى يسار ا .

(١) يمكن كتابة ٢٤ صورة للنسبة المضاعفة لاربع نقط ولكن لما كان كل أربع من هذه الصور متساوية القيمة فهناك ٦ قيم مختلفة فقط للنسبة المضاعفة لاربع نقط .

وهذه الحالة الاخيرة تدعونا الى التفكير في حالة خاصة ونعني بها الحالة التي تكون فيها $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi}$. ففى هذه الحالة الخاصة تكون $\frac{1}{\psi} = 1$ ويطلق على النسبة المضاعفة حيثئذ اسم النسبة التوافقية .

(ح) التقسيم التوافقي

اذا كانت $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi}$ أربع نقط على استقامة واحدة وكانت النسبة المضاعفة لها $\frac{1}{\psi} = (1 \text{ ح } 2) = \frac{1}{\psi}$ فمعنى ذلك أن إحدى نقطتي التقسيم تقسم المسافة ١ ب من الداخل بنفس النسبة العددية التي تقسم بها نقطة التقسيم الاخرى نفس المسافة من الخارج ويطلق على النسبة المضاعفة في هذه الحالة اسم النسبة التوافقية كما تقدم .

ونبرهن الآن على النظرية الآتية :

اذا كانت $\frac{1}{\psi} = (1 \text{ ح } 2) = \frac{1}{\psi}$

فان $1 = \psi$

أى أن النسبة المضاعفة تكون في هذه الحالة توافقية .

البرهان :

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} : \frac{1}{\psi} = (1 \text{ ح } 2) \dots$$

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} : \frac{1}{\psi} = (1 \text{ ح } 2) \dots$$

$$\text{وحيث إن} \quad \frac{1}{\psi} = \psi \quad \text{فرضاً}$$

$$1 = \psi^2 \dots$$

$$\dots = \psi = 1 \quad (\text{لأن } \psi = 1 \text{ لا معنى له}).$$

ويتضح من هذه النظرية أنه في هذه الحالة الخاصة تكون $(١ ب ح و) =$
 $(ب ا ح و) = (١ ب و ح) = \dots$ أى أن جميع الصور الممكن
 كتابتها للنسبة التوافقية لاربع نقط $١ ب و ح و$ مع جعل النقطتين
 الأساسيتين إما $١ ب$ أو $و ح$ تكون كلها متساوية القيمة وتساوى $١ -$.
 وكذا يتضح في حالة اعتبار $و ح$ والنقطتين الأساسيتين أن $١ ب$ تقسمان
 المسافة $و ح$ بنفس النسبة من الداخل والخارج .

ولذلك يقال إن النقطتين $و ح$ و تقسمان المسافة $١ ب$ تحسباً توافقياً وإن
 النقطتين $١ ب$ تقسمان المسافة $و ح$ في نفس الوقت تقسماً توافقياً أيضاً ويقال
 كذلك انه $و ح$ و مترافقتاه توافقياً بالنسبة الى $١ ب$ وبالعكس .
 والامثلة كثيرة على هذا التقسيم التوافقي فمثلا اذا كان $و ح$ $و ح$ و
 هما المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية $ب ح ا$ (شكل ٦١) كانت النسبة



(ب) (شكل ٦١) (١)

$(١ ب ح و) = ١ -$ أى نسبة توافقية وكانت $و ح$ و مترافقتين توافقياً
 بالنسبة الى $١ ب$ وبالعكس .

كذلك اذا كانت $و ح$ منتصف $١ ب$ وكانت $و$ هي النقطة التي في اللانهاية
 للمستقيم $١ ب$ (شكل ٦١ ب) فان

$$١ + : ١ - = \frac{\infty ا}{\infty ب} : \frac{ا}{ب} = (١ ب ح و)_{\infty}$$

$$= ١ - \text{ (راجع بند ٥٢ ب)}$$

(د) تعريف النسبة المضاعفة والنسبة التوافقية لاربعة مستقيمت متلاقية في نقطة

إذا كانت $\alpha \beta \gamma \delta$ أربعة مستقيمت في المستوى مارة بنقطة واحدة ع أى أربعة من مجموعة المستقيمت في المستوى المؤلفة لما يسمى بمجموعة المستقيمت المتلاقية في النقطة ع التي يطلق عليها اسم رأس الميزة — واعتبرنا $\alpha \beta \gamma \delta$ مستقيمت ثابتين (أساسيين) فانه يمكن تعريف النسبة المضاعفة لهذه المستقيمت الاربعة (أنظر شكل ٦٢) :

$$(١) \quad \frac{\delta \hat{\alpha} \text{ جا}}{\delta \hat{\beta} \text{ جا}} : \frac{\gamma \hat{\alpha} \text{ جا}}{\gamma \hat{\beta} \text{ جا}} = (\delta \gamma \beta \alpha)$$

فاذا كانت هذه النسبة تساوى ١ سميت نسبة توافقية (شكل ١٦١) .

(هـ) النسبة المضاعفة لاربع نقط على استقامة واحدة تساوى نظيرتها

للمستقيمت الاربعة التي تصل هذه النقط بأية نقطة خارجية ع .

البرهان :

إذا رمزنا للمستقيمت الاربعة التي تصل النقطة الخارجة ع بالنقط الاربعة

المعلومة $\alpha \beta \gamma \delta$ و بالحروف $\alpha \beta \gamma \delta$ على التوالي (شكل ٦٢)

فانه يراد البرهنة على أن

(١) ما يقابل هذا في النسبة البسيطة هو النسبة البسيطة لثلاثة مستقيمت التي يمكن

$$\text{تعريفها : } (\gamma \beta \alpha) = \frac{\gamma \hat{\alpha} \text{ جا}}{\gamma \hat{\beta} \text{ جا}}$$

وبلاحظ أن تكون قراءة الحروف اليونانية في جميع النسب للمستقيمت والمستويات

(أنظر الفقرة ٨) — من اليمين الى اليسار . كما يلاحظ أن يكون الاتجاه الموجب

للزوايا (المرموز لها بالعلامة « ») كما هو مبين في (شكل ٦٢) .

$$(\delta \gamma \beta \alpha) = (s p u r)$$

$$\therefore \frac{\gamma^{\hat{a}}_1}{\epsilon} = \frac{\gamma^{\hat{a}}_{\beta}}{\epsilon} = \frac{\gamma^{\hat{\beta}}_{\alpha}}{\epsilon}$$

$$(1) \dots\dots\dots \frac{u_j}{1_j} \times \frac{\gamma_{a_j}}{\gamma_{\beta_j}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

وبالمثل $\therefore \frac{\delta \hat{\beta}}{\delta \alpha} = \frac{s_1}{s_2} \frac{\delta \hat{\alpha}}{\delta \alpha} = \frac{s_1}{s_2}$ فبقسمة المعادلتين ينتج أن

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{جاء}}{16} \times \frac{\delta^{\wedge} \alpha \text{ جاء}}{\delta^{\wedge} \beta \text{ جاء}} = \frac{51}{56}$$

وبقسمة المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن

$$\frac{\delta^{\wedge} \alpha_{\text{جا}}}{\delta^{\wedge} \beta_{\text{جا}}} : \frac{\gamma^{\wedge} \alpha_{\text{جا}}}{\gamma^{\wedge} \beta_{\text{جا}}} = \frac{51}{55} : \frac{21}{25}$$

أى أن $(\alpha \beta \gamma \delta) = (1 2 3 4)$ وهو المطلوب.

وعكس هذه النظرية الأساسية وهو :

النسبة المضاعفة لأربعة مستقيمات في حزمة تساوي النسبة المضاعفة لالنقط الأربع التي يحلها المقطع الحزمة بمقتضى حيثما انفس يمكن اعتباره تعريفاً للنسبة المضاعفة لأربعة مستقيمات في المستوى متلاقفة في نقطة .

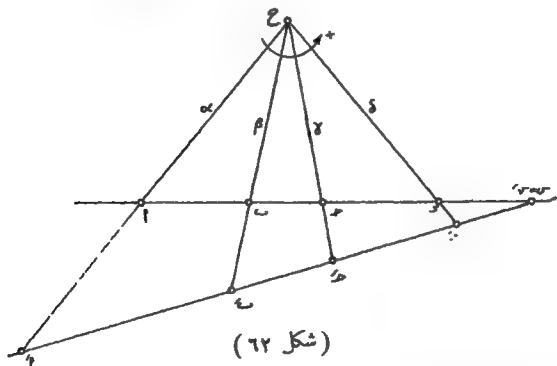
والذى يفهم من التعبير ع (١٠ ح ٥) هو النسبة المضاعفة للمستقيمات
الاربعة التى يمكن الحصول عليها بتوصيل النقط ١ ٢ ٣ ٤ فى صف ما
بالنقطة ع .

(و) النسبة المضاعفة لا تتغير بالإسقاط مركزياً أو متوازياً

يمكن اعتبار هذه النظرية المعروفة باسم نظرية «بايس»^(١) نتيجة مباشرة للنظرية السابقة لاتنا اذا فرضنا في (شكل ٦٢) أن $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ هي المساط المركزية من ϵ للنقط $\alpha \beta \gamma \delta$ (حيث يمثل مستوى الورقة المستوى المرسوم فيه كلا الصفين) فإن

$$(\delta \gamma \beta \alpha) = (\alpha \beta \gamma \delta) \quad \text{وذلك} \quad (\alpha' \beta' \gamma' \delta') = (\delta' \gamma' \beta' \alpha')$$

$\therefore (\alpha \beta \gamma \delta) = (\alpha' \beta' \gamma' \delta')$ وهو المطلوب.



واذا اعتبرنا حزمتين من المستقيمت إحداها المسقط المركزي للآخرى فإنه ينتج بما تقدم أن

$$\epsilon (\alpha \beta \gamma \delta) = \epsilon (\alpha' \beta' \gamma' \delta')$$

أي أن النسبة المضاعفة لاربعة مستقيمت من حزمة تساوى نظيرتها لمساط هذه المستقيمت المركزية.

وأما أن النسبة المضاعفة لا تتغير كذلك بالاسقاط المتوازي فظاهر من كون هذا الاسقاط حالة خاصة من الاسقاط المركزى .

(س) النسبة المضاعفة لاربعة مستويات فى حزمة

إذا كانت المستويات $\Delta \rho \Gamma \rho B \rho A$ أربعة مستويات مارة بمستقيم واحد أى أربعة من مجموعة المستويات فى الفضاء المؤلفة لما يسمى بحزمة المستويات المارة بالمستقيم المذكور الذى يطلق عليه اسم حامل الحزمة — واعتبرنا المستويين $B \rho A$ مستويين ثابتين (أساسيين) فإنه يمكن تعريف النسبة المضاعفة لهذه المستويات الأربعة :

$$\frac{\Delta \hat{A} \text{ جا } \Gamma \hat{A}}{\Delta \hat{B} \text{ جا } \Gamma \hat{B}} = (\Delta \Gamma B A)$$

فهذه النسبة تساوى إذن النسبة المضاعفة للمستقيمتين الأربعة التى يمكن الحصول عليها بقطع هذه المستويات بمستوى عمودى عليها وتساوى أيضاً النسبة المضاعفة للنقط الأربع التى يمكن الحصول عليها بقطع المستقيمتين الأربعة المشار إليها بمستقيم حيثما اتفق فى المستوى العمودى . فإذا وصلنا هذه النقط الأربع بنقطة جديدة على حامل الحزمة بحيث نحصل على أربعة مستقيمتين جديدة فى مستوى جديد (غير عمودى) ثم قطعنا هذه المستقيمتين الأخيرة بقاطع فى مستويها فن الواضح أن النسبة المضاعفة للنقط الأربع على هذا القاطع تكون مساوية للنسبة المضاعفة للنقط الأربع الواقعة فى المستوى العمودى ومساوية بالتالى للنسبة المضاعفة للمستويات الأربعة .

ينتج مما تقدم أنه إذا قطع المستويات $\Delta \rho \Gamma \rho B \rho A$ مستقيم حيثما اتفق فى النقط $\alpha \rho \beta \rho \gamma \rho \delta$ فإن

$$(\alpha \beta \gamma \delta) = (\Delta \Gamma B A)$$

وهو ما يمكن اعتباره تعريفاً للنسبة المضاعفة لاربعة مستويات فى حزمة واحدة .

وإذا كان المعلوم ثلاثة مستقيمت $\alpha \beta \gamma$ في حزمة رأسها $ح$ ويراد إيجاد المستقيم الرابع δ الذى يجعل $(\delta \gamma \beta \alpha) =$ مقداراً معلوماً فيؤخذ أى مستقيم قاطع ليقابل المستقيمت المعلومه فى النقط $\alpha \beta \gamma \delta$ ثم نجد على هذا القاطع النقطه ϵ التى تجعل $(\epsilon \delta \gamma \alpha) =$ المقدار المعلوم ونصل $ح \epsilon$ و فيكون هو المستقيم المطلوب δ .

وإذا كان المقدار المعلوم $ع$ الذى يجب أن تساويه النسبة المضاعفة للنقط الأربع $= ١ -$ فإن رأس المسألة يؤول الى الآتى :

إذا علمت بموت نقط $\alpha \beta \gamma \delta$ فى صف فالمطلوب إيجاد النقطه التوافقية الرابعة ϵ أو إيجاد النقطه ϵ التى ترافقه $ح$ توافقياً بالنسبة الى $\alpha \beta \gamma$.

وغنى عن البيان أن طريقة تعيين النقطه ϵ فى هذه الحالة لا تختلف عنها فى الحالة العامة بل هى أبسط (فى هذه الحالة تؤخذ النقطتان $\alpha \beta$ فى شكل ٦٣ بحيث تكون النسبة $\frac{\alpha \beta}{\beta \gamma} = ١ -$ أى بحيث تكون $ح$ منتصف $\alpha \beta$)

ولهذا السبب توجد طرق عديدة أخرى لتعيين النقطه التوافقية الرابعة لثلاث نقط معلومة ولكننا سنقتصر على ذكر الطريقة الآتية لاهميتها .

(ط) تعيين النقطه التوافقية الرابعة لثلاث نقط معلومة بواسطة ما يسمى

بالشكل الرباعى التام

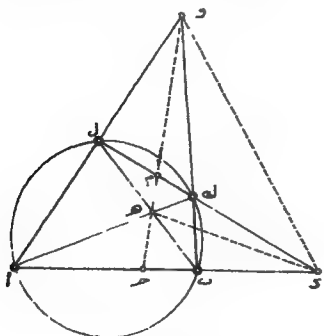
تعريف : الشكل الرباعى التام هو الشكل الذى يتألف من أربع نقط $\alpha \beta \gamma \delta$ فى المستوى (شكل ٦٤) يصلها بعضها البعض مستقيمت ستة . وتسمى النقط الأربع رؤوس الشكل الرباعى التام كما تسمى المستقيمت الستة أضراسه ويقال لكل ضلعين لا يشتركان فى رأس واحدة مثل $\alpha \beta \gamma \delta$ أو $\alpha \delta \beta \gamma$ أو $\alpha \gamma \beta \delta$ أن بينهما ضلعاه متقابلين . وكل ضلعين متقابلين

يتقاطعان في نقطة واحدة تسمى رأس قطرية . فالشكل الرباعي التام له إذن ثلاث رؤوس قطرية α و β و γ ويطلق على المثلث $\alpha\beta\gamma$ و لذلك اسم المثلث القطري^(١) ونبرهن فيما يلي على أن النسبة $(\alpha\beta\gamma) = 1 -$:

$$(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma) \text{ و } (\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma) = 1 -$$

(أنظر الفقرة ح)

وبنفس الطريقة نستطيع أن نبرهن على أن النقطة التوافقية الرابعة للنقط $\alpha\beta\gamma$ وهي نقطة تقاطع $\alpha\beta$ مع الضلع $\gamma\delta$ في المثلث القطري وبالمثل لجميع الأضلاع الباقية . ويمكن تلخيص هذه الظاهرة التوافقية للشكل الرباعي التام في النظرية الأساسية الآتية :



(شكل ٦٤)

كل ضلع من أضلاع شكل رباعي تام يمكن اعتباره حاملا لنصف توافق من النقط حيث يترافق رأسا الشكل توافقيا مع الرأس القطرية التي يمر بها الحامل ونقطة تقاطع هذا الحامل مع المستقيم الذي يصل الرأسين القطريين الباقيتين .

(١) غنى عن البيان أن الرؤوس $\alpha\beta\gamma$ لا يكون لها شرط فيها أن تكون واقعة على محيط دائرة وإنما فرضت كذلك في (شكل ٦٤) ليتيسر استخدام الشكل في شرح النظرية الثانية من (بند ٥٤ ب) .

وإذا استخدمنا حزم المستقيمت التوافقية التي رؤوسها ω و ω' وأمكن وضع هذه النظرية في الصورة الآتية :

أى ضلعين من أضلاع المثلث القطري في شكل رباعي تام يكونانه مترافقين توافقياً بالنسبة لضلعى الشكل الرباعي التام المتقابلين معهما في رأس قطرية واحدة . فإذا قطع الحزمة قاطع حصلنا على صف توافقي من النقط .

فإذا علمت ثلاث نقط ω ب ω' ح (شكل ٦٤) فإنه يمكن استخدام هذه النظرية في تعيين النقطة ω التي ترافق ح توافقياً بالنسبة الى ω ب فترسم لذلك شكلاً رباعياً تاماً بأن نصل ω ب ω' ح بنقطة ما مثل و ثم نرسم من ب مثلاً مستقيماً حيثما اتفق بقطع و ω و ح في ω' ثم نصل ω ه فيقابل و ب في ك فالمستقيم ل ك (أو امتداده) يقابل ب في النقطة المطلوبة و . وهذه طريقة بسيطة لتعيين النقطة التوافقية الرابعة كما يرى وتتماز على جميع الطرق الأخرى بأنه يمكن الاستغناء معها عن استعمال البرجل .

بند ٥٤ : المحاور القطبية للدائرة

(١) تعاريف

إذا وصلت النقطة α الواقعة في مستوى الدائرة الميئة في (شكل ٦٥) بالمركز م وتقاطع المستقيم α م مع الدائرة في ح ω و ω' ثم وجدت النقطة ب التي ترافق α توافقياً بالنسبة الى ح ω و ورسم من ب العمود α على α م فإن α يسمى قطب القطبي للنقطة α بالنسبة الى الدائرة .

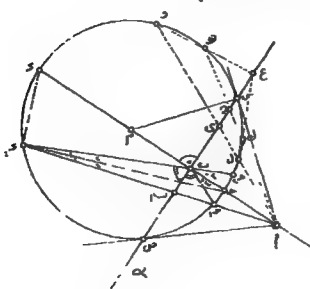
وبالعكس إذا فرض مستقيم α في مستوى الدائرة وأنزل من م عمود عليه فيقابل في النقطة ب ويقطع الدائرة في ح ω و ω' فالنقطة α التي ترافق ب توافقياً بالنسبة الى ح ω و تسمى قطب المستقيم α بالنسبة الى الدائرة .

(ب) نظريات أساسية

النظرية الأولى : إذا رسم من α مستقيم حيثما اتفق يقطع الدائرة في α_1, α_2 فالنقطة β التي ترافق α توافقاً بالنسبة α_1, α_2 تقع على الخط القطبي α للنقطة α بالنسبة الى الدائرة .

[البرهان : بما أن $(\alpha \beta \gamma) = 1$ والزواية α_1, α_2 قائمة $\therefore \alpha_1 = \alpha_2$ ويكون القوس $\alpha \beta =$ القوس $\alpha \gamma$ $\therefore \alpha_1 = \alpha_2$ وبما أن الزاوية $\alpha \beta \gamma$ قائمة $\therefore \beta, \gamma$ هما المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية α_1, α_2 $\therefore (\alpha \beta \gamma) = 1$] .

نجم ١ — الخط القطبي α لنقطة ما مثل α بالنسبة للدائرة هو المحل الهندسي للنقطة التي ترافق α توافقاً بالنسبة لنقطتي تقاطع أى مستقيم مار بها مع الدائرة . ويمكن اعتبار هذه النتيجة الهامة تعريفاً للخط القطبي .



(شكل ٦٥)

نجم ٢ — الخط القطبي لنقطة في اللانهاية في مستوى الدائرة هو مستقيم يمر بمركز الدائرة أى قطر من أقطارها . ويعتبر مركز الدائرة قطب المستقيم الذى في اللانهاية في مستوى الدائرة (بند ٦٥) .

نجم ٣ — الخط القطبي α لنقطة خارجية مثل α بالنسبة للدائرة

يصل نقطتي التماس α_1, α_2 للمماسين اللذين يمكن رسمهما من α الى الدائرة ^(١) .

(١) نستخدم هذه النتيجة في رسم الخط القطبي لنقطة خارجية وفي تعيين قطب المستقيم اذا كان قاطعاً للدائرة .

[لأن النقطة التوافقية الرابعة تنطبق لوضع القاطع النهائي عندما يصبح مماساً على نقطة التماس].

نمجة ٤ - إذا كانت (ا ب ح د) = - ١ حيث ا ب ١ ب ٢ ح ٣ د ٤
أربع نقط حيثما اتفق على مستقيم واحد وكانت ٢ منتصف ح د فان
١٢ . ٢٠ ب ٢٠ ح ٢٠ د = ٢٠ ح ٢٠ د = ٢٠ د ٢٠ ح وبالعكس .

[لأن المستقيم α المرسوم من ب عمودياً على حامل الصف يكون الخط القطبي للنقطة ا بالنسبة الى الدائرة المرسومة على ح د (شكل ٦٥) . ولما كان المثلثان
س م ا ب س م ح متشابهين ينتج أن $\frac{١٢}{س م} = \frac{٢٠}{س م} = \frac{٢٠}{س م} = \frac{١٢}{س م}$.]

النظرية الثانية : إذا مرت دائرة بالرؤوس الاربع لشكل رباعي تام (شكل ٦٤) كان كل ضلع من أضلاع المثلث القطري هو الخط القطبي بالنسبة الى الدائرة للرأس القطرية المقابلة له . ويطلق لذلك على مثل هذا المثلث اسم المثلث القطبي .
[وهذه النظرية تنتج مباشرة من الخاصة التوافقية للشكل الرباعي التام التي برهنها في (بند ٥٣ ط)].

النظرية الثالثة : الخطوط القطبية لنقط مستقيم بالنسبة الى دائرة تمر جميعا بقطب المستقيم بالنسبة الى هذه الدائرة .

[البرهان : نفرض نقطة مثل ع على المستقيم α في (شكل ٦٥) ونبرهن على أن الخط القطبي للنقطة ع بالنسبة للدائرة يمر بالنقطة ا التي هي قطب المستقيم α بالنسبة للدائرة . لذلك نرسم من ع قطعاً يقطع الدائرة في ه و و ونصل ه و ا و الذين يقطعان الدائرة في ز و ك ويقابلان α في د و م على التوالي . فمن حيث إن (ا د ز ه) = (ا ي ل و) = - ١ فينتج من ذلك أن ع و ل مستقيم .

وبما أن ولده شكل رباعي قام مرسوم داخل الدائرة وفيه ع^١ رأسان من رؤوس المثلث القطري فبناء على النظرية الثانية لا بد أن يمر الخط القطبي للنقطة ع بالنقطة ا [.

تبر ١ — الخط القطبي لنقطة على الدائرة هو المماس فيها للدائرة .

تبر ٢ — اذا وقعت نقطة مثل ع على الخط القطبي α لنقطة مثل ا بالنسبة الى دائرة (شكل ٦٥) فان ا لا بد أن تقع على الخط القطبي للنقطة ع . ويقال لمثل النقطتين ا ع إنهما مترافقتان بالنسبة الى الدائرة .

تبر ٣ — اذا كان ا ب قطبي مستقيمين مثل α β على التوالي بالنسبة الى دائرة ما ومر β بالنقطة ا فان α لا بد أن يمر بالنقطة ب . ويكون المستقيم ا ب الخط القطبي لنقطة تقاطع α β ^(١) .

ويقال لمثل المستقيمين α β إنهما مترافقان بالنسبة الى الدائرة . ويسميان قطريهما مترافقيين اذا كانا مارين بالمركز ^(٢) .

متر ٥٥ : الخواص القطبية للمقاطع المخروطية

بما أن المقاطع المخروطية يمكن اعتبارها مساقط مركزية للدائرة (بند ٥١) وبما أن النسب المضاعفة والتوافقية لا تتغير بالاسقاط المركزي (بند ٥٣ و) ولما كانت النظريات الاساسية المذكورة في البند السابق قائمة على أساس التقسيم التوافقي فبناء عليه يمكننا أن نقرر ان النظريات المذكورة في (بند ٥٤ ب) نعرض بتأجيرها على المقاطع المخروطية وذلك بوضع كلمة «مقطع مخروطي» بدلا من «دائرة» . فالخط القطبي لنقطة ما بالنسبة الى مقطع مخروطي هو المماس الهندسي (خط مماسي) للنقطة التي ترافقها توافقياً بالنسبة لنقطتي تقاطع أى مستقيم مار بها مع المقطع المخروطي .

(١) تستخدم هذه الحقيقة في رسم الخط القطبي لنقطة داخل الدائرة وفي تعيين قطب المستقيم اذا كان غير قاطع للدائرة .

(٢) القطران الملة اثنان في دائرة يكونان متعامدين .

ويقال للقطرين في مقطع مخروطي إنهما مترافقان إذا مر كل منهما بقطب الآخر بالنسبة للمقطع المخروطي ولما كان قطب القطر هو نقطة في اللانهاية فإن القطرين المترافقين ينصف كلا منهما الاوتار الموازية للآخر .
والخط القطبي لبؤرة مقطع مخروطي هو دليله المناظر لهذه البؤرة ولذا يتقاطع المماسان في نهايتي أى وتر بؤرى على الدليل .

الفصل الرابع

الامتلاف (العام) أو الامتلاف الاسقاطي

بند ٥٦ : تعريف

يقال لشكليين مستويين α و α' سمهما α و α' متناظران ^(١) اذا اوجبت بين نقطتهما ومستقيما α منازرة افرد للفرد أى اذا كانت كل نقطة في الشكل الاول تناظرها نقطة واحدة في الشكل الثانى وبالعكس وكذلك كل مستقيم في الشكل الاول يناظره مستقيم في الشكل الثانى وبالعكس (راجع بند ١١) .

فاذا كان α و α' مستقيمين متناظرين في شكلين مستويين مؤلفين وافترضنا نقطتين ثابتتين واحدة على α والاخرى على α' فان موضع أية نقطة α على المستقيم α يتعين يعدها α عن النقطة الثابتة على هذا المستقيم كما أن موضع النقطة المناظرة α' على α' يتعين يعدها α' عن النقطة الثابتة على المستقيم α' .

ولما كانت كل نقطة على المستقيم α بمقتضى التعريف السابق لها نقطة واحدة مناظرة على α' وبالعكس وجب أن كل قيمة للتغير α تناظرها قيمة واحدة للتغير α' وبالعكس وإذا تحتم أن يرتبط المتغيران α و α' بالعلاقة

$$\alpha' = \alpha + \alpha' + \alpha' + \alpha' = \alpha$$

(حيث α و α' ل α و α' ثوابت) التى تؤول الى صورة عامة لمعادلة من الدرجة الاولى لتعيين α اذا تعينت α' وبالعكس .

(١) يلاحظ أننا سنقتصر غالباً في وصف هذه العلاقة الهندسية على تسميتها « بالامتلاف » فقط .

بند ٥٧ : نظرية

النسبة المضاعفة لأربع نقط $أ ب ج د$ على مستقيم مرسوم في أحد شكلين مؤلفين تساوى النسبة المضاعفة للنقط الأربع $أ ب ج د$ و' المناظرة لها في الشكل الآخر .

البرهان : نفرض $س_١ س_٢ س_٣ س_٤$ أبعاد النقط $أ ب ج د$ و' عن نقطة ثابتة على مستقيهما (حامل الصف) وكذلك $س'_١ س'_٢ س'_٣ س'_٤$ أبعاد النقط للمناظرة $أ ب ج د$ و' عن نقطة ثابتة على مستقيهما .

$$\text{فالنسبة المضاعفة (أ ب ج د)} = \frac{أ ب}{ب ج} : \frac{أ د}{ج د} = \frac{س_١ - س_٢}{س_٢ - س_٣} : \frac{س_١ - س_٤}{س_٣ - س_٤}$$

$$= \frac{(س_١ - س_٢) (س_٣ - س_٤)}{(س_٢ - س_٣) (س_١ - س_٤)}$$

ولكن ينتج من الصورة العلة للعلاقة بين $س'_١ س'_٢ س'_٣ س'_٤$ المينة في البند السابق أن

$$س = \frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣}$$

فالتعويض ينتج أن

$$\frac{\left(\frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} + \frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} \right) \left(\frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} + \frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} \right)}{\left(\frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} + \frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} \right) \left(\frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} + \frac{س'_٢ + س'_٤}{س'_١ + س'_٣} \right)} = (أ ب ج د)$$

$$= \frac{(س'_١ - س'_٢) (س'_٣ - س'_٤)}{(س'_١ - س'_٤) (س'_٢ - س'_٣)}$$

أى أن

$$\frac{أ' ح' : ب' ح'}{أ' ب' : ب' ح'} = (أ ب ح)$$

$$= (أ' ب' ح' ز') \text{ وهو المطلوب.}$$

بند ٥٨ : الصفوف المؤتلفة

إذا طبقنا التعريف سالف الذكر (بند ٥٦) لائتلاف الاشكال المستوية على الصنفين ١ ب ح ز و ٢ أ' ب' ح' ز' باعتبارهما حالتين خاصتين لشكلين مؤتلفين أمكننا تسمية هذين الصنفين **صفين مؤتلفين** . ولما كانت النقط ١ ب ح ز و ٢ أ' ب' ح' ز' هي نقط مأخوذة حيثما اتفق على الصنفين فإن النظرية السابقة (بند ٥٧) يكون معناها :

النسبة المضاعفة لـ ٤ أربع نقط من صف تساوى النسبة المضاعفة للنقط الأربع المناظرة لها من الصف المؤتلف مع . أو بعبارة أخصر :

النسبتان المضاعفتان لصفين مؤتلفين متساويتان ^(١) .

وتتخذ بعض الكتب هذه الخاصية كتعريف للصفوف المؤتلفة فيقال لصفى النقط إنهما مؤتلفاه أو **مقاطعا** إذا تساوت نسبتهما المضاعفتان ^(٢) .

-
- (١) نلفت النظر بصفة خاصة الى قولنا : « النسبة المضاعفة لصف ، لانه كثير أ ما سأتى ذكره في المستقبل مستعملا بمعنى « النسبة المضاعفة لـ ٤ أربع نقط على الصف ،
- (٢) ويقال للصفين على وجه الخصوص إنهما « متشابهان ، اذا ساوت النسبة البسيطة لـ ٤ ثلاث نقط على أحدهما نظيرتها لثلاث نقط المناظرة على الآخر . وهذه هي الحالة الخاصة لصفين مؤتلفين تقطعاهما اللتين في اللاتمامية متناظرتان أى الحالة التى يؤول فيها الائتلاف الاسقاطي الى ائتلاف مطلق.

ولما كانت هذه الخاصة تبيح لازمة لتعريفنا (بند ٥٦) ومؤدية اليه في حالة الصفوف (لان عكس النظرية السالفة المذكورة في بند ٥٧ صحيح) كان من الممكن أيضاً اتخاذ هذه الخاصة أساساً في تعريف الاشكال المتولفة فيقال إن شكلين مستويين مؤلفان أو اسقاطيان اذا ساوت النسبة المضاعفة لآى صف في أحدهما نظيرتها في الصف المناظر له (قارن تعريف الائتلاف المطلق في بند ١٥) .

بند ٥٩ : الحزم المتولفة

اذا تأملت هزمتاه في شكلين مؤتفعين تسامت نسبتاهما المضاعفتاه أى كانت النسبة المضاعفة لآى أربعة مستقييات في إحدى الحزمتين مساوية للنسبة المضاعفة للمستقييات الاربعة المناظرة في الحزمة الأخرى .

وتظهر لنا صحة هذه النظرية اذا قطعنا الحزمتين بقاطعين متناظرين (بند ٥٣ و) وتتخذ بعض الكتب هذه الخاصة كتعريف للحزم المتولفة أو الاسقاطية .

بند ٦٠ : كيف يتعين العمود الاستويفي بين شكلين

يتعين الائتلاف بين شكلين مستويين اذا علت أربعة أزواج من النقط المتناظرة في الشكلين بحيث لا يكون ثلاثة من النقط في أى الشكلين على استقامة واحدة (قارن هذا بالائتلاف المطلق الذى يتعين بمعلومية ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة) .

البرهان : نفرض أن النقط المعلومة في أحد الشكلين سمى $م١ م٢ م٣ م٤$ فى الآخر $م١' م٢' م٣' م٤'$. فتعين الائتلاف معناه أن هذه النقط الثمانية كافية لإيجاد النقطة $س$ في الشكل $سم$ المناظرة لآية نقطة مفروضة $س$ في الشكل $سم$. وهذا صحيح لأننا اذا اتخذنا إحدى النقط $م١ م٢ م٣ م٤$ ولتكن $م١$ مثلاً رأساً لحزمة أشعتها $م١ م٢ م٣ م٤$ $س$ فانه يمكن دائماً وبطريقة واحدة (بند ٥٣ ج) رسم الشعاع $م١ س$ في الشكل $سم$ بحيث تكون النسبة

أ (ب' ح' و' س') مساوية للمقدار المعلوم الذى تساويه النسبة ١ (ب ح و س) ^(١) فاذا اتخذنا نقطة أخرى مثل ب رأساً لحزمة أخرى وكررنا العملية لايجاد ب' س' المناظر الى ب س فان س' تكون نقطة تقاطع ا' س' ب' س' (ولا معنى للبحث فيما اذا كانت الاشعة الأربعة المختلفة ا' س' ب' س' ح' س' و' س' الى يمكن الحصول عليها باتخاذ ب' ب ح و' و رأساً للحزمة على التوالى — تتلاقى فى نقطة واحدة لأن المفروض أن الشكلىين مؤتلفان وإذن فالنقطة س لا تناظرها إلا نقطة واحدة س').

بند ٦١ : مناظرة النقط والمستقيمات لنفسها

يقال لنقطة إنها « تناظر نفسها » فى شكلىين مؤتلفين اذا كانت هذه النقطة معتبرة كنقطة فى أحد الشكلىين تناظر نفسها معتبرة فى الشكل الآخر بحيث يكون المستقيم المناظر لاي مستقيم مار بها يمر بنفس النقطة . ويقال لمستقيم إنه يناظر نفسه كذلك اذا كانت النقطة المناظرة لاية نقطة على المستقيم تقع أيضاً على نفس المستقيم .

ويرى القارىء بسهولة أن النتائج الآتية صحيحة :

- (١) اذا ناظرت نقطتان نفسيهما فان المستقيم الواصل بينهما يناظر نفسه .
- (٢) اذا ناظر مستقيمان نفسيهما فان نقطة تقاطعهما تناظر نفسها .
- (٣) اذا ناظر مستقيم نفسه فان أية نقطة على المستقيم تناظرها على وجه العموم نقطة أخرى واقعة على نفس المستقيم ولكن يجوز أن تقع على المستقيم نقطتان على الاكثر تناظر كل منهما نفسها أما اذا ناظرت ثلاث نقط على مستقيم واحد كل منها نفسها فان المستقيم يجب أن يناظر نفسه مناظرة بمرأى أن كل نقطة

أخرى من نقطة تناظر نفسها وفي هذه الحالة يكون أى جزء محدود من المستقيم مناظراً لنفسه .

(٤) اذا ناظرت نقطة نفسها فان أى مستقيم مار بها يناظره على وجه العموم مستقيم آخر مار بها ولكن يجوز أن يمر بالنقطة المناظرة لنفسها مستقيمان على الاكثر يناظر كل منهما نفسه أما اذا ناظرت ثلاثة مستقيمان مارة بنقطة واحدة كل منها نفسه فان النقطة يجب أن تناظر نفسها مناظرة تامّة أى أن كل مستقيم آخر مار بها يجب أن يناظر نفسه .

بند ٦٢ : نظريته

النظرية الاولى

اذا اتلف شكله في مستو واحد ووجد مستقيم بحيث تناظر كل نقطة من نقطه نفسها فانه يجمع المستقيمان الواصلين بين النقط المتناظرة تمر بنقطة ثابتة .

للبرهنة على هذه

النظرية نفرض في

(شكل ٦٦) أن المستقيم

المعلوم هو ϵ وأن

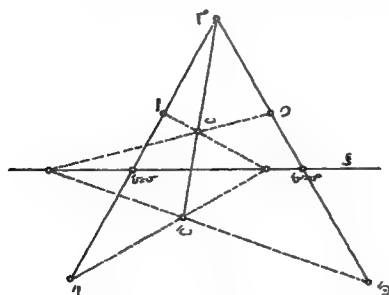
$1, 1', 2, 2', 3, 3'$ زوجان

من النقط المتناظرة فاذا

وصلنا $1, 1'$ فقطع ϵ في

النقطة $س = س'$ فها

أن 1 تناظر $1'$ والنقطة



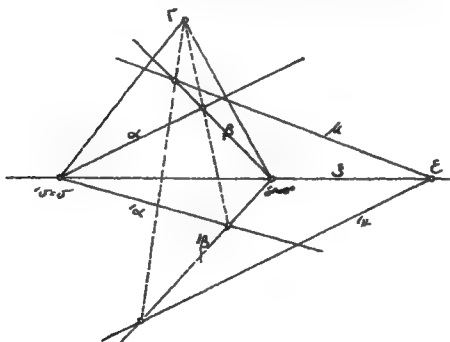
(شكل ٦٦)

$س = س'$ تناظر نفسها فان $س$ يناظر 1 و $س'$ ولما كان 1 و $س'$ هو امتداد المستقيم 1 أى منطبقاً عليه فينتج من ذلك أن المستقيم $11'$ يناظر نفسه وكذلك يكون 2 و $2'$

مناظراً لنفسه فإذا تقاطع $\alpha' \beta'$ في نقطة مثل m وجب أن تكون m مناظرة لنفسها . فإذا كانت m نقطة حيثما اتفق في الشكل الاول ووصل m \Rightarrow قطع ϵ في النقطة $m = m'$ كان المستقيم m من مناظر لنفسه (لأن m تناظر نفسها $\alpha = \alpha'$ تناظر نفسها أيضاً) وإذن فالنقطة m' التي تناظر m يجب أن تقع على المستقيم m من أي أن $m = m'$ يمر بالنقطة m التي تناظر نفسها مناظرة تامة .

النظرية الثانية

إذا اختلف شكلونه في متروا امر ووجرت نقطة بحيث بناظر أي مستقيم مار بها نفسه فانه المستقيمت المتناظرة في الشكليه تنموق على مستقيم و امر .



(شكل ٦٧)

للبهنة على هذه النظرية نفرض في (شكل ٦٧) أن النقطة المعلومة هي m وأن $\alpha \alpha' \beta \beta'$ زوجان من المستقيمت المتناظرة فإذا تلاقي المستقيمان $\alpha \alpha'$ في النقطة m ووصل m من فيما أن α يناظر α' والمستقيم m من يناظر نفسه فالنقطة m' المناظر للنقطة m يجب أن تنطبق عليها وإذن فالنقطة $m = m'$ مناظرة لنفسها

ملفوظات :

(٥١) وهذا معناه أن م نقطة في اللانهاية (بند ٥٢ ب).

(٢) يسمى الالتلاف بين الشككين المشار اليهما في النظريتين السابقتين أى بين الشككين المؤتلفين الموضوعين بحيث تتلاقى المستقيمتان التى تصل أزواج النقط المتناظرة فى نقطة واحدة على بعد نهائى وبحيث (بالتالى) تتلاقى المستقيمتان المتناظرتان على مستقيم ثابت — الميموفأ مركزياً أو منظورياً وتسمى النقطة ٢ بمركز الميموفأ أو مركز النظرية كما يسمى المستقيم Σ بمحور الالتلاف المركزى . ويقال للشككين فى هذه الحالة إنهما مؤتلفاه مركزياً .

وسنفرد الفصل التالى لدراسة الالتلاف المركزى لما لهن أهمية فى الهندسة الوصفية بصفة عامة وفى دراسة منحنيات الدرجة الثانية بصفة خاصة .

الفصل الخامس

الاتلاف المركزى

بند ٦٣ : تعريف

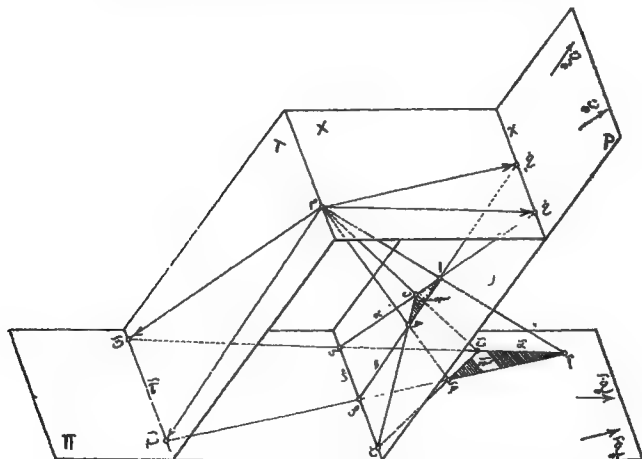
يمكن تلخيص الملحوظة الثانية المذكورة في آخر الفصل السابق فيما يلى :-
يقال إن شكلاً مستوياً سـمـه مكوناً من مجموعة من النقط $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$
يأتف اتسوفاً مركزياً مع شكل مستو آخر سـمـه مكون من مجموعة من النقط
 $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$ تناظر الاولى (مناظرة الفرد للفرد) اذا كانت المستقيمت
 $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$ الواصلة بين النقط المتناظرة تتلاقى فى نقطة واحدة م
(تسمى مركز الاتلاف) وكانت المستقيمت المتناظرة $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$
تتلاقى على مستقيم (يسمى محور الاتلاف المركزى) .
وهناك حالتان يجب التمييز بينهما : الحالة التى يكون فيها الشكلان سـمـه $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$
فى مستويين مختلفين وهى حالة الانعكاس المركزى أو المنظورى (شكل ٦٨) .
والحالة التى يكون فيها الشكلان سـمـه $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$ فى مستو واحد ويطلق عليها اسم
الحالة المنعكسة أو الاتسوف المركزى المنعكس (شكل ٦٩) .

بند ٦٤ : الاتسوف المركزى بين شكلين فى مستويين مختلفين

يبين (شكل ٦٨) العلاقات الرئيسة بين شكلين سـمـه $١ \sim ٢ \sim ٣ \dots$ مؤلفين مركزياً
ومرسومين فى مستويين مختلفين حيث سـمـه هو المسقط المركزى للشكل سـمـه
المرسوم فى المستوى P من النقطة الثابتة M على المستوى II . ونلاحظ على
هذين الشكلين ما يأتى :-

(١) أن المناظرة بين نقط الشكلين هى مناظرة الفرد للفرد فكل نقطة مثل A
فى الشكل سـمـه تناظرها نقطة واحدة A~ فى الشكل سـمـه وبالعكس .

- (٢) أن العلاقة بين الشكلين قطعية بمعنى أن كل مستقيم مثل α في الشكل سيم يناظره مستقيم أيضاً $\tilde{\alpha}$ في الشكل $\tilde{\sigma}$ وبالعكس.
- (٣) أن النقط المتناظرة موجودة على مستقيمتين مارة بالنقطة π التي هي مركز الالتلاف.
- (٤) وينتج من ذلك، أن المستقيمتين المتناظرتين تتلاقى على مستقيم ثابت ξ هو محور الالتلاف.
- (٥) إذا أمرنا بالمركز π مستويين T موازياً للمستوى P قطع المستوى Π في المستقيم τ الذي يوازي المحور ξ فإن هذا المستقيم يعتبر (أنظر بند ٦٥)



(شكل ٦٨)

مناظراً لمستقيم المستوى P الذي في اللانهاية أي أن τ هو المسقط المركزي لمستقيم المستوى P الذي في اللانهاية بحيث تكون المساط المركزية للنقط التي

في اللانهاية الواقعة في المستوى P — واقعة على γ .

وبالمثل اذا أمرنا بالمركز M مستوياً X موازياً للمستوى Π فقطع للمستوى P في المستقيم γ كان هذا المستقيم المحل الهندسي لجميع نقط المستوى P التي مساقطها المركزية أو النقط المناظرة لها في المستوى Π هي نقط في اللانهاية .

فالمستقيمان γ و γ' هما المستقيمان للرسمان في المستويين Π و Π' على التوالي والذي يناظر كل منهما مستقيم المستوى الآخر الذي في اللانهاية . ويطلق على هذين المستقيمين اسم المستقيمين الممردين ويؤخذ من (شكل ٦٨) أنهما يوازيان المحور Ox وأن البعد العمودي للمركز M عن أحدهما يساوي بعد الآخر عن المحور . يتضح مما تقدم أن نقطة في اللانهاية تناظرها على وجه العموم نقطة على بعد نهائي في الالتلاف المركزي وذلك بخلاف الحال في الالتلاف المتوازي .

وقبل أن نتقل الى الحالة المستوية للالتلاف المركزي نذكر في البند التالي بعض النظريات المتعلقة بالعناصر التي على أبعاد لا نهائية وهي النقط والمستقيمات التي في اللانهاية والمستوى الذي في اللانهاية .

بند ٦٥ : العناصر التي على أبعاد لا نهائية

(١) النقط والمستقيمات التي في اللانهاية

ذكرنا في البند السابق بالإشارة الى (شكل ٦٨) أن كل مستقيم مرسوم في المستوى P يقابله أو يناظره مستقيم في المستوى Π . وهذه القاعدة وإن كانت صحيحة على وجه العموم إلا أن لها شاذة هامة في حالة المستقيم المحدد γ المرسوم في المستوى P والموازي للمستوى Π إذ من الواضح أن أى شعاع واصل من M الى أية نقطة من نقط هذا المستقيم لا يلاقى للمستوى Π وإذن فهو لا يقطعه في نقطة يمكن اعتبارها مناظرة لاحتها على المستقيم γ ومن السهل رؤية أن جميع النقط في المستوى P التي لا نظير لها في المستوى Π واقعة على هذا المستقيم γ .

ويحدث هذا الشذوذ أيضاً فى حالة المستقيم المحدود \sim المرسوم فى المستوى Π والموازى للمستوى P فهذا المستقيم هو المحل الهندسى لجميع نقط المستوى Π التى لا نظير لها فى المستوى P .

وقد جرت عادة العلماء على أن يضاف الى المستقيمت المرسومة فى المستوى Π « مستقيم » موجود فى الذهن يسمى « المستقيم الزى فى اللانهاية فى المستوى Π » ويعتبر مسقطاً للمستقيم المحدود γ من النقطة m على المستوى Π . وبالمثل يضاف الى مستقيمت المستوى P مستقيم يسمى « المستقيم الزى فى اللانهاية فى المستوى P » ويعتبر مسقطاً للمستقيم \sim (أو يعتبر المستقيم \sim مسقطاً له على المستوى Π) من النقطة m على المستوى P .

بهذه الطريقة يمكن اعتبار أن كل مستقيم فى المستوى P يناظره مستقيم فى المستوى Π وكل مستقيم فى المستوى Π يناظره مستقيم فى المستوى P ولو أنه لا بد من التفرقة بين مناظرة « مستقيمين عاديين » وبين الحالة الشاذة أو الخاصة وهى مناظرة المستقيم العادى γ فى المستوى P للمستقيم « غير العادى » الذى فى اللانهاية فى المستوى Π وكذا مناظرة المستقيم العادى \sim فى المستوى Π للمستقيم غير العادى الذى فى اللانهاية فى المستوى P . فالمستقيم الذى فى اللانهاية وإن كان معتبراً مجموعة من النقط إلا أنه يكون من الخطأ تصور أن هذه النقط تحدد اتجاهها معينا كما يحدث فى حالة المستقيمت العادية . ومن السهل إدراك أن حزمة المستقيمت فى المستوى P التى تتلاقى مع المستقيم γ فى نقطة واحدة عليه مسقطها على المستوى Π هو مجموعة من المستقيمت المتوازية بل إن جميع المستقيمت فى المستوى Π الموازية لاتجاه ثابت هى مقاطع لمستقيمت فى المستوى P مارة بنقطة ثابتة واقعة على المستقيم المحدود γ . ويقال مثل ذلك عن المستقيمت الموازية لاتجاه ثابت فى المستوى P فهى تناظر مستقيمت واقعة فى المستوى Π ومارة بنقطة ثابتة على المستقيم \sim .

من ذلك نشأ اعتبار أن جميع المستقيمات الموازية لاتجاه ثابت تلاقى المستقيم الذى فى اللانهاية فى نقطة ثابتة عليه ويرمز لمثل هذه النقطة الواقعة فى اللانهاية بالاتجاه الثابت المذكور.

وسنضع علامة ∞ تحت اسم النقطة والمستقيم للدلالة على أن النقطة أو المستقيم فى اللانهاية . فالمستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى Π والمناظر للمستقيم المحدد χ فى المستوى P هو $\chi \infty$ وكذا مستقيم المستوى P الذى فى اللانهاية وللمناظر للمستقيم المحدد τ فى المستوى Π هو المستقيم $\tau \infty$. ويطلق على نقطة مثل t واقعة فى اللانهاية الاسم $t \infty$ ورمز لها بسهم بين الاتجاه الذى يرل عليها (قارن شكل ٦٨) . وعند الكلام على الائتلاف للركزى المستوى سنطلق غالباً — الا اذا نهنا الى غير ذلك — اسم ∞ للدلالة على مستقيم المستوى الذى فى اللانهاية .

والخواص الآتى ذكرها للنقط والمستقيمات التى فى اللانهاية يمكن البرهنة عليها بسهولة بالرجوع الى (شكل ٦٨) —

(١) لا يوجد الا مستقيم واحد فى اللانهاية فى أى مستو معين ^(١) .

(١) اذا فرضنا فى (شكل ٦٨) مستوياً آخر مثل P فان المستوى X المار بالنقطة M موازياً للمستوى Π سيقطع P فى مستقيم جديد χ وقد يقادر الى الذهن أن مسقط χ على المستوى Π يجب أن يكون مستقيماً جديداً فى اللانهاية فى المستوى Π أى أن المستوى Π يجب أن يكون له أكثر من مستقيم واحد فى اللانهاية إلا أن قليلا من التفكير يدلنا على أنه لا كان $\chi \infty$ واقعين فى مستو واحد X مار بمركز الاسقاط M فان مسقطيهما على Π هو مستقيم واحد . واذا غيرنا مركز الاسقاط M الى نقطة أخرى M' ورسمنا منها مستوياً X' موازياً الى Π فلا يزال من الممكن اثبات أن مسقط الوضع الجديد للمستقيم χ على Π هو نفس مسقط المستقيم الاصلى χ على Π وهذا المسقط هو المستقيم الذى فى اللانهاية المشترك بين المستويات الثلاثة المتوازية : $\Pi \infty X \infty X'$ (أنظر الفقرة ب من هنا البند) .

(٢) جميع النقط التي في اللانهاية في أى مستويعين واقعة على المستقيم الذى في اللانهاية في هذا المستوى .

(٣) تعين نقطة واحدة في اللانهاية في كل مستويعين اتجاه ثابت في المستوى أى أن النقطة التي في اللانهاية يمكن أن يرمز لها باتجاه معين يكون دليلا عليها وبذلك يكون الدليل أو الرمز على المستقيم الذى في اللانهاية في أى مستو هو مجموعة الاتجاهات المختلفة التي يمكن رسمها في المستوى .

(٤) المستقيم «الواصل» من نقطة عادية الى نقطة في اللانهاية هو المستقيم المار بالنقطة العادية موازياً للاتجاه المحدد للنقطة التي في اللانهاية .

(٥) «نقطة تقاطع» مستقيم عاى في مستو معلوم مع المستقيم الذى في اللانهاية في المستوى هي النقطة التي في اللانهاية التي يدل عليها اتجاه المستقيم العاى المعلوم .

(٦) «المستقيم الواصل» بين أى نقطتين في اللانهاية في مستو معين هو المستقيم الذى في اللانهاية في المستوى ويكتفى عند ذلك بكتابة اسمه (مثلاً l_{∞}) حيث لا يمكن رسمه .

وبواسطة الخواص والعمليات السابقة يمكننا الآن التكلم عن النقط والمستقيمت التي في اللانهاية كأنها نقط ومستقيمت عادية موجودة على بعد نهائى لأن الفارق الذى أشرنا إليه في أول البند لا يؤثر في هذه العمليات .

(ب) المستويات المتوازية والمستوى الذى في اللانهاية

لما كان مسقط المستقيمت التي في اللانهاية في جملة مستويات متوازية على مستو ثابت هو مستقيم واحد (وهو خط تلاقي المستوى الثابت مع المستوى المار بمركز الاسقاط موازياً للمستويات المتوازية) لذلك قيل إن المستويات المتوازية تشترك في مستقيم واحد في اللانهاية .

فبتحديد اتجاه أو وضع ثابت لجملة مستويات متوازية في الفضاء يتحدد مستقيم في اللانهاية ويكون إذن اتجاه هذه المستويات رمزاً أو دليلاً على المستقيم الذى فى اللانهاية الذى يتعين بها . وإذا غيرنا هذا الاتجاه تغير المستقيم الذى فى اللانهاية وبعبارة أخرى إذا علم مستو فعنى ذلك أنه مستقيم الذى فى اللانهاية معلوم أيضاً . ولما كانت مساحط المستقيمت التى فى اللانهاية فى جملة مستويات على مستو ثابت هو جملة مستقيمت واقعة فى المستوى الثابت لذلك قيل إن المستقيمت التى فى اللانهاية « تقع » كلها فى مستو واحد يسمى المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء .

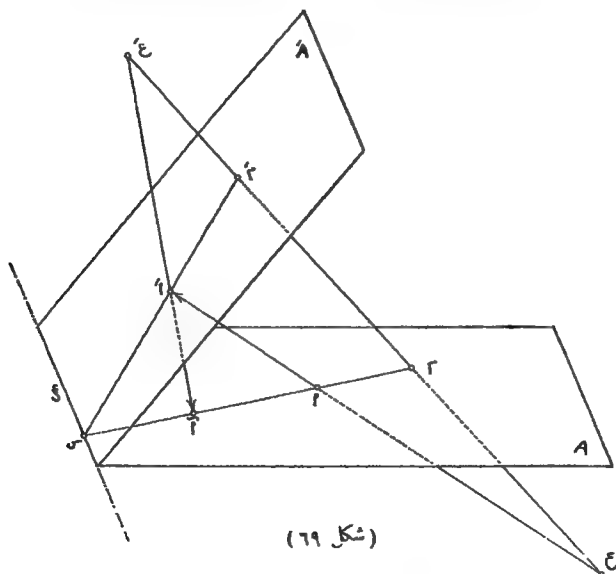
بشر ٦٦ : الاستدلال المركزى المستوى

نفرض أن مجموعة المستويين Π و P فى (شكل ٦٨) بما فى ذلك الشككين المؤلفين ومركز الائتلاف ومحوره — قد أسقطت على مستو ثالث حيثما اتفق فن الواضح أن مسقطى الشككين يكونان شككين مؤلفين مركزياً فى المستوى الجديد حيث تتناظر نقطهما ومستقيمتها مناصرة الفرد للفرد وحيث تمر المستقيمت الواصلة بين أزواج النقط المناظرة بنقطة واحدة (هى مسقط المركز الاصلى ٢) وتتلاقى المستقيمت المتناظرة على مستقيم ثابت (هو مسقط المحور الاصلى ٣) .

ويمكن أيضاً الحصول على مثل هذين الشككين المؤلفين مركزياً فى مستو واحد بالطريقة الآتية :

نفرض فى (شكل ٦٩) أن A و A' مستويان متقاطعان فى المستقيم ϵ وأن النقطة ١ فى المستوى A قد أسقطت من نقطة فى الفراغ مثل ϵ على المستوى A' وأن هذا المسقط قد أسقط ثانية من نقطة أخرى فى الفراغ ϵ' على المستوى الاول A . فإذا رمزنا الى مسقط النقطة ١ من ϵ على المستوى A' بالرمز α' وإلى

مسقط α من ϵ' على المستوى A بالرمز α' وإلى نقطة تقاطع المستقيم ϵ مع المستوى A بالرمز μ (وهي نقطة ثابتة) فإنه يمكن البرهنة بسهولة على أن $\alpha \mu \alpha'$ مستقيم (هو خط تقاطع المستوى A مع المستوى $\epsilon \epsilon'$). وكذلك إذا كانت β نقطة أخرى في المستوى A وعينا النقطة المناظرة β' في نفس المستوى



بالطريقة السابقة فإن $\alpha \mu \alpha'$ يتقابلان بمقتضى (بند ٦٢) على خط التقاطع $\epsilon \epsilon'$ ^(١).

(١) يلاحظ أن μ و ϵ يناظر كل منهما نفسه منظاراً عامة في الاتلاف المركزي بين أي شكلين مرسومين في المستوى A .

فإذا كان سهم شكلا في المستوى A مكونا من مجموعة النقاط $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ وعينا بالطريقة السابقة في نفس المستوى الشكل سهم المكون من مجموعة النقاط $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ فإن العلاقة الهندسية بين الشكليين سهم α سهم β تكون من النوع السابق تعريفه في (بند ٦٣) لأن المناظرة بين نقط الشكليين ومستقيمتهما هي مناظرة الفرد للفرد والمستقيمت الواصلة بين النقط المتناظرة تمر جميعا بالنقطة الثابتة M والمستقيمت المتناظرة تتلاقى على المستقيم الثابت ℓ أى أن هذه العلاقة هي اتلافية مركزية في مستو واحد حيث M مركز الاتلاف والمستقيم ℓ محوره.

وأى شكليين مرسومين في مستو واحد بحيث تتوافر فيهما الشروط المذكورة آنفا يكونان مؤتلفين مركزيا في المستوى.

بند ٦٧ : ما يجب معرفته لتحرير التلغوف المركزى المستوى ونسبة

هذا التلغوف

يتعين الاتلاف المركزى بين شكليين في مستو واحد إذا أمكن إيجاد النقطة في أحد الشكليين المتناظرة لاية نقطة في الشكل الآخر.

ويتحقق هذا إذا علم المحور والمركز وزوج واحد من النقط أو المستقيمت المتناظرة. أو ما يعادل هذه المعاليم ويؤدى إليها.

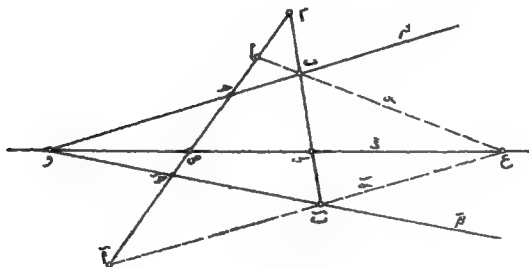
ففى (شكل ٧٠) فرضنا الاتلاف المركزى معلوماً بالمحور ℓ والمركز M وزوج واحد من النقط المتناظرة α, β (حيث α, β مستقيم). فلإيجاد النقطة γ المتناظرة لاية نقطة مثل β نصل النقطتين α, β بالمستقيم $\alpha\beta$ ونفرض أن α يقابل محور الاتلاف ℓ في النقطة γ فيكون الخط الواصل بين γ, α هو المستقيم $\alpha\gamma$ المناظر الى $\alpha\beta$ وتكون النقطة المعلوبة β هي نقطة تقاطع $\alpha\gamma$ و $\alpha\beta$. وإذا كان β مستقيما حيثما اتفق في الشكل الاول ماراً بالنقطة β وقاطعاً

٤ في و كان المستقيم الناظر له في الشكل الآخر هو $\vec{p} \equiv \vec{w}$.

ونوجه نظر القارىء الى ما يأتى (١) :—

اولاً : مركز الائتلاف هو النقطة الوحيدة التى تناظر نفسها في الشكلين
مناظرة تامة .

ثانياً : محور الائتلاف هو المستقيم الوحيد الذى يناظر نفسه في الشكلين
مناظرة تامة فهو المحل الهندسى لجميع النقط (عدا مركز الائتلاف) التى تناظر
كل منها نفسها .



(شكل ٧٠)

ثالثاً : كل مستقيم مار بمركز الائتلاف يناظر نفسه (ولكن ليست مناظرة
تامة) بمعنى أن النقطة عليه تناظرها نقطة أخرى عليه أيضاً ولو أن هاتين النقطتين
لا تطبقان (أى لا تناظر النقطة نفسها) إلا عند تقاطعه مع المحور وعند مركز
الائتلاف نفسه .

رابعاً : اذا تحدد الائتلاف في مستو واحد (بالمحور والمركز ونقطتين
متناظرتين مثلاً) فان أية نقطة في المستوى يمكن اعتبارها إما نقطة من نقط

الشكل الاول لما نظيرة في الثاني أو نقطة من نقط الشكل الثاني لما نظيرة في الاول . وفي الواقع ولو أننا نتحدث عن الاختلاف بين شكلين إلا أن نمرد اوسئدوف انما هو تعيين «للمجموعتين» من النقط نمود كل منهما سطح المستوى وتكون نقط أحد الشكلين نقطاً في إحدى المجموعتين ونقط الشكل الآخر في المجموعة الثانية . وستتكمّل فيما يلي عن «مجموعة الشكل الاول» و «مجموعة الشكل الثاني» على هذا الأساس .

النسبة الثابتة للاختلاف المركزي المستوى

إذا قطع المستقيمان AB و CD بمحور الالتفاف E في M من على التوالى (شكل ٧٠) فإنه بناء على نظرية باپيس (بند ٥٣ و) يكون:

$$(م ص ب) = (م ص ب) = (م ص ب) = (م ص ب) = \dots = (م ص ح) = \text{مقدار ثابتا } \psi$$

ومعنى ذلك أنه إذا رسم من مركز الائتلاف م أى مستقيم يقطع المحور في نقطة مثل ص وكان $\alpha \sim 1$ أى زوج من النقط المتناظرة على المستقيم م ص فإن النسبة المضاعفة للنقط الأربع م ص $\alpha \sim 1$ تساوى مقداراً ثابتاً وتساوى نظيرتها للنقط الأربع المائلة الواقعة على أى مستقيم آخر مار بالمركز م ^(١).

بند ۶۸: المستقیمانہ المحدثانہ فی الاثنون المרכזی المستوی

إذا علم شكلان σ و τ مؤلفان مركزياً ومرسومان في مستو واحد ورسم أى مستقيم $\chi \equiv \tau$ في مستويهما فانه يمكن دائماً على وجه العموم إيجاد مستقيمين مختلفين χ و τ بحيث أن χ باعتباره مستقيماً في مجموعة الشكل σ يناظر المستقيم τ باعتباره مستقيماً في مجموعة الشكل σ وأن τ باعتباره

(١) النسبة المضاعفة هنا تقابل النسبة البسيطة في حالة الائتلاف المتوازي (بند ١٢).

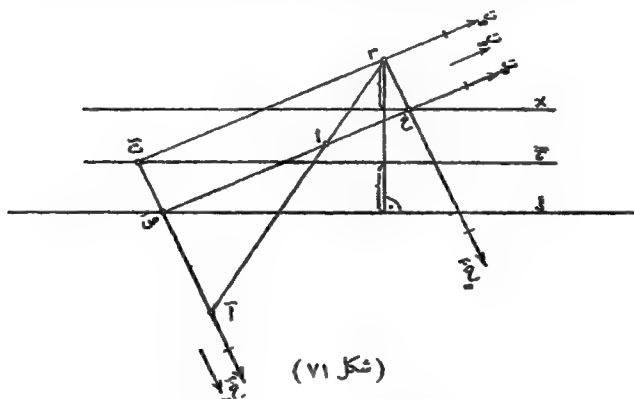
مستقيماً مرسوماً في مجموعة الشكل \tilde{S} ينظر المستقيم τ نفسه باعتباره جزءاً من مجموعة الشكل \tilde{S} (بند ٦٧) . فإذا اعتبرنا الحالة التي يكون فيها المستقيم $\tilde{X} \equiv \tau$ المذكور هو المستقيم الذي في اللانهاية في مستوى الشكلين (ورمزنا إليه في هذه الحالة بالرمز $\tilde{X} \equiv \tau_{\infty}$) فإن $\tilde{X} \cap \tau$ يؤولان حيثئذ إلى المستقيمين المحددين في الاثنوف المركزي المستوى (راجع المستقيمين المحددين في حالة الائتلاف المركزي بين شكلين في مستويين مختلفين في بند ٦٤)^(١) .

فلنفرض الآن في (شكل ٧١) أن الائتلاف المركزي تحدب بواسطة المركز ∞ والمحور ε وزوج من النقط المتناظرة $\tilde{A} \in \tau$ ثم نفرض نقطة ما في اللانهاية ∞ (اتجاه معين) ونعتبرها نقطة في مجموعة الشكل \tilde{S} ثم نجد في المجموعة الأخرى للشكل \tilde{S} النقطة المتناظرة \tilde{A} كما سبق بيانه في (بند ٦٧) : « فصل ، لذلك \tilde{A} » بالنقطة ∞ ونفرض أن المستقيم τ يقابل المحور ε في نقطة مثل ∞ ونصل ∞ وبذا تكون النقطة المطلوبة \tilde{A} هي نقطة تقاطع المستقيم τ مع المستقيم الذي « يصل ، ∞ » بالنقطة ∞ . ويكون المستقيم المحدب τ المرسوم في

(١) يستطيع القارئ أن يكون لنفسه فكرة عن الوضع الأصلي في الفراغ لمثل هذين المستقيمين المحددين في الائتلاف المركزي المستوى بالرجوع إلى (بند ٦٦) . فإذا رسمنا من ε على τ في (شكل ٦٩) مثلاً مستويين موازيين إلى A ويلاقين A في $\tau \cap \varepsilon$ على التوالي فإن مسقط τ من ε على A ومسقط ε من ε على A أيضاً يكونان على التوالي المستقيمين المحددين $\tilde{X} \cap \tau$ والمنظرين إلى المستقيم الذي في اللانهاية في المستوى A باعتباره جزءاً من مجموعة الشكل \tilde{S} وجزءاً من مجموعة الشكل \tilde{S} في نفس الوقت . كذلك إذا أسقطنا مجموعة المستويين $P \cap \Pi$ في (شكل ٦٨) إسقاطاً متوازياً على مستوئ A فإن المستقيم الذي في اللانهاية في المستوى A يمثل حيثئذ مسقطي المستقيمين اللذين في اللانهاية في المستويين $P \cap \Pi$ ويكون مسقط $\tau \cap \varepsilon$ على A هما المستقيمان المحددان في الائتلاف المركزي في المستوى A .

مجموعة الشكل \sim والذي يناظر مستقيم للمستوى الذي في اللانهاية ∞^2 باعتباره مرسوماً في مجموعة الشكل \sim — هو المستقيم الذي يمر بالنقطة γ ويتقاطع مع ∞^2 في نقطة على محور الالتلاف ξ . ولما كانت « نقطة تقاطع » المستقيم الذي في اللانهاية ∞^2 مع المحور ξ هي نقطة ξ التي في اللانهاية وجب أن يتقاطع γ مع ξ في اللانهاية أى أن يكون γ موازياً لمحور الالتلاف ξ .

وإذا اعتبرنا نقطة في اللانهاية مثل γ أنها إحدى نقط مجموعة الشكل \sim وعيناً كما تقدم النقطة γ المناظرة لها في مجموعة الشكل \sim فإن المستقيم المحدد الثانى x للرسوم في مجموعة الشكل \sim والذي يناظر المستقيم الذي في اللانهاية (ولنسم هذا الأخير لهذا السبب γ وإن كان هو نفس المستقيم ∞^2 السالف الذكر)



باعتباره مرسوماً في مجموعة الشكل \sim — يمر بالنقطة γ ويكون موازياً للمحور ξ لنفس السبب الذي من أجله يوازى γ هذا المحور .

ولما كان m γ \sim في (شكل ٧١) متوازياً أضلاع وجب أن يكون

بعد m العمودى عن المستقيم المحدد γ مساوياً في الاتجاه المضاد لبعـد المحور العمودى عن المستقيم المحدد γ .

ويمكن تلخيص ما تقدم في النظريتين الآتيتين:—

أولاً : المستقيمان المحددان في ائتلاف مركزى مستوى متوازيان ويوزيان محور ائتلاف .

ثانياً : البعد العمودى لأحد المستقيمين المحددين عن مركز ائتلاف يساوى بعد الآخر في الاتجاه المضاد عن محور ائتلاف . أو بعبارة أوضح : منتصف العمود النازل من مركز ائتلاف على محوره هو في نفس الوقت منتصف البعدين المستقيمين المحددين . فالمستقيمان المحددان على هذا إما أن يكونا مرسومين معا بين مركز ائتلاف ومحوره أو أن يكون المركز والمحور واقعين بينهما — وعلى بعدين متساويين منهما (١) .

وبمقتضى هاتين النظريتين يكفي لرسم المستقيمين المحددين γ في ائتلاف مركزى مستوى أن نعين نقطة واحدة مثل t في مجموعة أحد الشكلين s تكون مناظرة لنقطة في اللانهاية t_{∞} باعتبارها في مجموعة الشكل الآخر s فيكون أحد المستقيمين المحددين γ هو المستقيم المرسوم من t موازياً للمحور ويكون المستقيم المحدد الآخر γ هو المستقيم المرسوم موازياً للمحور أيضاً وعلى بعد عمودى منه يساوى وبضاد البعد العمودى للمستقيم γ عن المركز .

(١) لما كانت هاتان النظريتان يمكن اعتبارهما في حالة ائتلاف المركزى بين شكلين في مستويين مختلفين نتيجة مباشرة لتعريف هذا ائتلاف (أنظر بند ٦٤) فإنه يمكن أيضاً البرهنة عليهما في الحالة المستوية باستخدام نظريات الهندسة الفراغية وذلك بالرجوع مثلاً الى (شكل ٦٨) إذا اعتبرنا هذه الحالة الأخيرة ناشئة عن إسقاط شكلين مؤلفين مركزياً ومرسومين في مستويين مختلفين على مستو ثالث — أو بالرجوع الى ما ذكرناه في هامش صحيفة ١٨١ على ضوء (شكل ٦٩) .

بشر ٦٩ : حالات خاصة لموتنوف المركزي المستوى

أولاً : مركز الالتلاف نقطة في اللانهاية

في هذه الحالة يؤول الالتلاف المركزي الى ائتلاف متواز (راجع شكل ١٩)
وتؤول النسبة المضاعفة في حالة الالتلاف المركزي الى النسبة البسيطة :

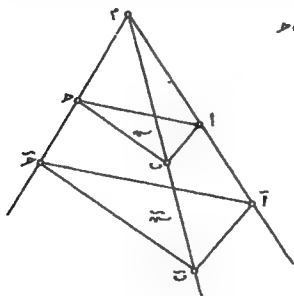
$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \dots = \text{مقداراً ثابتاً } k$$

فإذا كانت $k = 1$ أي إذا كان $1/1 = 1/1$ وكذا $1/1 = 1/1$...

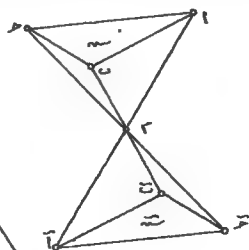
في (شكل ١٩) قيل للشكلين سهم ١ وسهم ٢ لأنها متماثلتان بالنسبة للمحور
ويكون هذا التماثل مائلاً أو عمودياً على حسب كون اتجاه الالتلاف مائلاً أو
عمودياً على المحور .

ثانياً : محور الالتلاف المركزي هو المستقيم الذي في اللانهاية

في هذه الحالة تقاطع المستقيمتان المتناظرتان جميعاً على ابعاد لا نهائية أي تكون



(١)



(شكل ٧٢)

(ب)

متوازية (شكل ٧٢) ويقال للشكلين سهم ١ وسهم ٢ حيث إنهما متشابهتان شكلاً

ورضعاً بالنسبة لمركز اقتضاه م وتوول النسبة المضاعفة الثابتة للائتلاف المركزى الى النسبة البسيطة :

$$\frac{12}{12} = \frac{2}{2} = \dots = \text{مقداراً ثابتاً } x$$

فإذا كانت $x = 1$ أى إذا كان $12 = 12$ $2 = 2$ \dots

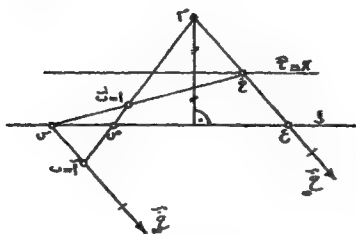
(شكل ٧٢ ب) قيل للشكلين فى هذه الحالة الخاصة إنهما متماثلان بالنسبة للمركز (مثل مركزى).

ثالثاً: الحالة التى ينطبق فيها المستقيمان المحددان

ذكرنا فى (بند ٦٧) أنه إذا تحدد الائتلاف المركزى بين مجموعتين فى مستو واحد فإن أية نقطة فى المستوى يمكن اعتبارها إما نقطة من نقط المجموعة الاولى لها نظيرة فى الثانية أو نقطة من نقط المجموعة الثانية لها نظيرة فى الاولى ويقال مثل ذلك عن المستقيمتين . ويستطيع القارىء أن يقتنع نفسه بالعمل أن النقطتين المناظرتين لنقطة واحدة هما على وجه العموم وفى الائتلاف العادى نقطتان مختلفتان وواقعتان على مستقيم مار بمركز الائتلاف وأن المستقيمين المرسومين كل منهما فى إحدى المجموعتين مناظراً لمستقيم واحد باعتباره مرسوماً فى المجموعة الأخرى — أى المستقيمين المناظرين لمستقيم واحد هما على وجه العموم مستقيمان مختلفان متقابلان على المحور .

إلا أنه إذا كان أحد المستقيمين المحددين فى منتصف المسافة بين مركز الائتلاف ومحوره فإن المستقيم المحدد الآخر ينطبق عليه بحيث يكون $x \equiv 1$ (شكل ٧٣) . ومعنى ذلك أن المستقيمين المرسومين كل منهما فى إحدى المجموعتين مناظراً للمستقيم الذى فى اللاتمامة باعتباره مرسوماً فى المجموعة الأخرى — هما فى هذه الحالة الخاصة مستقيمان منطبقان وليسا مختلفين كما هو الحال فى الائتلاف العادى .

فالذا فرضت في (شكل ٧٣) نقطة ما في المستوى مثل $\bar{1} \equiv \bar{2}$ فإن النقطتين $\bar{1}$ و $\bar{2}$ اللتين يمكن تعيينهما بحيث أن $\bar{1}$ باعتبارها إحدى نقط المجموعة $\bar{1}$ تناظر النقطة $\bar{2}$ باعتبارها إحدى نقط المجموعة $\bar{2}$ وأن $\bar{2}$ باعتبارها نقطة في المجموعة



(شكل ٧٣)

سواء تناظر نفس النقطة المفروضة $\bar{2}$ باعتبارها نقطة في المجموعة $\bar{1}$ — فإن هاتين النقطتين تنطبقان في هذه الحالة (وفيها وحدها) بحيث يكون $\bar{1} \equiv \bar{2}$ أيضاً . ومثل ذلك يقال عن أى مستقيم مرسوم في المستوى .

ويقال لمثل هذا التناظر إنه تناظر متبادل وتؤول النسبة المضاعفة الثابتة للاتلاف المركزي الى نسبة توافقية لأن :

$$\psi = (1, 2, 3, \infty) = (2, 1, 3, \infty) = (1, 2, 3, \infty)$$

ولذا سمي الاتلاف المركزي في هذه الحالة بالـ اتلاف مركزي التوافقي . (١)

ملحوظة

إذا كان مركز الاتلاف نقطة في اللانهاية وكان محور الاتلاف هو المستقيم النقي في اللانهاية فإن الاتلاف المركزي يؤول في هذه الحالة الى تطابق أو تساوي .

(١) ويسمى أحياناً أيضاً ، بالاتلاف المركزي التضامني ، لارتباطه بالتضامن (أنظر بند ٩٤) .

الفصل السادس

المنحنيات المؤتلفة مركزياً مع الدائرة

بند ٧٠ : ارتباط نوع المقطع المخروطي باعتباره مسقطاً مركزياً لدائرة بالعمود
بين الدائرة والمستقيم المحدد المرسوم في مستورها

ذكرنا في (بند ٥١) أن المسقط المركزي للدائرة هو على وجه العموم مقطع مخروطي . فإذا فرضت دائرة في المستوى P في (شكل ٦٨) فإن مسقطها من π على المستوى Π يكون منحنيًا مقللاً أي قطعاً ناقصاً (بند ٤٧) إذا لم تقطع الدائرة المستقيم المحدد χ . أما إذا قطعت الدائرة هذا المستقيم فإن جزئي محيطها الواقعين في ناحيتين مختلفتين من هذا المستقيم يكون مسقطاهما شعبتين منفصلتين لأن قطبي تلاقيهما (وهما مسقطا نقطتي تقاطع الدائرة مع المستقيم المحدد χ) هما نقطتان على بعد لا نهائي ومعنى هذا أن الشعبتين لا يلتقيان وإذن يكون المسقط في هذه الحالة قطعاً زائداً (بند ٤٨) . أما إذا مست الدائرة المستقيم المحدد χ فإن المسقط في هذه الحالة يكون منحنيًا ذا شعبة واحدة ويمتدأ من ناحية واحدة إلى بعد لا نهائي أي أنه قطع مكافئ (بند ٤٩) .

بند ٧١ : المقطع المخروطي كمنحنى مؤتلف مع دائرة في مستورها

معلوم من الهندسة التحليلية أن كل منحنى (غير منحل) من الدرجة الثانية إما أن يكون قطعاً ناقصاً (دائرة) أو زائداً أو مكافئاً ولما كان المستقيم الذي في اللانهاية باعتباره مستقيماً كبقية المستقيبات في مستوى منحنى من الدرجة الثانية — يقطع هذا المنحنى في نقطتين (حقيقيتين أو تخيليتين) وكان القطع الناقص منحنيًا مقللاً ليست له نقط حقيقيّة في اللانهاية والقطع الزائد له نقطتان حقيقيتان

(مختلفتان) في اللانهاية والقطع المكافئ له نقطة واحدة (أى نقطتان حقيقتان متحدتان) في اللانهاية فإن ينتج أن منحني الدرجة الثانية (أى المقطع المخروطى) يكون قطعاً ناقصاً أو زائداً أو مكافئاً على حسب كون المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى غير قاطع له (فى نقط حقيقية) أو قاطعاً له (فى نقطتين حقيقتين مختلفتين) أو ماساً له على التوالى (١).

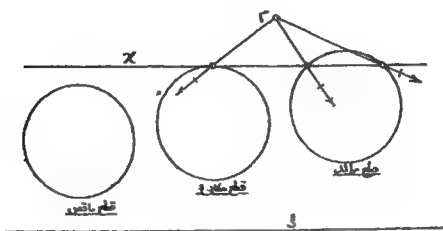
ولما كانت الدرجة من الخواص التى لا تتغير بالاسقاط فإنه يمكن أن نستنتج ماسبق أن قررناه من أن المنحنيات المؤتلفة مركزياً مع الدائرة — سواء كان هذا الائتلاف فى مستويين مختلفين أو فى مستو واحد — وكذا المنحنيات المؤتلفة مع الدائرة ائتلافاً إسقاطياً علماً هى مقاطع مخروطية.

ولتوضيح ذلك فى حالة الائتلاف المركزى المستوى نفرض فى (شكل ٦٩) دائرة مرسومة فى المستوى A وأتأ أسقطنا هذه الدائرة من E على المستوى A فيكون المسقط مقطعاً مخروطياً. فإذا أسقطنا هذا المقطع من E' على المستوى الاول A كان المسقط الاخير منحنياً من الدرجة الثانية أى مقطعاً مخروطياً جديداً فى المستوى A مؤتلفاً ائتلافاً مركزياً مع الدائرة المرسومة فى نفس المستوى A وتكون فى هذه الحالة النقطة M مركز الائتلاف كما يكون المستقيم E محور هذا الائتلاف.

فإذا علم ائتلاف مركزى مستوى بالمركز والمحور وزوج من النقط المتناظرة وعلمت كذلك دائرة ثم رسم المستقيم المحدد χ فى مجموعة الدائرة الذى يناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مستقيماً فى مجموعة المنحنى المؤتلف مع الدائرة مركزياً (بند ٦٨) فإن هذا المنحنى يكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً

(١) قارن أيضاً (بند ٧٠) حيث المستقيم المناظر الى χ فى المستوى Π هو كما قدمنا المستقيم الذى اللانهاية فى هذا المستوى .

على حسب كون المستقيم المحد γ (وليس المستقيم المحد الآخر γ' الذى يناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة الدائرة) قطعاً للدائرة أو مماساً لها أو غير قاطع لها على التوالى (شكل ٧٤) لأن المستقيم الذى فى اللانهاية المناظر للمستقيم المحد γ يقطع المنحنى المولّد مركزياً مع الدائرة فى الحالة الاولى فى نقطتين ويمس هذا المنحنى فى الحالة الثانية وفى الحالة الاخيرة لا يلاقيه .



(شكل ٧٤)

وبالنظر الى أن نوع المقطع المخروطى يتوقف على المستقيم المحد γ فانه يطلق على هذا المستقيم أحياناً اسم المستقيم المحد المعين لنوع المقطع المخروطى .

بند ٧٢ : كيفية رسم المقطع المخروطى المولّد مركزياً مع الدائرة .

لرسم المنحنى المولّد مركزياً مع الدائرة اذا علمت هذه الدائرة ومركز الالتلاف M ومحوره E والمستقيم المحد γ المعين لنوع المنحنى (أى المناظر للمستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة المقطع المخروطى) نفرض أن المطلوب تعيين النقطة A' على هذا المنحنى التى تناظر نقطة معينة مثل A على الدائرة فلذلك نصل M ثم نرسم أى مستقيم مار بالنقطة A ليقطع المحور E فى نقطة مثل C

والمستقيم المحدد x في نقطة مثل l ونصل l . فإذا رسمنا من c مستقيماً موازياً إلى l ليقطع am في a' فإن a' تكون هي النقطة المناظرة إلى النقطة a أى تكون إحدى نقط المقطع المخروطي ^(١) . ويكون المستقيم المناظر لـ ay مستقيم مار بالنقطة a هو مستقيم مار بالنقطة a' وبنقطة تقاطع المستقيم المعلوم مع المحور z فإذا كان المستقيم المعلوم هو عماس البائرة في a كان المستقيم المناظر هو عماس المقطع المخروطي في a' (بند ٦٧) .

ولايجاد مركز المقطع المخروطى نجد قطب المستقيم المحدد γ بالنسبة للدائرة وليكن نقطة مثل $و$ ثم نجد $و'$ المناظرة الى $و$ بالطريقة السابقة فتكون $و'$ هي مركز المقطع المخروطى.

ولتعيين قطرين مترافقين في المنحنى نرمس مستقيمين مترافقين بالنسبة للدائرة ومقاطعين في O ثم نجد المستقيمين الناظرين لها (والمقاطعين في O) فيكون هذان المستقيمان قطرين مترافقين في المقطع المخروطي (بند ٥٥) -

وترك إثبات صحة العمليات السابقة للقارىء. وسنقتصر فيما يلى على شرح الحالتين التى يكون فيها المنحنى قطعاً زائداً ومكافئاً.

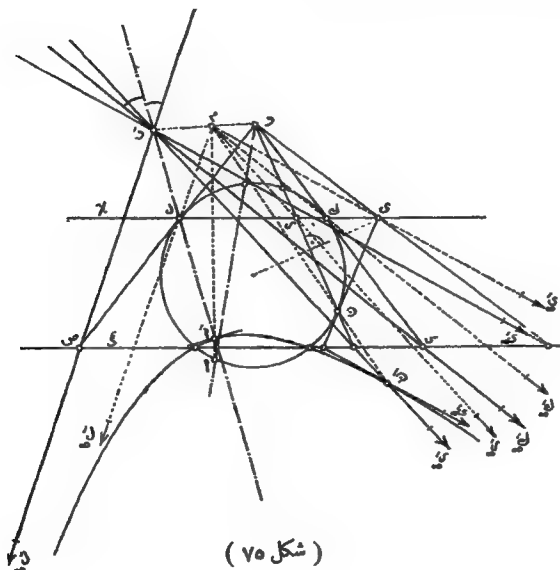
بند ۷۳: الحالة التي يكونه فيها المنص قطعاً زائراً - فواص جديدة

للقطع الزائر

يبين (شكل ٧٥) الحالة التي يكون فيها المنحنى المؤلف مركزياً مع الدائرة قطعاً زائداً حيث M مركز الالتلاف ∞ و E محور الالتلاف ∞ المستقيم المحدد المعين لنوع المنحنى والذي انلك يقطع الدائرة في نقطتين حقيقيتين U و L . وقد عينا في الشكل المركز و' للقطع الزائد والقطرين المترافقين و' M و' U و' L و' ∞

(١) وذلك لأن أية نقطة مثل $ل$ على γ تناظرها في مجموعة المقطع المخروطي النقطة التي في اللاتجاهية $ل$ $م$ التي يدل عليها الاتجاه $م$.

بالطريقة المينة سابقاً . وسنشرح فيما يلي كيفية رسم المستقيمين التقريبيين والرأسين وكذا بعض الخواص الجديدة :—



(١) المستقيمان التقريبيان

هما المستقيمان المناظران للمسى الدائرة في $و$ $ل$ (تقطعي تقاطع الدائرة مع المستقيم المحدد x) فإذا قابل هذان المماسان المحور $ع$ في $س$ $و$ $ص$ على التوالي كان المستقيمان التقريبيان هما المستقيمان المرسومان من $س$ $و$ $ص$ موازيين على التوالي إلى المستقيمين $م$ $و$ $م$ $ل$ اللذين يحددان النقطتين $ك$ $و$ $ل$ اللتين في اللانهاية .

(ب) الرأسان

إذا كان $و'١$ هو المحور القاطع في القطع الزائد (أى منصف الزاوية بين المستقيمين التقريبيين) فإن المستقيم المناظر له $و١$ في مجموعة الدائرة يقابلها في نقطتين هما المناظرتان للرأسين (وقد اكتفينا في الشكل بتعيين الرأس ١ لأن الرأس الثانية تقع بعيداً) .

(ح) الاطار للمراقبة

أى مستقيم مثل $و١$ يمر بالنقطة $و$ قاطعاً الدائرة في نقطتين يكون المناظر له في المنحنى قطعاً $و'١$. فإذا كانت $و١$ قطب المستقيم $و١$ بالنسبة الى الدائرة (ويجب بمقتضى النتيجة الثالثة من النظرية الثالثة في بند ٤٤ أن تقع $و١$ على $و١$ لأن $و١$ قطب $و١$ بالنسبة للدائرة) ووصل $و١$ كان $و١$ مستقيماً مترافقاً بالنسبة الى الدائرة . فإذا كان $و'١$ هو المستقيم المناظر الى $و١$ وجب أن يكون $و'١$ و $و'١$ قاطعين مترافقين في القطع الزائد ولما كان ثانيهما لا يقابل القطع الزائد فإنه يسمى قطعاً غير قاطع ويكون طوله تخيلاً ^(١) .

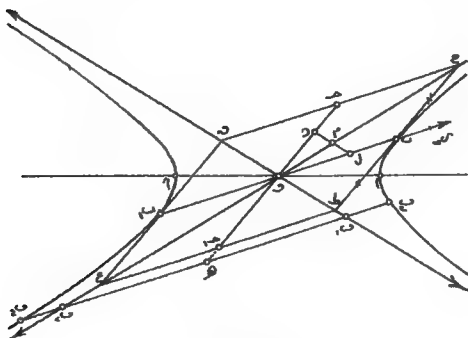
(د) خواص جديدة

$١ - ١ = (و'١ و'١)$ و $١ - ١ = (و'١ و'١)$
ويستج من ذلك أن حزمة المستقيمت المكونة من المستقيمين التقريبيين والقطرين المترافقين $و'١ و'١$ هي حزمة توافقية أو بتعبير آخر :

(١) قارن الحالة التى يكون فيها المنحنى المؤلف مركزياً مع الدائرة قطعاً ناقصاً ففى هذه الحالة يكون قطب $و١$ بالنسبة للدائرة واقعاً داخلها ولذا كانت جميع أقطار القطع الناقص قاطعة له فى نقط حقيقية .

كل زوج من الاقطار المترافقة في القطع الزائري يفصل المستقيمين التقريبيين توافقياً .
وفي حالة القطع الزائد القائم يكون المستقيمان التقريبان هما المنصفان الداخلي
والخارجي للزاوية المحصورة بين أى زوج من الاقطار المترافقة .

وباستخدام الخاصية السابقة يمكن الحصول بسهولة على القطر المرافق لآى
قطر معلوم مثل ب ب_١ في قطع زائد . ففرض لذلك (شكل ٧٦) نقطة ما مثل
ل على القطر المعلوم ب ب_١ ونرسم منها موازياً لاحد المستقيمين التقريبيين
فيقطع الآخر في نقطة مثل م ثم نقيس على هذا الموازى البعد $م = ل$
ونصل و م فيكون هو القطر المرافق للقطر ب ب_١ المعلوم .



(شكل ٧٦)

ويسمى الطول ح ط المحصور بين المستقيمين التقريبيين للمماس القطع الزائد في
إحدى نهايتى أى قطر قاطع بطول اقطر المرافق له وذلك لانه يساوى البعد
(التنخيل) بين نقطتى تقاطع القطر المرافق مع المنحنى مقسوماً على $\sqrt{1 - e^2}$ (راجع
الهندسة التحليلية) .

فالقطع الزائد يتعين إذن إذا علم منه قطران مترافقان طولاً واتجاهاً مثل
 b, c, d, e (شكل ٧٦) .

وإذا رسم في (شكل ٧٦) مستقيم مواز للقطر القاطع b, c فقطع المنحنى
 في النقطتين f, g وقابل المستقيمين التقريبيين في f, g و c, d والقطر
 المرافق للقطر b, c في h فإن h لا بد أن تكون منتصف البعد c, d لأن
 $(f, g, h, \infty) = 1$ وكذلك تكون h منتصف c, d لأن
 القطر في أى مقطع مخروطي ينصف الاوتار الموازية للقطر المرافق له (بند ٥٥) .
 ينتج مما تقدم أن $f, g, h, \infty = 1$ و $c, d, h, \infty = 1$ و $f, g, h, \infty = 1$ ولما
 كان هذا حقيقياً لكل وتر قاطع في القطع الزائد (لأن القطر b, c حيثما اتفق)
 فإن النتيجة السابقة يكون معناها :

إذا رسم في القطع الزائد وتر يقطع في نقطتين f, g جزء الوتر المسمود بأحدى
 النقطتين ونقطة تخاطمه مع أحد المستقيمين التقريبيين مساوياً لجزء المسمود بالنقطة الأخرى
 ونقطة تخاطمه مع المستقيم التقريبي الأخرى .

وبالنظر إلى أن أى قطرين مترافقين بالنسبة إلى القطع الزائد هما أيضاً مترافقان
 بالنسبة إلى المستقيمين التقريبيين فإن النقطة h في (شكل ٧٦) تكون منتصف
 c, d وهذا معناه :

إذا رسم مماس لقطع زائد فقابل المستقيمين التقريبيين في نقطتين فانت نقطة التماس
 منتصف البعدين هاتين النقطتين .

(هـ) كيفية رسم القطع الزائد إذا علم منه المستقيمان التقريبيان وإحدى النقطتين

بواسطة الخواص السابقة يمكن بسهولة تعيين أى عدد من نقط المنحنى
 بالمماسات فيها . فمثلاً إذا رسمنا من h مستقيماً حيثما اتفق يقابل المستقيمين

ولتعيين رأس القطع الزائد في هذه الحالة نتصف في (شكل ٧٧) الزاوية المحصورة بين المستقيمين التقريبين بمستقيم فيكون هو المحور القاطع . فاذا رسمنا من النقطة المعلومة ω موازيين للمستقيمين التقريبين قبالا المحور القاطع في ω_1 و ω_2

بحیث یكون م س =

فمن السهل إدراك أن

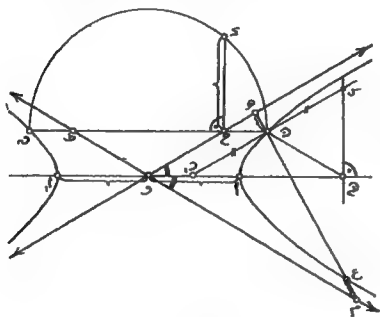
مس (الذي يجب أن

يكون عمودياً على المحور

القاطم) هو الخط

القطي للنقطة n بالنسبة

للمنحني . فإذا كان رأساً



(شکل ۷۷)

القطع الزائد المطلوب تعيينهما هما ١ و ٢، فإن

$$(11, 12, 13) = 1 \quad \therefore 1, 2, 3 \text{ و } 12 = \overline{13} \text{ (بند ۵۴)}$$

وبذا يتحدد الطول l وهو نصف المحور القاطع.

ولايجاد هذا الطول بواسطة الرسم نرسم من ω الموازي $\omega \parallel \nu$ للحدود القاطع

فيلقى المستقيمين التقريبيين في \mathcal{H} ونأخذ عليه البعد $\mathcal{U} = \mathcal{H}$ فنكون \mathcal{U} نقطة على المنحنى ثم نرسم الدائرة التي قطرها \mathcal{U} ونزعم من \mathcal{H} عموداً على المحور

الى l والتي هي قطب المحور بالنسبة الى القطع المكافئ). واذا كانت 1 نقطة تماس المماس المرسوم من l الى الدائرة فان النقطة 1 المناظرة اليها هي رأس القطع المكافئ ويكون المستقيم المرسوم من 1 موازياً الى m و k محور القطع المكافئ. وليكن $e \equiv k$ وترأ في الدائرة مارأ بالنقطة k فالمستقيم e المناظر لمحو قطر في القطع المكافئ نهايته e' المناظرة الى e . واذا كان e مماس الدائرة في e حيث s نقطة تقاطعه مع محور الاختلاف g ووصل s الى e' كان s مماس القطع المكافئ في e' فلذا فرضنا أن s يلاقى المماس في الرأس في النقطة u وأقيم من u عمودى على e s' فان هذا العمود يقابل محور القطع في البؤرة b (راجع بند ٤٩).

واذا علم اتجاه معين في مجموعة القطع المكافئ فهذا الاتجاه يدل كما قدمنا على نقطة في اللانهاية مثل s' في هذه المجموعة تكون النقطة s المناظرة لها في مجموعة الدائرة إحدى نقط المستقيم المحد x وحيث إنه لا يمكن حينئذ رسم أكثر من مماس واحد من s الى الدائرة (زيادة على المستقيم المحد نفسه) لذلك كان غير ممكن رسم أكثر من مماس واحد للقطع المكافئ موازياً للاتجاه المعلوم الذى يدل على s' (زيادة على مستقيم المستوى الذى في اللانهاية والمعتبر مماساً للقطع).

وبين (شكل ٧٩) بعض خواص جديدة للقطع المكافئ فالمماس في النقطة e يحدد النقطة s' التى في اللانهاية والتي هي قطب القطر $e \equiv k$ k المار بالنقطة e (قارن أيضاً شكل ٧٨). فلذا فرضت على هذا القطر نقطة ما مثل s وكان خطها القطبي بالنسبة للنحنى هو $e \equiv k$ e الذى يجب أن يمر بالنقطة s' أى يكون موازياً الى المماس في e — فانه ينتج أن

$$(s \text{ و } k \text{ و } s') = -1 \quad (\text{حيث } e \text{ نقطة تقاطع } e \text{ و } k)$$

∴ منتصف $س و$

وظاهر من الشكل أيضاً أنه لما كانت النقطة $س_{\infty}$ قطب القطر $م$ كما قدمنا فإن

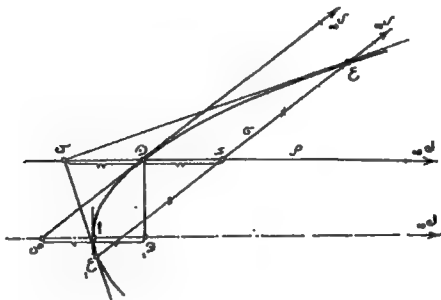
$$١ - = (ع ع, س_{\infty})$$

∴ منتصف $ع ع,$

وإذا كانت $س$ نقطة تقاطع المماس في $م$ مع المحور وأزلعن $م$ العمودي $م م,$

على المحور كان $م م,$ الخط القطبي للنقطة $س$ بالنسبة للمنحنى وينتج من هذا أن

$$١ - = (س م, المماس)$$



(شكل ٧٩)

أى أن ١ منتصف البعد $س م,$ الذى يطلق عليه اسم قوس المماس وهذه هي الخاصية نفسها التى حصلنا عليها بطريقة أخرى فى (بند ٤٩ ح).

الفصل السابع

استخدام الائتلاف المركزي في حل بعض المسائل

المتعلقة بالمقاطع الخروطية وفي رسم دائرة الانحناء

بند ٧٥ : الاستدلال المركزي بين أي مقطعين مخروطيين مرصين في مستو واحد

إذا رسم في مستو مثل II مقطعان مخروطيان ع_١ ع_٢ (أو مقطع مخروطي ودائرة باعتبار الدائرة حالة خاصة للمقاطع المخروطية) فن حيث إنه يمكن دائماً إيجاد مقطع مخروطي آخر مثل ع (غير واقع في المستوى II) يكون المنحنيان ع_١ ع_٢ مسقطين له ^(١) فإن المقطعين المخروطيين ع_١ ع_٢ المرصين في المستوى II يمكن اعتبارهما دائماً منحنيين مؤتلفين .

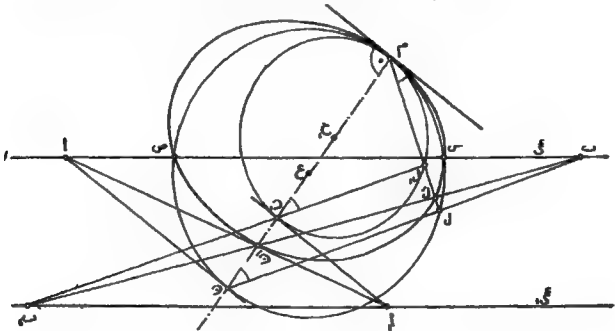
فإذا كانت م نقطة تقاطع مماسين مشتركين للمقطعين المخروطيين ع_١ ع_٢ ورسم منها مستقيمت في المستوى يقطع كل منها المنحنيين في زوجين من النقاط المتناظرة فإنه يمكن اعتبار م نقطة مناظرة لنفسها مناظرة تامة (بند ٦١) واعتبار المنحنيين ع_١ ع_٢ مؤتلفين مركزياً حيث م مركز الائتلاف (بند ٦٢) . وإذا تقاطع ع_١ ع_٢ في أربع نقط فإن أي وتر من الاوتار المشتركة يصلح

(١) إذا كانت م رأساً لمخروط دليله ع_١ وكانت م رأساً لمخروط آخر دليله ع_٢ بحيث يمر المستقيم م م بنقطة تقاطع أي اثنين من المماسات المشتركة للمنحنيين ع_١ ع_٢ فإن المخروطين يكون لهما عند م مستويان مماسان مشتركان ولهذا السبب « ينحل » خط تقاطعهما (وهو منحن من الدرجة الرابعة) الى مقطعين مخروطيين يمكن اعتبار أحدهما المقطع المخروطي ع الذي مسقطاه المركزيان من م م على المستوى II هما المنحنيان ع_١ ع_٢ على التوالي .

كمحور لهذا الائتلاف (١).

وإذا تماس المنحنيان $ع_١$ و $ع_٢$ في نقطة ما كانا أيضاً مؤتلفين مركزياً ويمكن اعتبار مركز الائتلاف إما نقطة التماس نفسها (باعتبارها نقطة تلاقي تماسين مشتركين متتاليين) ويكون محور الائتلاف هو وتر تقاطع المنحنيين (إذا تقاطعا) أو يكون مركز الائتلاف نقطة تقاطع التماسين المشتركين الآخرين (إذا كانا حقيقيين) ويكون محور الائتلاف في هذه الحالة هو التماس المشترك في نقطة التماس (باعتباره وتراً لتقاطع المنحنيين).

بنر ٧٦ : المصفوف المركزى بين المقطع المخروطى واية دائرة ماسة له



(شكل ٨٠)

لنفرض في (شكل ٨٠) أنه يراد رسم المقطع المخروطى المؤتلف مع الدائرة التى مركزها $ع$ ولنفرض أننا اخترنا مركزاً لهذا الائتلاف إحدى نقط الدائرة

(١) إذا كانت $س$ إحدى النقطتين غير الواقعتين على محور الائتلاف ووصل $م$ $س$ قطع المنحنيين $ع_١$ و $ع_٢$ في $س_١$ و $س_٢$ على التوالي فإن النقطة المناظرة الى $س$ باعتبارها إحدى نقط $ع_١$ تكون $س_٢$ وباعتبارها إحدى نقط $ع_٢$ تكون $س_١$ أى أن النقطة $س$ لا تكون مناظرة لنفسها في هذه الحالة .

ولتكن M ومحوراً لمستقيماً حيثما اتفق مثل E . ولكي يتعين الائتلاف المركزي
فترض أن النقطتين M و E هما زوج من النقط المتناظرة في هذا الائتلاف .
فلما كانت النقطة M مناظرة لنفسها وجب أن يمر المنحنى المؤتلف مع الدائرة
بهذه النقطة ولما كان عاس الدائرة في M مستقيماً ماراً بالمركز M فالمستقيم
المناطرله (وهو عاس المنحنى في M) يجب إذن أن ينطبق عليه . أي أن المنحنى المؤتلف
مركزياً مع الدائرة في هذه الحالة هو مقطع مخروطي يمر الدائرة في M ويمر
بالنقطتين S و S' لانهما تقطعي تقاطع الدائرة مع محور الائتلاف E .

فالذا كان E مركز دائرة جديدة تمس الدائرة الأولى والمنحنى في M نفسها
فان المقطع المخروطي يكون مؤتلفاً مركزياً مع هذه الدائرة أيضاً (بند ٧٥) . فالذا
اعتبرنا M مرزاً لهذا الائتلاف فان المستقيمت المتناظرة تقاطع على محور جديد
 E للائتلاف ويتضح بسهولة من تشابه المثلثين MAB و $M'A'B'$ شكل ١ ب
ووضعا بالنسبة الى النقطة E كمرکز للتشابه (ويتضح هذا التشابه من توازي
الضلعين ME و $M'E$ ب باعتبارهما وترين متناظرين في الدائرتين E و E'
المتشابهتين شكلاً ووضعا بالنسبة الى M ^(١) وتوازي ممسلي الدائرتين

(١) معلوم أن الدوائر المرسومة في مستو واحد تشترك جميعاً في نقطتين تخيليتين
في اللانهاية يطلق عليهما اسم « النقطتين الدائريتين في اللانهاية » (انظر بند ٩٤) . ولهذا
السبب تتعين الدائرة بثلاث نقط بدلا من خمس كبقية المقاطع المخروطية ولهذا السبب
أيضا تقاطع أي دائرتين مرسومين في المستوى في نقطتين اثنتين — بدلا من أربع —
(حقيقتين أو تخيليتين) . فالذا اعتبرنا نقطة تقاطع عاسين مشتركين لمثل هاتين الدائرتين
بصفتهما مقطعين مخروطيين (بند ٧٥) — مركزاً للائتلاف بينهما فان محور الائتلاف
يكون إما وتر التقاطع الذي يصل النقطتين الدائريتين في اللانهاية أي المستقيم الذي في
اللانهاية وفي هذه الحالة تكون الدائرتان متشابهتين شكلاً ووضعا بالنسبة للركز أو
يكون المحور هو الوتر الذي يصل تقطعي التقاطع الباقيتين (حقيقتين أو تخيليتين)
وفي هذه الحالة تكون الدائرتان مؤتلفتين ائتلافا مركزياً عادياً .

في $\alpha \beta \gamma$ (١٥) أن $\alpha \beta \gamma$ متوازيان . وإذاً يمكننا أن نقرر :
 إذا تماس مقطع مخروطى ودائرة في نقطة مثل α واعتبرت β مركزاً للمحرف
 بينهما فانه محور المحرف لا يغير اتجاهه اذا تحرك مركز الدائرة — مع بقائها ماسة
 للمحرف في α — على العمود المشترك للمحرف والدائرة .

بند ٧٧ : امثلة تطبيقية

. تطبيقاً لما تقدم في البدين السابقين نذكر فيما يلي بعض الامثلة على استخدام
 الاكتلاف المركزى بين الدائرة والمقطع المخروطى في حل كثير من المسائل المتعلقة
 بالمنحنى الاخير اذا كان بين العناصر المعلومة المحددة له نقطة بالمماس فيها (أى
 نقطتان متاليتان في حالة اعتبار المنحنى مجموعة من النقط) أو تماسان متالين
 (أى تماس بنقطة تماسه) أو غير متالين ^(١) .

المثال الاول

المعلوم مستقيمان $\alpha \beta$ متقاطعان في α وثلاث نقط $\alpha' \beta' \gamma'$ ح'
 (شكل ٨١) والمطلوب :

أولاً : رسم المماس في ح' لأحد المقاطع المخروطية التى تمر بالنقط الثلاث
 وتمس المستقيمين المعلومين .

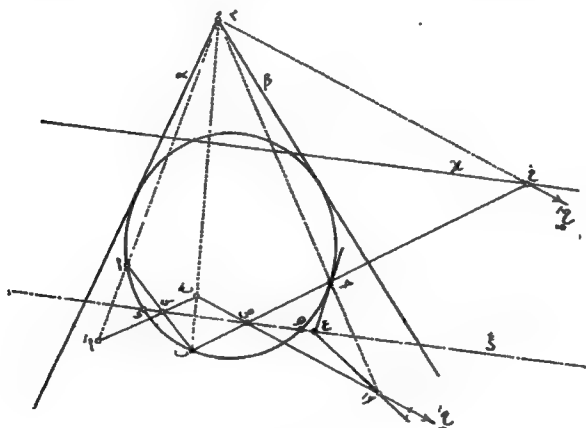
ثانياً : تحديد نوع المقطع المخروطى الذى تعين في (أولاً) .

ثالثاً : إيجاد عدد المقاطع المخروطية الممكنة .

لذلك نرسم دائرة حيثما اتفق تمس المستقيمين المعلومين $\alpha \beta$ ونعتبرها
 مؤلفة مركزياً مع جميع المقاطع المخروطية التى تمس المستقيمين وتمر بالنقط

(١) لرسم دائرة مؤلفة مركزياً مع مقطع مخروطى اذا كان معلوماً بخمس نقط
 مختلفة ليس بينها نقطتان متاليتان أنظر (بند ١٩٩) .

البرهان حيث \mathcal{M} مركز الاستلاف (بند ٧٥) ثم نصل \mathcal{M} بـ \mathcal{M}' \mathcal{H} فتكون النقط المناظرة للنقط المعلومة واقعة على هذه المستقيمت وعلى الدائرة. ولما كان كل واحد من هذه المستقيمت يقطع الدائرة في نقطتين فان كلامنا هاتين النقطتين تصلح أن تكون النقط المناظرة لنقطه المنحني الواقعة معها على مستقيم واحد مار بالمركز. فلنفرض أننا اخترنا النقط \mathcal{M} بـ \mathcal{H} على الدائرة لتناظر نقطه المنحني المعلومة \mathcal{M} بـ \mathcal{H} على التوالي فهذا الاختيار يحدد واحداً



(شکل ۸۱)

(ولترمز اليه بالرمز ρ) من المقاطع التي تمر بالنقط الثلاث وتمس المستقيمين α و β ويكون محور الالتفاف ε في هذه الحالة هو المستقيم الذي يصل النقطة σ وهي نقطة تقاطع α و β 'ب' بالنقطة σ وهي نقطة تقاطع β و γ 'ب' 'ح' .
 فإذا كان مماس الدائرة في σ يقابل ε في النقطة ε ووصل ε و σ كان ε 'ح'

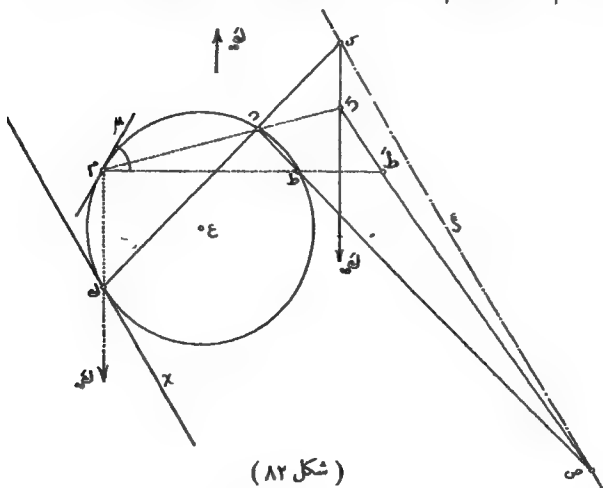
ولتعيين عدد المقاطع الممكنة — وهو المطلوب أخيراً — نجعل الدائرة
المؤلفة مركزياً مع المنحنيات تمر بأحدى النقط المعلومة ولتكن 'أ' ماسة
للمستقيمين المعلومين $\alpha \beta$ ⁽¹⁾ ثم نصل م' ب' م' ح' فيقطعان الدائرة في
ب' ب' م' ح' م' ح' فالاستقيم المناظر للمستقيم ب' ح' يجوز أن يكون واحداً
من المستقيمات الأربعة : ب' ح' أو ب' ح' أو ب' ح' أو ب' ح' فإذا
تقاطع ب' ح' مع هذه المستقيمات في النقط س' م' م' م' م' فإن أى
واحدة منها يجوز اعتبارها واقعة على محور الالتلاف ولما كان هذا المحور لا بد
أن يمر بالنقطة 'أ' الموجودة على الدائرة والمنحني معاً والتي لذلك تناظر نفسها فإن
أى مستقيم من المستقيمات الأربعة : أ' س' م' م' م' م' أ' س' م' م' م' أ' س'
يصلح أن يكون محوراً للالتلاف . وكل واحد من هذه المحاور يعين مقطعاً
مخروطياً واحداً .

(١) تترك للقارىء رسم شكل يوضح هذا البرهان .

المثال الثاني

قذف مقذوف في الفراغ من نقطة معلومة م على سطح الأرض فإذا علمت الزاوية التي يميل بها خط سير المقذوف على الاتق عند نقطة الابتداء أى علم المماس م لهذا الخط في م وعلمت أيضا نقطة أخرى من نقطه مثل م' فالمطلوب تعيين المكان الذي يسقط فيه المقذوف الى الأرض (شكل ٨٢) .

معروف من مبادئ الميكانيكا أن خط سير المقذوف هو قطع مكافئ محوره مستقيم رأسي وقد علم من هذا التحنى نقطة الابتداء م والمماس فيها م' وأيضا



النقطة ٥: فأول ما يتبادر الى الذهن هو هل تكفي هذه المعالم لتعيين القطع المكافئ؟ الجواب على هذا السؤال بالإيجاب لأنه حيث إن اتجاه المحور معلوم (الاتجاه الرأسى) فعنى ذلك أن نقطة تماس المستقيم الذى فى اللانهاية مع المنحنى

معلومة أيضا وإذ أن يكون المعلوم من القطع المكافئ النقطة m والمماس فيها والنقطة ∞ وكذا المستقيم الذي في اللانهاية باعتباره مماسا ونقطة تماسه وبمجموع هذه العناصر خمس نقط (لأن النقطة بالمماس فيها تحسب بنقطتين) وهذا يعين القطع المكافئ تمام التعيين (قطع مكافئ واحد) .

بعد هذا نختار دائرة حيثما اتفق تماس المماس المعلوم m في النقطة m ونعتبرها مؤلفة مركزيا مع القطع المكافئ حيث m مركز الائتلاف (بند ٧٥) ونصل $m \infty$ $m \infty$ (حيث ∞ هي النقطة التي في اللانهاية التي يحددها الاتجاه الرأسى المعلوم لمحور القطع) فيقطعان الدائرة في النقطتين المناظرتين ∞ ∞ على التوالي ويكون تماس الدائرة في ∞ هو المستقيم المحدد x الذي يناظر تماس القطع المكافئ في النقطة ∞ أي يناظر المستقيم الذي في اللانهاية باعتباره مرسوما في مجموعة القطع المكافئ. فإذا تقاطع المستقيمان المتناظران ∞ ∞ في النقطة s كانت s نقطة على محور الائتلاف ∞ الذي يمر بها موازيا للمستقيم المحدد x .

وحيث إن المطلوب هو تعيين المكان الذي يسقط فيه المقذوف الى الارض فعنى ذلك أنه يراد إيجاد نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المستقيم الاقصى (العمودى على اتجاه المحور) المرسوم من نقطة الابتداء m فإذا أسمينا هذه النقطة t كانت النقطة t المناظرة لها هي نقطة تقاطع المستقيم الاقصى المشار اليه مع الدائرة (لأن هذا المستقيم يناظر نفسه) فلتعين t نصل ∞ ∞ في s ثم نصل $s \infty$ فيقابل المستقيم الاقصى m t في النقطة t وهي مكان السقوط.

المثال الثالث

المطلوب انشاء أحد المقاطع المخروطية التي تمر بنقطتين معلومتين a b وتمس ثلاثة مستقيمت معلومة α β γ وإيجاد عدد الحلول الممكنة .

إذا رسمت دائرة تمس اثنين من المستقيمتين المعلومتين مثل α' و β' واعتبرت مؤتلفة مركزياً مع المقاطع المخروطية فإنه يمكن بطريقة شبيهة ^(١) بالطريقة المستعملة لحل الجزء الاول من المثال الاول في (شكل ٨١) تعيين أحد محاور الاختلاف الذي يحدد واحداً من المقاطع المخروطية الممكنة ثم انشاء هذا المقطع كما قدمنا في (بند ٧٢) .

ولمعرفة عدد الحلول الممكنة نرسم الدائرة التي تمر بالنقطتين المعلومتين α' و β' وتمس أحد المستقيمتين الثلاثة وليكن α' ثم نعتبر هذه الدائرة مؤتلفة مركزياً مع المنحنيات ونعتبر α' و β' محاوراً لهذا الاختلاف ففي هذه الحالة حيث إن المماس المشترك α' هو مستقيم مناظر لنفسه وجب أن يكون مركز الاختلاف واقعاً عليه فإذا تقاطع المماسان β' و γ' مع محور الاختلاف في النقطتين α و β من على التوالي ورسمت من هاتين النقطتين مماسات للدائرة فإنه يمكن اعتبار أي واحد من مماسي الدائرة المتقاطعين في α مناهراً للمماس β' واعتبار أي واحد من المماسين المتقاطعين في β مناهراً للمماس γ' . وبهذه الطريقة يمكن الحصول على أربع نقط مختلفة (واقعة على α') يمكن اعتبار كل منها مركزاً لاختلاف يعين مقطعا مخروطياً واحداً . إذن عدد الحلول أربعة أي أن هناك أربعة مقاطع مخروطية يمكن أن تمر جميعاً بنقطتين معلومتين وتمس ثلاث مستقيمت معلومت .

المثال الرابع

المطلوب انشاء أحد المقاطع المخروطية التي تمر بنقطتين معلومتين α' و β' وتمس مستقيمتين متقاطعتين معلومتين α' و β' إذا علم أن α' و β' قاطران المنحني .

(١) يلاحظ أنه إذا تقاطع المستقيمان α' و β' في نقطة مثل α وكانت α واقعة على α' (النقطة المناظرة إلى α) فإنه يمكن اعتبار أحد المماسين المرسومين من α إلى الدائرة هو المستقيم γ' المناظر إلى γ' .

ترك للقارىء حل هذا المثال على منوال الامثلة السابقة مع ملاحظة أن المستقيم المحدد λ (المعين لنوع المقطع المخروطى) يمر فى هذه الحالة بقطب الوتر $أ ب$ (الناظر الى $أ ب$) بالنسبة للدائرة وأنه اذا رسم من $م$ مواز للمستقيم $أ ب$ فقطع $أ ب$ فى نقطة فان المستقيم المحدد λ يمر أيضا بهذه النقطة .

بند ٧٨ : دائرة الانحناء

(١) دائرة الانحناء فى أية نقطة على مقطع مخروطى

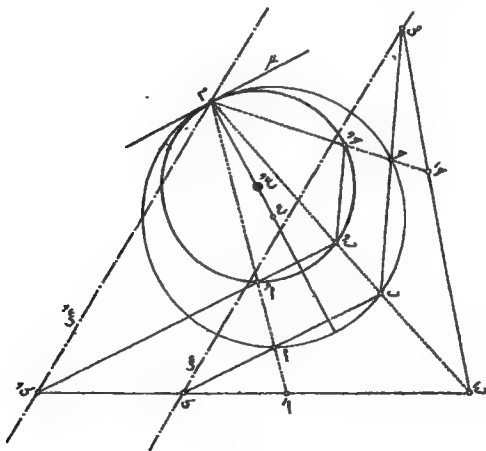
اذا فرضنا فى (شكل ٨٠) أن المركز $ع$ للدائرة الاولى الماسة للمقطع المخروطى فى $م$ والمتقاطعة معه فى النقطتين $س$ و $ق$ — أخذ فى التحرك على العمودى المشترك $م ع$ بحيث تأخذ نقطتا التقاطع المشار اليهما فى الاقتراب من النقطة $م$ فان الوضع النهائى للدائرة الماسة عندما تنطبق إحدى هاتين النقطتين وتكن $س$ على النقطة $م$ يكون دائرة الانحناء للمقطع المخروطى فى النقطة $م$ نفسها لانها تكون مشتركة مع المنحنى فى هذه الحالة فى ثلاث نقط متتالية (بند ٣٦) . ولما كانت دائرة الانحناء فى $م$ — مثل جميع الدوائر الاخرى التى تمس المنحنى فى $م$ — يمكن اعتبارها مؤلفة معه مركزيا ولما كان محور الامتلاف (الذى يوازى الاتجاه الثابت للمحاور الاخرى) يمر فى هذه الحالة الخاصة بالنقطة $م$ نفسها وهى مركز الامتلاف وذلك لانطباق النقطة $س$ عليها فاننا نستطيع أن نقول :

محور الامتلاف بين مقطع مخروطى ودائرة الانحناء $د$ فى امرى نقط $م$ هو المستقيم المرسوم من $م$ موازيا لمحور الامتلاف بين المقطع وأية دائرة أخرى ماسة $د$ فى $م$ اذا اعتبرنا $م$ فى الحالتين مركزا لامتلاف .

فلذا لاحظنا أن أى وترين فى الدائرتين متاظرين لوتر واحد فى المقطع المخروطى يكونان متوازيين (قارن الوترين $د ل ه$ و $ه ل ق$ ، المناظرين الى $ه ل$)

في شكل ٨٠) أمكن باستخدام النظرية السابقة رسم دائرة الانحناء في إحدى نقط مقطع مخروطي معلوم وأمکن كذلك بالعكس إنشاء المقطع المخروطي اذا علمت منه دائرة الانحناء في إحدى نقطه (وتحسب ثلاث نقط) ونقطتان أخريان كما يتبين من المثالين الآتيين :

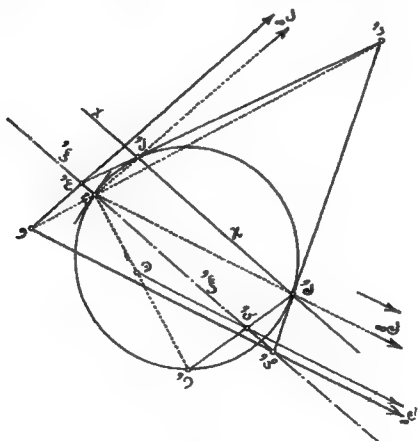
(١) اذا علم من مقطع مخروطي النقطة م والمماس فيها μ وكذا النقط μ'_1, μ'_2, μ'_3 فال المطلوب رسم دائرة الانحناء في م (شكل ٨١).
لذلك نرسم دائرة μ'_1 مركزها ع تمس المماس المعلوم μ في النقطة م



(شكل ٨٢)

ونعتبرها مؤلفة مع المقطع المخروطي المعلوم حيث م مركز الالتلاف . ثم نصل $\mu'_1 \mu'_2, \mu'_2 \mu'_3, \mu'_3 \mu'_4, \mu'_4 \mu'_5, \mu'_5 \mu'_6, \mu'_6 \mu'_7, \mu'_7 \mu'_8, \mu'_8 \mu'_9, \mu'_9 \mu'_{10}$ فنقطع الدائرة في النقط $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4, \mu'_5, \mu'_6, \mu'_7, \mu'_8, \mu'_9, \mu'_{10}$ على التوالي . ثم نعين محور الالتلاف ع بين الدائرة ع والمنحنى ونرسم

من م مستقيماً في موازى للمحور في فيكون في بمقتضى النظرية السابقة هو محور
الائتلاف بين المقطع ودائرة الانحناء المطلوب رسمها . فاذا تقاطع المستقيم ا' ب'
مع المحور الجديد في في النقطة س' وجب أن يمر الوتر ا' ب' في دائرة
الانحناء بالنقطة س' موازياً الى الوتر ا ب في الدائرة ع لأن هذين الوترين
ينظران وترأ واحداً ا' ب' في المقطع المخروطى . فاذا قابل الوتر ا' ب'
الشعاعين م ا' م ب' في النقطتين ا' ب' على التوالي كانت الدائرة المارة
بالنقط ا' ب' م (والتي تسمى أيضاً م) هي دائرة الانحناء للمقطع المخروطى في م .



(شكل ٨٤)

(٢) المعلوم من قطع زائد نقطتان م م و دائرة الانحناء في م وكذا اتجاه
أحد المستقيمين التقريبين وقد رمزنا اليه بالرمز و والمطلوب رسم المستقيمين
التقريبين نفسيهما (شكل ٨٤)

حيث إن دائرة الانحناء في إحدى نقط المنحنى تشترك معه في ثلاث نقط متتالية ومتحدة في هذه النقطة فدائرة الانحناء في نقطة معلومة على منح تحسب كما قد منا بثلاث نقط وحيث أن الاتجاه المعلوم K لأحد المستقيمين التقريبيين يحدد إحدى نقطى القطع الزائد اللتين في اللانهاية ولما كانت النقطة Q معلومة أيضاً فينتج من ذلك أن القطع الزائد قد تحدد بهذه النقط الخمس المعلومة .

نعتبر الآن الائتلاف المركزى بين دائرة الانحناء والقطع الزائد حيث M هي مركز الائتلاف ونصل M بـ M' M'' فيقطعان الدائرة في النقطتين Q' و Q'' المناظرتين الى Q Q' Q'' على التوالى . فاذا تقاطع المستقيمان المتناظران $Q'Q''$ $Q''Q'$ في النقطة S كانت S نقطة على محور الائتلاف E الذى يجب بمقتضى النظرية السابقة أن يمر بمركز الائتلاف M أى أن $E \equiv M \equiv S$ وبذلك يتعين المحور . ويكون المستقيم γ المرسوم من Q' (التي تناظر النقطة K التي في اللانهاية) موازياً للمحور E هو المستقيم المحدد المعين لنوع المقطع المخروطى فاذا قطع هذا المستقيم الدائرة في L كانت L النقطة المناظرة الى نقطة القطع الزائد الثانية L' التي في اللانهاية والتي يدل عليها اتجاه المستقيم M L ويكون المستقيمان المناظران للمسى الدائرة في L Q' Q'' هما المستقيمان التقريبان المطلوبان ^(١) .

(ب) دائرة الانحناء في رأس مقطع مخروطى

إذا فرضنا في (شكل ٨٠) أن محور الائتلاف E بين المقطع المخروطى والدائرة ع الماسة له في M — يوازي المماس المشترك في M فان النقطتين S Q ص

(١) إذا حدث أن مس المستقيم المحدد γ المرسوم من Q' موازياً للمحور E دائرة الانحناء في Q نفسها فان معنى ذلك أن المنحنى قطع مكافئ اتجاه محوره K .

(نقطتى تقاطع المنحنين) تكونان متماثلتين بالنسبة للعمودى المشترك م ع . فاذا تحرك المركز ع للدائرة — مع بقائها ماسة للمنحنى فى م — على هذا العمودى بحيث تقترب س من م فان س تقترب أيضاً بنفس المقدار من م . وفى الوضع النهائى عند ما تنطبق س على م تنطبق أيضاً م على م ومعنى ذلك أن دائرة الانحناء فى مثل هذه الحالة تشترك مع المنحنى فى أربع نقط متحدة فى م وينطبق عندئذ محور الاتلاف بين المنحنى ودائرة الانحناء على نفس المماس المشترك فى م . وهذا يحدث اذا كانت م رأساً من رؤوس المقطع المخروطى أو بعبارة أخرى : دائرة الانحناء فى رأس مقطع مخروطى تشترك مع فى أربع نقط متساوية البعد فى الرأس ^(١) وإذن يكفى أن تعلم نقطة واحدة ودائرة الانحناء عند رأس معلومة فى مقطع مخروطى لكى يتحدد هذا المقطع .

وبالنظر الى أهمية دوائر الانحناء فى رؤوس المقاطع المخروطية إذ بواسطتها يمكن إنشاء المقاطع فى سرعة ودقة فستذكر فيما يلى كيفية رسم هذه النوائر اذا كان المقطع المخروطى معلوماً بواسطة محاوره وبؤره :

المقطع الناقص (شكل ١٨٥)

نكمل المستطيل ح و ١ هـ ثم نزل من هـ العمودى على القطر ح ١ لهذا المستطيل فيقابل المحورين فى م م ٢ ، فيكونان هما مركزا الانحناء فى الرأسين ١ ٢ ح على التوالي ويكون نصفا قطرى الانحناء هما ٢ ١ م ٢ ح .

المقطع الزائى (شكل ٨٥ ب)

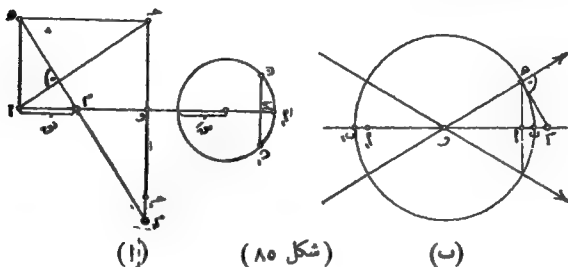
نرسم المماس فى الرأس ١ فاذا قابل أحد الخطين التقريبيين فى هـ وأقيم من هـ

(١) يلاحظ أن دائرة الانحناء فى مثل هذه الحالة لا تعبر المنحنى عند الرأس كما هو الحال عند النقط الأخرى .

العمود على هذا الخط التقريبي فإن هذا العمود يقابل المحور القاطع في المركز ٢
للدائرة الانحناء في الرأس ١ (نصف قطر الانحناء = ١٢).

القطع الحائري

نصف قطر الانحناء في الرأس يساوي ضعف البعد بين الرأس والبؤرة .



وللبرهنة على ما تقدم نفرض في حالة القطع الناقص (شكل ١٨٥) دائرة نصف قطرها OS تماس المنحنى في الرأس A وتقطع في النقطتين B و C الممتثلين بالنسبة للمحور الأكبر ثم نبرهن على أن

$$\frac{\overline{20}}{10} = \frac{2}{1} = 2$$

حيث ρ هو نصف قطر الانحناء في A أو B . كذلك يمكن البرهنة إذا رمزنا إلى نصف قطر الانحناء في C أو D بالرمز ρ على أن

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومن تشابه المثلثات التي يمكن الحصول عليها بالطريقة المشروحة آنفاً يمكن

$$\frac{\overline{و١}}{\overline{و٢}} = \frac{\overline{و١}}{\overline{و٢}} \quad \text{وأن} \quad \frac{\overline{و١}}{\overline{و٢}} = \frac{\overline{و١}}{\overline{و٢}}$$

أما في حالتَي القطعين الزائد والمكافئ فيمكن استنتاج البرهان مباشرة من النظرية العامة الآتية (مع ملاحظة أن البؤرة الثانية للقطع المكافئ هي نقطة في اللانهاية) :

مركز الانحناء في رأس من من الدرجة الثانية هو النقطة التي توافقها بالنسبة للبؤرتين ^(١).

وذلك لأن المماس والعمودى في أية نقطة على المنحنى مثل هـ (شكل ٥٤) يقابلان المحور (المار بالبؤرتين) في نقطتين متوافقتين توافقياً بالنسبة للبؤرتين . ولما كانت الدائرة التي مركزها نقطة تقابل العمودى مع هذا المحور والتي تمس المنحنى في هـ لا بد أن تمس أيضاً في النقطة و المائلة الى هـ فإن الوضع النهائي لنقطة تقابل العمودى مع المحور عند ما تنطبق هـ و على حـ يكون مركز الانحناء في حـ (لان الدائرة في هذه الحالة تشترك مع المنحنى في أربع نقط متحدة في حـ) . ولما كانت الخاصية التوافقية السالفة الذكر لا تتغير بأقتراب هـ و من حـ ولما كانت نقطة تقاطع المماس مع المحور تؤول في الوضع النهائي الى نقطة التماس حـ ذاتها لذلك كانت النظرية السابقة صحيحة ^(٢).

- (١) المعادلة السابقة التي تعين نصف قطر الانحناء في إحدى رأسى القطع الناقص الواقعين على المحور الأكبر يمكن استنتاجها كذلك بسهولة من هذه النظرية .
- (٢) يلاحظ أن مركز الانحناء م في (شكل ٨٥) هو قطب المماس في الرأس ١ بالنسبة الى الدائرة المرسومة على ب ب ك قطر .

الفصل الثامن

الهندسة الاسقاطية للمقاطع المخروطية

بند ٧٩ : تعريف

تبحث الهندسة الاسقاطية في الخواص الهندسية التي لا تتغير بالاسقاط أيا كان وهي الخواص التي أطلقنا عليها في (بند ٣٤) اسم الخواص الاسقاطية . وقد رأينا في الفصول السابقة أمثلة كثيرة على هذه الخواص الاسقاطية . أما في هذا الفصل فسنشرح كيفية استخدام هذه الخواص في استنباط طرق جديدة لرسم المقاطع المخروطية وحل بعض المسائل المتعلقة بها . وسنبداً أولاً في هذا البند والبند التالي بتلخيص بعض الحقائق والنظريات التي سردناها متفرقة في الفصول السابقة والتي سنحتاج اليها لتحقيق الغرض المتقدم .

فليان الأساس الذي يقوم عليه علم الهندسة الاسقاطية نفرض أن سمه شكل موجود في مستو مثل A وأن سمه' هو المسقط المركزي ^(١) للشكل سمه من نقطة ما في الفراغ على المستوى A' ثم نفرض أننا أسقطنا الشكل سمه' من نقطة أخرى في الفراغ على مستو جديد مثل A" فحصلنا بذلك على شكل مستو جديد سمه" وأتانا أسقطنا سمه" مرة أخرى على مستو جديد وهكذا فن الواضح أن العلاقة الهندسية بين أى اثنين من هذه الاشكال هي بحيث توجد بين نقطتهما ومستقيماها منظرية الفرد للفرد . ومعنى ذلك كما قدمنا في (بند ٥٦) أن أى "ثنين غير متساويين من هذه الاشكال مثل سمه سمه" هما شكلان مؤتلفاه أو مؤتلفاه اسقاطيا أو اسقاطياهما . فاذا كان الشكلان متساويين أى موضوعين وضعا

(١) نقول المسقط المركزي لأنه أعم من المسقط المتوازي فأي ينطبق على الاول ينطبق على الثاني .

خاصاً بحيث تمر المستقيمت الواصلة بين النقط المتناظرة بنقطة واحدة (مركز الإسقاط أو الالتلاف) وذلك مثل الشككين $\text{سم} \text{سم} \text{سم}$ أو $\text{سم} \text{سم} \text{سم}$ فانها يكونان مؤتلفين أيضاً ولكن يقال لها على الخصوص إنها مؤتلفاه مركزياً أو منظورياً (بند ٦٣). ويقال كذلك إن بين الشككين غير المتساويين $\text{سم} \text{سم} \text{سم}$ "منظرة إسقاطية" أما الشككان $\text{سم} \text{سم} \text{سم}$ فيقال إن بينهما منظرية منظرة (فوق كونها إسقاطية أيضاً).

فهذه المناظرة الإسقاطية أو منظرة الفرد للفرد بين نقط ومستقيمت شككين واقعين في مستويين مختلفين أو في مستو واحد هي أساس الهندسة الإسقاطية لأن جميع الخواص المتبنية عليها — كالنسب المضاعفة والخواص القطبية — هي كما بينا في الفصول السابقة خواص إسقاطية لا تتغير بالإسقاط مهما تعاقب أو تعدد.

بند ٨٠ : الصفوف والمزمرات المؤتلفة والمنظرة

الصف أو صف النقط هو مجموعة النقط الواقعة على مستقيم واحد يسمى حامل الصف. ومزمرات المستقيمت هي مجموعة المستقيمت (أشعة المزمرات) الواقعة في مستو واحد والمارة بنقطة واحدة يطلق عليها اسم رأس المزمر (راجع بند ٥٣).

فالذكان $\text{سم} \text{سم}$ حللين لصفين من النقط $\text{سم} \text{سم} \text{سم}$ أو $\text{سم} \text{سم} \text{سم}$ موجودين في شككين مؤتلفين بحيث تتناظر قطعها المختلفة قيل للصفين إنها مؤتلفاه أو إسقاطيه (أو مؤتلفان إسقاطياً). وقد رأينا في (بند ٥٨) أن النسبة المضاعفة لأي أربع نقط من صف تساوي النسبة المضاعفة للنقط الأربع المناظرة لها من الصف المؤتلف معه ويعبر عن هذه العلاقة اصطلاحاً بالعبرة:

$$(a b c d) = (a' b' c' d')$$

وإذا كان $\text{سم} \text{سم}$ موجودين في شككين مؤتلفين مركزياً أى بحيث تمر

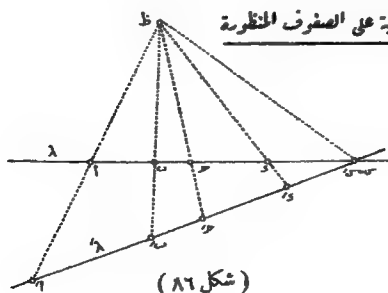
المستقيمتين AB ... الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة بنقطة واحدة
 قيل للصين على الخصوص إنهما منظروهما أو مؤقفاه مركزياً (فوق كونهما
 إسقاطيين أيضاً) وسميت النقطة مركز المنظورية .

وبالمثل اذا تناظرت حزمتان من المستقيمت رأساهما لـ 'ل' في شكلين مؤتلفين كانت النسبة المضاعفة لاي أربعة مستقيمت في إحدى الحزمتين مساوية للنسبة المضاعفة للمستقيمت الاربعة المناظرة لها في الحزمة الاخرى (بند ٥٩) ويقال لمثل هاتين الحزمتين إنهما حزمتان مؤتلفتان أو مقاطبتان . فاذا كانت المستقيمت المناظرة في الحزمتين المؤتلفتين هي $\alpha \beta \gamma \delta \dots \alpha \beta \gamma \delta \dots$ فإنه يعبر عن هذه العلاقة اصطلاحا بالعارة :

$$(\dots \delta' \gamma' \beta' \alpha') = (\dots \delta \gamma \beta \alpha)$$

وإذا كانت الحزمتان L^{α} و L^{β} موجودتين في شكلين مؤتلفين مركزياً أى بحيث تتلاقى أزواج المستقيمتين المتناظرة α^{α} و β^{β} ... في الحزمتين على مستقيم واحد (محور الائتلاف المركزى) قيل الحزمتان إنهما على الخصوص منظورتاه أو مؤتلفتاه مركزياً (فوق كونهما إسقاطيتين أيضاً) وسمى محور الائتلاف في هذه الحالة بمحور المنظورية

بند ۸۱: نظریه على الصفوف المنظورة



إذا تأملت نقطة
تقابل عالمي صفيين مؤتلفين
تقسما لأنه الصفاه
منظورية بحيث تمر
المستقيمات التي تصل
أرواح النقط المتناظرة

جميعاً بمحطة ثابتة هي مركز النظرية ظ .

للمرئعة على هذه النظرية نفرض في (شكل ٨٦) أن نقطة تقابل الحاملين α, β للصفيين المؤتلفين α, β ح ... α, β ح' ... تناظر نفسها أى أن $\alpha \equiv \beta$ ونفرض أنه يقطع الحامل α في نقطة أخرى غير α ولكن α ح' . فبناء على نظرية باپيس (بند ٥٣ و) يكون

$$(\alpha \beta \gamma) = (\alpha \beta \gamma')$$

ولكن بما أن الصفيين α, β مؤتلفان فرضاً وفيهما α, β ح' ، α, β ح' أزواج من النقط المتناظرة فيجب أن يكون

$$(\alpha \beta \gamma) = (\alpha \beta \gamma')$$

وينتج من ذلك مباشرة أن α ح' لابد أن تنطبق على α ح' وإذن تكون النظرية السابقة صحيحة .

بند ٨٢ : قاعدة المتانسة أو المزاوجة — نظرية على الحزم المنظورة

إذا تأمل القارئ في ما ذكر في (بند ٨٠) عن الحزم المؤتلفة والمنظورة وجد هناك نوعاً من التشابه في المعنى بينه وبين ما ذكر قبل ذلك في نفس البند عن الصفوف المؤتلفة والمنظورة . وهذا التشابه أو التقابل أو التراجع نشأ عن ما يسمى بقاعدة المزاوجة التي نشرحها فيما يلي :—

إذا علمت جملة نقط α, β, γ ... في مستو ورسمت الخطوط القطعية α, β, γ ... لهذه النقط بالنسبة إلى مقطع مخروطي معلوم في المستوى فإن قطب أى مستقيم مثل α, β واصل بين نقطتين من النقط المعلومة يكون نقطة تلاقي المستقيمين α, β اللذين هما الخطان القطبيان للنقطتين α, β (أنظر بندى ٥٤ و ٥٥) .

وستستخدم الرمز $(\beta \alpha)$ للدلالة على نقطة تلاقي المستقيمين α و β كما
سنستخدم أحياناً الرمز (α) للدلالة على الخط الواصل بين النقطتين α و β .
ويقال إن كل نقطة في المستوى مثل α يناظرها مستقيم α وبالعكس بمعنى أن
 α هي قطب المستقيم α وبالعكس كما أن المستقيم (α) يناظر النقطة
 $(\beta \alpha)$ بمعنى أن (α) هو الخط القطبي للنقطة $(\beta \alpha)$ بالنسبة للمقطع
المخروطي المعلوم ^(١).

فاذا وجد شكل سهم مؤلف من مجموعة من النقاط والمستقيبات أمكن رسم
شكل سهم مؤلف من مجموعة من المستقيبات والنقط (على التوالي) المناظرة.
هذان الشكلان يسميان شكلين متزوجين وتكون مزوجتهما منسوبة إلى
إلى المقطع المخروطي المعلوم.

نظرية

إذا كان $\alpha \beta \gamma \delta$ حزمة من المستقيبات رأسها α في مستوى مقطع
مخروطي وكان $\alpha \beta \gamma \delta$ الواقعة على مستقيم واحد δ هو قطب δ
بالنسبة للمقطع (أعطاب هذه المستقيبات بالنسبة للمقطع فإن النسبة المضاعفة للحزمة
تساوى النسبة المضاعفة للصف أي أن $(\delta \gamma \beta \alpha) = (\alpha \beta \gamma \delta)$).
سنثبت صحة هذه النظرية إذا كان المقطع المخروطي دائرة ثم نسط الدائرة
إلى مقطع مخروطي فنتج النتيجة المطلوبة ^(٢).

لذلك نفرض أن α و مركز الدائرة فكون المستقيبات $\alpha \beta \gamma \delta$ و $\alpha \beta \gamma \delta$
و $\alpha \beta \gamma \delta$ على $\alpha \beta \gamma \delta$ على التوالي وينتج من ذلك أن

- (١) نلفت نظر القارىء إلى أن هذا التناظر، عكس التناظر الإسقاطي أو
الإتلافي حيث كل نقطة تناظرها نقطة وكل مستقيم يناظره مستقيم.
- (٢) ترك القارىء رسم الشكل.

$$(\delta \gamma \beta \alpha) = (١ \text{ ح } ٢) \text{ و}$$

$$\text{ولكن } (١ \text{ ح } ٢) = (٢ \text{ ح } ١)$$

$$\therefore (\delta \gamma \beta \alpha) = (١ \text{ ح } ٢) \text{ وهو المطلوب .}$$

ينتج من النظرية السابقة أنه اذا كان سهم δ سهم γ شكلين متزاوجين فان أى صف من النقط في الشكل سهم تناظره حمزة من المستقيمت في الشكل سهم مساوية له في نسبتها المضاعفة وبالعكس .

وباستخدام هذه المناظرة العكسية أو المزاوجة بين الشكلين سهم δ سهم γ يمكن اذا علمت خاصية هندسية في أحد الشكلين أن نستنتج منها خاصية مناظرة لها في الشكل الآخر وتسمى مثل هاتين الخاصيتين بخاصيتين متزاوجتين . وتعرف عملية استنتاج إحدى الخاصيتين من الأخرى بعملية الاستنتاج المتزاوجي أو المزاوجة . وسنشرح فيما يلي مثالا على تطبيق هذه القاعدة :

أثبتنا في (بند ٨١) أنه اذا ناظرت نقطة تقابل حامل صفين مؤتلفين نفسها كان الصفتان منظورتين بحيث تمر المستقيمت التي تصل أزواج النقط المتناظرة جميعاً بنقطة ثابتة هي مركز المنظورية ظ .

فلذا اعتبرنا في (شكل ٨٦) الشكل المؤلف من الصفتين ١ ح ٢ ... δ ' ب ' ح ' ... اللذين حاملهما δ γ ' ومن المستقيمت الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة التي هي المستقيمت (١١) δ (ب ب ') γ (ح ح ') ... والتي تؤلف حمزة متلاقية في النقطة ظ — وجعلناه شكلا سهم من شكلين متزاوجين ثم حصلنا بالعريقة الموضحة آتفاً على الشكل سهم ' المزاوج له فان ' الشكل سهم ' سيتألف من حمزتين من المستقيمت $\alpha \beta \gamma \dots \delta \alpha \beta \gamma \dots$ رأساهما ل' (وهما الحمزتان المناظرتان للصفين δ γ ' في الشكل سهم) ومن النقط ($\alpha \alpha$) δ ($\beta \beta$) γ ($\gamma \gamma$) ... التي هي نقط تقاطع المستقيمت

المتناظرة في الحزمتين والتي تؤلف صفّاً واقعاً على مستقيم ε (المتناظر للنقطة ε في الشكل سه) . ثم إن النقطة $\sigma \equiv \sigma'$ لثلاثي الحاملين $\alpha \beta \gamma$ في (شكل ٨٦) سينظرها مستقيم $\sigma \equiv \sigma'$ واصل بين الرأسين $\alpha \beta$ ل' للحزمتين $\alpha \beta \gamma$ و $\alpha \beta \gamma$. كما أن مناظرة النقطة σ لنفسها ينتج عنها مناظرة المستقيم σ لنفسه . وعليه تكون الخاصية الهندسية التي يمكن استنتاجها من نظرية (بند ٨١) باستخدام قاعدة المزاوجة هي الآتية :

إذا نظر المستقيم الواصل بين رأسى حزمتين متلتقيين نفسه كانت الحزمتان منظورتين بحيث تجمع قط تقاطع أزواج المتناظرة جميعاً على مستقيم ثابت هو محور المنظورية ε .

وبالتأمل فيما سبق نرى أنه من الممكن وضع « قاموس » صغير بواسطته يمكن ترجمة أمثال النظرية السابقة إلى النظريات المزاوجة لها ويجد القارىء فيما يلي أهم عبارات هذا القاموس :-

العبارة المزاوجة

مستقيم
حزمة من المستقيمات
مستقيم يمر بنقطة
نقطة تقاطع مستقيمين

أخرى العبارتين

نقطة
صف من النقط
نقطة تقع على مستقيم
مستقيم يصل نقطتين

بند ٨٣ : المسائل الاسقاطية للهندسة الاسقاطية

تتبع العلاقة الاسقاطية أو الائتلافية بين صفين من النقط أو حزمتين من المستقيمات بمعلومية محور أو زوج متناظرة لأنه إذا كانت هذه الأزواج في حالة الصفوف هي $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$ وكانت نقطة حيثما اتفق من

الصف الأول فإن هذه النقطة تجعل النسبة المضاعفة (١ ب ح و) تساوى مقداراً معيناً وليس هناك سوى نقطة واحدة و' في الصف الثاني تجعل النسبة (١' ب' ح' و') تساوى المقدار المعين الذى تساوى النسبة الأولى (بند ٥٣ ع) أى تجعل

$$(١' ب' ح' و') = (١ ب ح و)$$

ويقال مثل ذلك — فى حالة حزمين مؤتلفتين — عن الشعاع و' الذى يجعل

$$. (١' ب' ح' و') = (١ ب ح و)$$

فاذا كانت العلاقة بين صفى النقط أو حزمى المستقيمت منظورة فوق كونها ائتلافية كانت طريقة الحصول على النقطة و' أو الشعاع و' بسيطة جداً: فلنفرض لذلك فى (شكل ٨٦) أن العلاقة المنظورة بين صفى النقط ١ ٢ و' ١' ٢' قد تحددت بمعلومية الزوجين ١ ٢، ١' ٢' من النقط المتناظرة زيادة على نقطة تقاطع الحاملين ١ ٢ و' ١' ٢' وهى النقطة س \equiv س' المتناظرة لنفسها (أى أن العلاقة ائتلافية تعتبر أيضاً فى هذه الحالة الخاصة — حالة العلاقة المنظورية — معلومة بالازواج الثلاثة ١ ٢، ١' ٢'، س س' من النقط المتناظرة) ونفرض أن و' هى النقطة المعلوم من الصف ١ ويراد تعيين النقطة المتناظرة و' على الصف ٢ بحيث يكون (١' ب' ح' و') = (١ ب ح و). فنصل لذلك المستقيمين ١ ٢، ١' ٢' فتكون نقطة تقاطعها هى مركز المنظورية ظ. فاذا وصلت ظ بالنقطة المعلوم و' فان ظ و' يقطع الحامل ٢ فى النقطة المطلوبة و'.

كذلك اذا علمت العلاقة المنظورية بين حزمين ل ٢، ل' من المستقيمت بالازواج الثلاثة ١ ٢، ١' ٢'، س س' من الاشعة المتناظرة حيث $\sigma \equiv \sigma'$ هو الشعاع ل ل' المناظر لنفسه وفرضنا أن و' شعاع معلوم حيثما اتفق فى

الحزمة ل ويراد تعيين δ المناظر له بحيث يكون $(\delta \sigma \beta \alpha) = (\delta' \sigma' \beta' \alpha')$ فالتا فصل النقطتين $(\alpha \alpha')$ و $(\beta \beta')$ فيكون الواصل هو محور المنظورية ϵ ويكون الشعاع المطلوب δ هو المستقيم الذى يصل ل' بنقطة تقاطع δ مع هذا المحور .

وننتقل الآن الى حل المسألتين الأساسيتين المتراوجتين فى الحالة العامة عند ما تكون العلاقة بين صفى النقط أو حزمى المستقيمت علاقة اتلافية فقط (غير منظورة) .

المسألة الاولى

إذا علمت ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة $١, ٢, ٣$ و $١', ٢', ٣'$ فى صفين مؤلفين من $١, ٢, ٣$ فال المطلوب تعيين النقطة ω على الصف λ التى تناظر نقطة معلومة مثل ω من الصف λ بحيث تكون $(\omega' \omega' \omega' \omega') = (\omega \omega \omega \omega)$. بالنظر الى سهولة العلاقة المنظورة كما رأينا فيما تقدم فإن أقرب طريق لحل هذه المسألة يكون بتحويل صفى النقط المؤلفين الى حزمين منظورتين وذلك بالطريقة الآتية (شكل ٨٧) :

نختار أى زوج من النقط المتناظرة المعلومة مثل $١, ١'$ ثم فصل λ بالنقطة ω و ω' ونصل ω بالنقطة ١ و ω' بالنقطة $١'$ فبما أن

$$(\omega' \omega' \omega' \omega') = (\omega \omega \omega \omega) \text{ فرضاً } (\omega' \omega' \omega' \omega') = (\omega \omega \omega \omega)$$

فكون الحزمتان اللتان رأسهما ω, ω' مؤلفتين أى تكون

$$(\omega' \omega' \omega' \omega') = (\omega \omega \omega \omega)$$

ولما كان الشعاع ω يناظر الشعاع ω' فى الحزمتين أى أن المستقيم الواصل بين رأسى هاتين الحزمتين المؤلفتين يناظر نفسه فينتج بمقتضى النظرية المذكورة فى (بند ٨٢) أن الحزمتين منظورتان فوق كونها مؤلفتين وعليه تقاطع

محور المنظورية ϵ مع λ وإذا اعتبرنا نفس النقطة نقطة معلومة مثل ν من نقط الصف λ كانت النقطة المناظرة لها ν على الصف λ هي نقطة تقاطع محور المنظورية ϵ مع λ .

ولما كانت النقطتان ν و ν' نقطتين ثابتتين يتعينان بمعلومية الأزواج $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ من النقط المتناظرة فينتج من ذلك أن هاتين النقطتين وبالتالي محور المنظورية ϵ الذى يمر بهما — لا يتوقفان على النقطتين المتناظرتين α, β اللتين اخترناهما فى بادىء الأمر رأسين للحزمتين المنظورتين . وإذن يجب أن تتلاقى الأزواج الآتية من المستقيمات

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ و $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ و $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ الخ على محور المنظورية ϵ الذى يتعين لذلك بنقطى تقاطع أى زوجين معلومين منها .

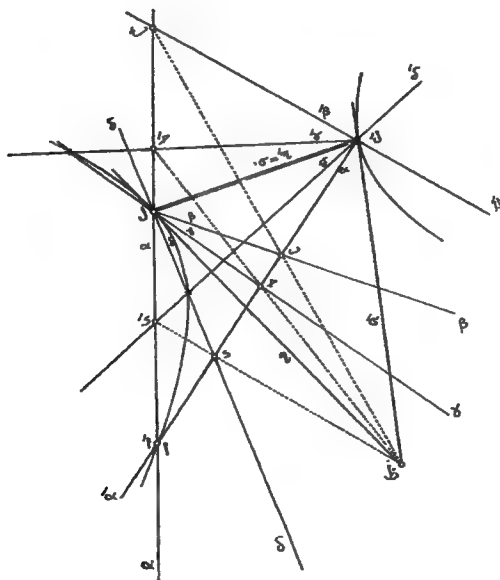
المسألة الثانية للزواجة

إذا علمت ثلاثة أزواج من الاشعة المتناظرة $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ فى الحزمة ν حزمتين مؤتلفتين رأساهما ν و ν' فالمطلوب تعيين الشعاع ϵ فى الحزمة ν الذى يناظر شعاعاً معلوماً مثل δ فى الحزمة ν' بحيث تكون

$$(\delta \gamma \beta \alpha) = (\delta' \gamma' \beta' \alpha')$$

نحول الحزمتين المؤتلفتين الى صفيين منظورين من النقط فنختار لذلك (شكل ٨٨) أى زوج من الاشعة المتناظرة مثل α, β و α', β' ونجعل α يتقاطع مع $\alpha', \beta', \gamma, \delta$ فى النقط ν و $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ وكذلك نجعل α' يتقاطع مع $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ فى النقط ν' و $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ونبدأ نحصل على صفيين منظورين من النقط (فوق كونهما مؤتلفتين) حاملهما α, α' لأن $(\alpha' \beta' \gamma' \delta') = (\alpha \beta \gamma \delta)$ (١) و $\alpha \equiv \alpha'$ وهى نقطة تقاطع الحاملين تناظر نفسها . فإذا تلاقى المستقيمان β, β' و γ, γ' فى النقطة ϵ كانت ϵ مركز المنظورية .

ولايجاد الشعاع δ ، المناظر للشعاع المعلوم δ فصل نقطة تقاطع δ مع α وهي النقطة u بمركز المنظورية z فيتقاطع z مع α في النقطة s التي يجب أن تكون نقطة تقاطع δ مع α وبذا يكون الشعاع المطلوب δ هو المستقيم l و s .



(شکل ۸۸)

وإذا اعتبرنا المستقيم ل' شعاعاً معلوماً مثل σ في الحزمة ل' وجب أن يكون الشعاع المناظر له σ' في الحزمة ل' هو المستقيم ل' ظ وإذا اعتبرنا

نفس المستقيم ل' ل شعاعاً معلوماً مثل η في الحزمة ل' كان الشعاع المناظر له η في الحزمة ل' هو المستقيم ل' ظ .

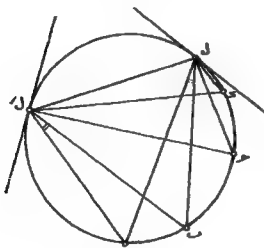
فمركز المنظورية ظ الذي هو نقطة تلاقي المستقيمين الثابتين $\eta \in \sigma$ لا يتوقف إذن على الشعاعين المتناظرين $\alpha \in \alpha'$ اللذين اخترناهما من مبدأ الأمر حاملين للصفين المتناظرين . يتبع من ذلك أنه إذا رمزنا إلى النقطة ب بالرمز $(\alpha' \beta)$ أي نقطة تقاطع $\alpha \in \beta$ وكذلك إلى النقطة ب' بالرمز $(\beta \alpha')$ وإلى المستقيم ب' ب بالرمز $(\beta \alpha) - (\beta' \alpha)$ وبالمثل لبقية النقط — فإن المستقيمت الآتية

$$\begin{aligned} & (\beta \alpha) - (\beta' \alpha) \in (\beta \alpha) - (\beta' \alpha) \in (\gamma \alpha) - (\gamma' \alpha) \in (\delta \alpha) - (\delta' \alpha) \in \dots \\ & (\gamma \beta) - (\gamma' \beta) \in (\delta \beta) - (\delta' \beta) \in \dots \text{ الخ} \end{aligned}$$

يجب أن تمر جميعاً بمركز المنظورية ظ الذي يتعين لذلك بمعلومية أى اثنين منها .

بند ٨٤ : النظرية الأساسية

نفرض أن ل' ل' نقطتان ثابتتان على الدائرة الميئة في (شكل ٨٩) وأتأ



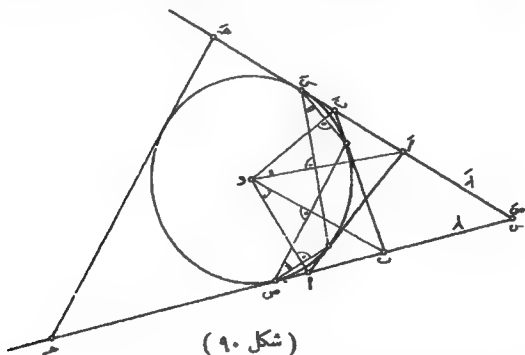
(شكل ٨٩)

وصلنا هاتين النقطتين بنقط أخرى على الدائرة مثل $\alpha \in \beta$ و $\alpha' \in \beta'$... فالحزمتان ل' ل' اللتان نحصل عليهما بهذه الطريقة هما حزمتان مؤلفتان (لأن الزوايا المتناظرة في الحزمتين هي في هذه الحالة على الخصوص زوايا متساوية مثلاً $\angle \alpha \beta = \angle \alpha' \beta'$ أي أن

$$ل' (\alpha \beta \gamma \dots) = ل' (\alpha' \beta' \gamma' \dots)$$

ويؤخذ من (شكل ٨٩) أيضا أننا إذا اعتبرنا المستقيم $ل$ ' أحد أشعة
الحزمة $ل$ كان الشعاع المناظر له في الحزمة $ل$ ' هو مماس الدائرة في $ل$ ' وإذا
اعتبرنا نفس المستقيم $ل$ ' أحد أشعة الحزمة $ل$ ' كان الشعاع المناظر له في
الحزمة $ل$ ' هو مماس الدائرة في $ل$. وذلك لأن المماس في $ل$ مثلا هو الوضع
النهائي للوتر $ل$ و عندما تنطبق $ل$ على $ل$ وفي هذه الحالة ينطبق أيضاً الوتر
 $ل$ ' و (المناظر الى $ل$) على المستقيم $ل$ ' (١) .

ولذا فرضنا في (شكل ٩٠) أن $ل$ ، $ل$ ، $ل$ ، $ل$ مماسان ثلثان للدائرة وأن
١ : ب : ح ... د ... هـ ، ب' ، د' ، هـ' ... هي نقط تقاطع هذين المماسين مع مماسات أخرى



للدائرة فمن السهل البرهنة على أن صفى النقط ١ ب ح ... د ... هـ ، ب' ، د' ، هـ' ...
صفان مؤتلفان [لأن الزاويتين المحيطيتين س' هـ س متساويتان وبما أن

(١) يمكن الوصول الى هذه النتيجة أيضا في هذه الحالة عن طريق مساواة الزاوية
المحصورة بين مماس الدائرة وأى وتر فيها مار بنقطة تماس للزاوية المحيطية المرسومة
على هذا الوتر .

و ب' ٩ و ا' عموديان على ضلعي الزاوية س' وكذا و ب' ٩ و ا' عموديان على ضلعي الزاوية ص فيتبع أن ب' و ا' = ب' و ا' وبالمثل تساوى بقية الزوايا المتناظرة في الحزمتين و (ا' ب' ح' ... ٩) و (ا' ب' ح' ... ٩) المشتركين في الرأس و فهما إذن حزمتان مؤتلفتان فاذا قطعهما مستقيمان حصلنا على صفيين مؤتلفين [أى أن

$$(ا' ب' ح' ... ٩) = (ا' ب' ح' ... ٩)$$

وبطريقة مزاجية لما ذكر عن (شكل ٨٩) يمكننا أن نستنتج من (شكل ٩٠) أننا اذا اعتبرنا النقطة (ل' ل') — وهى نقطة تقاطع الحاملين — نقطة مثل ص من الصف ل' كانت النقطة المناظرة لها س' فى الصف ل' هى نقطة تماس ل' مع الدائرة واذا اعتبرنا نفس النقطة (ل' ل') نقطة مثل ص' من الصف ل' كانت النقطة المناظرة لها ص' فى الصف ل' هى نقطة تماس ل' مع الدائرة . فاذا استخدمنا اتصافاً مركزياً معيناً فى تحويل الدائرة الميئة فى (شكل ٨٩) الى مقطع مخروطى (وذلك بافتراض مركز للاتلاف ومحور له ونقطتين متناظرتين مثلاً كما هو مبين فى بند ٧٢ وكذا فى شكل ٧٥ أو ٧٨) حصلنا على حزمتين مؤتلفتين من المستقيمت رأساهما النقطتان الثابتتان على المقطع المناظرتان الى ل' ل' ^(١) بحيث تكون نقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة فى الحزمتين الجديدتين (وهى النقط المناظرة الى ا' ب' ٩ ح' ... ٩) نقطاً على المقطع المخروطى . وهذا يبرهن على صحة

(١) يلاحظ أن الزوايا المحصورة بين الاشعة المتناظرة فى الحزمتين لا تكون متساوية فى حالة المقطع المخروطى كما هو الحال فى الدائرة ولكن تبقى الخاصة الاتلافية للحزمتين محفوظة لأن النسب المضاعفة لا تتغير بالاسقاط .

النظرية الاساسية الاولى

اذا وصلت نقطتان تابثانه ل λ ل' على مقطع مخروطي بنقطه الاخرى كانت
الزمنانه ل λ ل' زمينين مؤتفتين . ويكونه المستقيم المناظر للمستقيم ل ل' باعتبارها
معاً في امرى الزمنين هو مماس الخمنى في رأس الزمنه الاخرى (راجع شكل ٨٨) .
والعكس صحيح أى أن :

المحل الهندسى لنقط تقاطع أزواج الاشعه المتناظرة في زمينين مؤتفتين (غير
منظوريتين) هو مقطع مخروطي مار برأسى الزمنين ^(١) .
وبالمثل اذا استخدمنا الائلاف المركزى في تحويل الدائره المليمية في (شكل ٩٠)
حصلنا على مقطع مخروطى فيه الماسان الثابتان المناظران الى λ λ' هما حاملان
لصفين مؤتفتين من النقط بحيث تكون المستقيمت الواصلة بين النقط المتناظرة على
الصفين هى مماسات جديدة للمقطع المخروطى . وهذه هى النظرية المزوجة
للتنظرية السابقة ويمكن تلخيصها فيما يلى :

النظرية الاساسية الثانية

اذا تقاطع مماساه تابثانه λ λ' لمقطع مخروطى مع مماساته الاخرى لانه
الصفاه λ λ' صفين مؤتفتين . وتكونه النقطه المتناظرة للنقطه (λ) باعتبارها
امرئ نقط الصفين هى نقطه تماس حامل الصف الاخر مع المقطع (راجع شكل ٨٧) .
وعكس هذه النظرية صحيح وهو
غموف المستقيمت الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة في صفين مؤتفتين
(غير منظوريه) هو مقطع مخروطى يمر بماسى الصفين .

(١) فى حالة الزمنين المنظوريتين تتلاقى الاشعه المتناظرة على مستقيم واحد هو
كما قلنا محور المنظورية . وفى هذه الحالة يعتبر المقطع المخروطى منحلأ الى هذا المحور
والى المستقيم المار برأسى الزمنيتين .

بند ٨٥ : تطبيق مبدأ المواوجة على المقاطع المخروطية

إذا تأمل القارىء في النظريتين السابقتين (بند ٨٤) وجد أنهما متشابهتان والحقيقة أنهما متراوجتان بالمعنى الذى بيناه فى (بند ٨٢) للصفوف والحزم ونشرح الآن كيفية تطبيق مبدأ المواوجة على المقاطع المخروطية .

نفرض أن النقطة α ترسم منحياً \mathcal{M} فى مستوى مقطع مخروطى ثابت Γ . فلنط القطبي α للنقطة α بالنسبة الى المقطع Γ سيغلف منحياً \mathcal{M}' بحيث تناظر مماسات المنحنى \mathcal{M}' نقط المنحنى \mathcal{M} وفى الوقت ذاته يجب أن نلاحظ أن مماسات المنحنى \mathcal{M} تناظرها نقط على المنحنى \mathcal{M}' لأنه اذا كانت α ب نقطتين متقاربتين على المنحنى \mathcal{M} فإن خطيهما القطبيين α و β يتقابلان فى نقطة $(\beta \alpha)$ تناظر المستقيم $(\alpha \beta)$ فإذا اقتربت ب من α على المنحنى \mathcal{M} فإن $(\alpha \beta)$ يؤول الى المماس للمنحنى \mathcal{M} عند النقطة α وفى الوقت نفسه تؤول النقطة $(\beta \alpha)$ الى نقطة تماس المستقيم α مع الغلاف \mathcal{M}' . ويسمى المنحنيان \mathcal{M} و \mathcal{M}' فى هذه الحالة منحنين متزاومين بالنسبة الى المقطع المخروطى الثابت Γ .

نظريـة

إذا لاه \mathcal{M} مقطعاً مخروطياً فانه \mathcal{M}' يكونه مقطعاً مخروطياً كذلك .

لأثبت ذلك نفرض ل و \mathcal{L}' نقطتين على المنحنى \mathcal{M} ونصلهما بنقط أخرى α و β ... على نفس المنحنى فبناء على النظرية الاولى فى (بند ٨٤) تكون ل ($\alpha \beta$) = \mathcal{L}' ($\alpha \beta$) أى تكون الحزمتان ل و \mathcal{L}' مؤلفتين . فلذا كان \mathcal{L} و \mathcal{L}' هما المماسان للمنحنى \mathcal{M}' المتناظران الى ل و \mathcal{L}' وتقاطع هذان المماسان مع المماسات α و β ... (المناظرة الى النقط α و β ...) نفس المنحنى \mathcal{M}' وجب بمقتضى النظرية المذكورة فى (بند ٨٢) أن تكون النسبة المضاعفة للحزمة ل مساوية للنسبة المضاعفة للصف \mathcal{L} وبالمثل النسبة

المضاغفة للحرمة ل' تساوى النسبة المضاعفة للصف ل' أى أن الصفيين λ و λ' مؤتلفان وإذن فالمستقيمت α و β و γ ... تغلف بمقتضى عكس النظرية الاساسية الثانية في (بند ٨٤) مقطعا مخروطيا يمر أيضا λ و λ' . أى أن م' مقطع مخروطي .

ومن الممكن اثبات هذه النظرية الهامة بالطريقة البسيطة الآتية :
بما أن المنحنى م مقطع مخروطي فهو منحني من الدرجة الثانية أى أن أى مستقيم في مستويه يقطعه في نقطتين (حقيقتين أو تخيليتين) وإذن فالمنحنى م' هو منحني من الرتبة الثانية أى أنه يمكن رسم عامسين أثنتين له (حقيقتين أو تخيليتين) من أية نقطة في مستويه وعليه فهو مقطع مخروطي .

نظرية أخرى

إذا لاه م' م' مقطعين مخروطيين متزاوجين بالنسبة الى مقطع مخروطي ثابت Γ فاه أى قطب ومقط القطبي بالنسبة الى م' يناظرهما على التوالى لمقط قطبي وقطب بالنسبة الى م' وبالعكس .

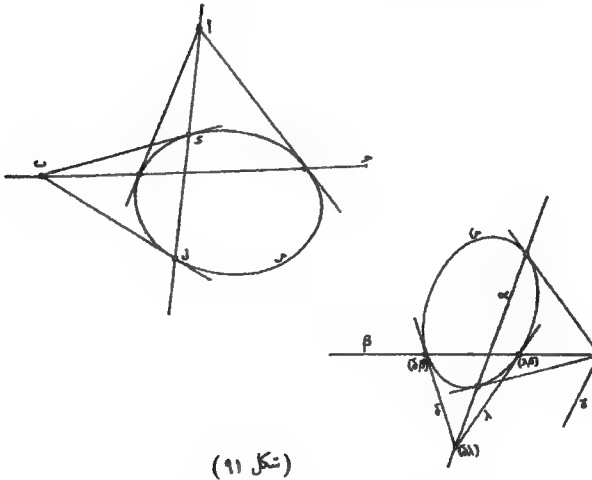
البرهان :

لنفرض في (شكل ٩١) أن ١ هو قطب المستقيم (ب ح) بالنسبة الى المنحنى م^(١) . وليكن المستقيم (و ل) أى قطع للمنحنى م' مار بالنقطة ١ فيتقاطع حينئذ المماسان عند و ل على المستقيم (ب ح) في نقطة مثل ب (و ل

(١) للاحظ القارئ أن المستقيم (ب ح) ليس هو الخط القطبي للنقطة ١ بالنسبة الى المقطع المخروطي الثابت Γ إذ أن الخط القطبي للنقطة ١ بالنسبة الى المقطع Γ (الذى هو منحني موجود في الزهن فقط) هو المستقيم الذى نسميه α فى المنحنى المزوج م' .

قعتان على المقطع المخروطي \mathcal{M} أي أن α و β قعتان مترافقتان بالنسبة للمحنى \mathcal{M} (بند ٥٤) .

وإذن قى الشكل المزاوج تكون العلاقة بين المستقيم α والنقطة $(\gamma \beta)$ هي بحيث أننا إذا أخذنا أية نقطة مثل $(\delta \lambda)$ على α فإن وتر التماس β للباسين من النقطة $(\delta \lambda)$ إلى \mathcal{M} يمر بالنقطة $(\gamma \beta)$ أي أن α و β مستقيمان مترافقان بالنسبة إلى \mathcal{M} وإذن فالمستقيم α والنقطة $(\gamma \beta)$ هما خط قطبي وقطبه بالنسبة إلى المنحنى \mathcal{M} .



(شكل ٩١)

تعبير آخر : النقط المترافقة بالنسبة إلى المنحنى \mathcal{M} تزاوجها مستقيمان مترافقة
بالنسبة إلى المنحنى \mathcal{M} وبالعكس .

نتيجة ثانية : أى مثلث قطبي (بند ٥٤) بالنسبة الى المنحنى م يزاوجه مثلث

قطبي بالنسبة الى المنحنى م'

ونستطع الآن أن نضيف الى عبارات القاموس المبين في (بند ٨٢) عبارات

جديدة مثل :

العبارات الملزمة	امرى العبارتين
غلاف مستقيم متحرك	المحل الهندسى لنقطة متحركة
ماسات المنحنى	نقط المنحنى
تعيين نقطة تماس أحد ماسات منحنى	رسم تماس لمنحنى فى إحدى نقطه
خط قطبي وقطبه	قطب وخطه القطبي
المستقيمت المراقبة بالنسبة الى المقطع	النقط المراقبة بالنسبة الى المقطع

بند ٨٦ : نتأج المسألتين والنظريتين الاساسيتين

النتيجة الاولى :

يتعين المقطع المخروطى اذا علم منه خمس نقط أو خمسة ماسات .
وذلك لان العلاقة الاتلافية بين صفين من النقط أو حزمتين من المستقيمت
تعين (بند ٨٣) بمعلومية ثلاثة أزواج متناظرة فاذا علم من مقطع مخروطى
خمس نقط واختر منها اثنتان ل م' ل' كنقطتين ثابتتين ووصلت بالنقط الثلاث
الباقية لأمكن الحصول على ثلاثة أزواج من الاشعة المتناظرة فى الحزمتين
المؤلفتين اللتين رأساهما ل م' ل' وبذلك تتعين العلاقة الاتلافية بينها بحيث
اذا رسم فى إحدى الحزمتين شعاع رابع لأمكن بتطبيق المسألة الاساسية الثانية
(شكل ٨٨) تعيين الشعاع المناظر له فى الحزمة الاخرى وتكون نقطة تقاطع

الشعاعين نقطة جديدة من نقط المنحنى وهكذا يمكن تعيين أى عدد من نقط المقطع المخروطى .

وتطبيق قاعدة المزاوجة على ما تقدم يتضح أنه بمقتضى المسألة الاساسية الاولى يمكن الحصول على أى عدد من المماسات الجديدة (مثل المماس و' و' فى شكل ٨٧) لمقطع مخروطى اذا علم منه خمسة مماسات .

النتيجة الثانية

اذا تعين مقطع مخروطى بخمس نقط واختير اثنان منها مثل ل' ل' رأسين للحزمتين المؤتلفتين (اللتين يمكن الحصول عليهما بتوصيل ل' ل' بالنقط الثلاث الباقية) كان المماسان للمنحنى فى ل' ل' هما بمقتضى النظرية الاولى (بند ٨٤) المستقيمان ظ ل' ل' على التوالى حيث ظ مركز المنظورية (شكل ٨٨) . وتطبيق مبدأ المزاوجة يمكن وضع هذه النتيجة فى الصورة الآتية :

اذا تعين مقطع مخروطى بخمس مماسات واختير اثنان منها مثل ل' ل' حاملين للصفين المؤتلفين (اللذين يمكن الحصول عليهما بجعل ل' ل' يتقاطعان مع المماسات الثلاثة الباقية) كانت نقطتا تماس ل' ل' مع المنحنى هما النقطتان (ل' ل') على التوالى حيث ع' محور المنظورية (شكل ٨٧) .

النتيجة الثالثة

اذا كان المطلوب رسم المماس فى إحدى نقط مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط (أو ما يعادلها) فالتا نختار النقطة المطلوب رسم المماس فيها رأساً لاحدى الحزمتين المؤتلفتين ثم نجد مركز المنظورية ظ فيكون المماس المطلوب هو المستقيم الذى يصل ظ بالنقطة .

واذا أريد تعيين نقطة تماس مقطع مخروطى معلوم بخمس مماسات (أو ما يعادلها) مع أحد هذه المماسات فالتا نختار هذا المماس الاخير حاملاً لاحد

الصفين المؤتلفين ثم نجد محور المنظورية ϵ فتكون نقطة التماس المطلوبة هي نقطة تقاطع ϵ مع المماس.

النتيجة الرابعة

إذا علم من مقطع مخروطي نقطة بالمماس فيها واخترنا هذه النقطة رأساً لاحتى الحزمتين المؤتلفتين فإن مركز المنظورية يقع على المماس المعلوم .
وإذا علم من المقطع مماس بنقطة تماسه واخترنا هذا المماس حاملاً لاحتى الصفين المؤتلفين فإن محور المنظورية يمر بنقطة التماس المعلومه .

بشر : ٨٧ حل المسائل الرئيسة من الدرجة الاولى بواسطة الصفوف

والخزم المرتفعة

كل مسألة لا تسمح باكثر من حل واحد يفى بالشروط المفروضة يطلق عليها اسم سائر من الدرجة الاولى لانه يمكن وضعها تحليلياً على صورة معادلة من الدرجة الاولى لها حل واحد فقط . ولحل مثل هذه المسائل بواسطة الرسم لا يحتاج الانسان الا الى استعمال المسطرة وذلك بخلاف مسائل الدرجة الثانية التي سنتكلم عنها فيما بعد (انظر بند ٩٢) حيث تستلزم لحلها استعمال البرجل أيضاً . ويمكن تركيز مسائل الدرجة الاولى للمقاطع المخروطية في أربع :

المسألة الاولى : كيفية انشاء مقطع مخروطي معلوم بتعيين نقط جديدة عليه

المسألة الثانية : كيفية رسم مماس للنحنى في نقطة معلومة عليه .

المسألة الثالثة : كيفية انشاء مقطع مخروطي معلوم برسم مماسات جديدة له .

المسألة الرابعة : كيفية تعيين نقطة تماس مماس معلوم للنحنى .

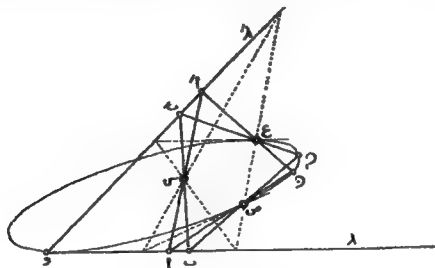
وهذه المسائل يحدها القارىء بحلولة ضمناً في المسائل الاساسيتين (بند ٨٣)

فعلى ضوء النتائج السابقة (بند ٨٦) يجد حل المسائل الاولى والثانية (حيث نفرض المقطع المخروطي معلوماً بمخمس نقط أو ما يعادلها) ميئاً في (شكل

(٨٨) وحل المسألتين المزاوجتين الثالثة والرابعة (حيث يفرض المقطع معلوماً بخمسة تماسات أو ما يعادلها) مبنياً في (شكل ٨٧).

بئر ٨٨ : أمانة تطبيقية على الصفوف والحزم المؤلفة

مثال ١ : هـ ١١' مثلث يتحرك في المستوى بحيث تمر أضلاعه ١٢' ١٣' ١٤' هـ ١' دائماً بثلاث نقط ثابتة هي س س س ع على التوالي (شكل ٩٢). فإذا كانت ١٤' ١' تتحركان على مستقيمين ثابتين ١٤' ١٣' على التوالي فثبت أن المحل الهندسي للرأس هـ هو مقطع مخروطي (طريقة ماك لوران لرسم مقطع مخروطي).



(شکل ۹۲)

البرهان: لنفرض أن $B \neq B'$ وضع جديد للثلاث فيما أن كل نقطة مثل A من الصف A تناظرها نقطة واحدة A' من الصف A' (هي نقطة تقاطع A مع المستقيم AB) وبالعكس فالصفان $AB \dots A'$ و $A'B' \dots A$ مؤلفان (وهما فوق ذلك منظوران لأن المستقيمتين AB و $A'B'$ تمر جميعاً بالنقطة S) وإذاً فالجزئتان اللتان رأساهما S و E حزمتان مؤلفتان أي أن

$$(\dots' \cup') \varepsilon = (\dots \cup \alpha) \varepsilon$$

لذلك نختار النقطة L رأساً لأحدى الحزمتين المتولفتين ونختار الرأس الثانية لنقطة L' لأن المماس فيها معلوم ويجب لذلك أن يقع مركز المنظورية ظ على هذا المماس (قرن النتيجة الثالثة والرابعة في بند ٨٦) ثم نصل :

$L \equiv \alpha \equiv L' \equiv L'' \equiv \infty$ المستقيم الذى فى اللانهاية $\equiv \beta \equiv \infty$ ونصل أيضاً : $L' \equiv \alpha' \equiv L'' \equiv L''' \equiv \infty$.

فالمستقيمان $\alpha \alpha'$ هما شعاعان متاظران فى الحزمتين المتولفتين $L \equiv L'$ وكذلك المستقيمان $\beta \equiv \beta'$. ويكون المستقيم الذى يصل النقطة $(\alpha \beta)$ بالنقطة $(\alpha' \beta')$ ^(١) يمر بمركز المنظورية ظ (بند ٨٣) فهو يقابل المماس μ فى مركز المنظورية ظ .

فإذا وصل المستقيم $L \equiv \infty$ كان هو الخط التقربى المطلوب σ .

ملحوظة :

إذا كان معلوماً من القطع الزائد بدلاً من المماس فى L' نقطة خامسة فإن رأس إحدى الحزمتين يجب أن تكون كما تقدم النقطة L التى يراد رسم المماس فيها أما الرأس الأخرى فيجوز أن تكون إحدى النقط الأربع الأخرى . ولكن إذا اخترناها النقطة الثانية L'' التى فى اللانهاية ووجدنا مركز المنظورية ظ بالطريقة الموضحة فى (شكل ٨٨) مع مراعاة ما سبق ذكره فى (بند ٦٥) عن النقط والمستقيمات التى فى اللانهاية كانت ظ فى هذه الحالة مركز القطع الزائد .

بند ٨٩ : نظريتا باسطل وريانثوره

(١) مقدمة

إذا علمت مست نقط فى المستوى قيل للخط المنكسر المقفل الناشئ عن

(١) أى المستقيم الذى يمر بالنقطة $(\alpha \beta)$ موازياً الى α' لأن النقطة $(\alpha' \beta \equiv \infty)$ هى نقطة المستقيم α' التى فى اللانهاية .

توصيل واحدة من هذه النقط باخرى ثانية ثم توصيل هذه الثانية باخرى ثالثة وهكذا الى السادسة ثم توصيل السادسة بالاولى إنه شكل سراسى وظاهر أنه يمكن اجراء عملية التوصيل هذه بعدد مقداره $6 = 720$ طريقة من الطرق المختلفة إلا أنه قد اصطلح على الا يفرق بين الشكلين السداسين اذا اتفقا في الترتيب البائرى لرؤوسهما سواء اكان هذا الاتفاق في نفس الاتجاه أو اتجاهين متضادين في الترتيب البائرى فالشكلان $١١ \ ١٢ \ ١٣ \ ١٤ \ ١٥ \ ١٦$ و $١٦ \ ١٥ \ ١٤ \ ١٣ \ ١٢ \ ١١$ يعتبران شكلا واحداً كما أن كلا منهما يعتبر منطبقاً على كل من الشكلين $١٦ \ ١٥ \ ١٤ \ ١٣ \ ١٢ \ ١١$ و $١١ \ ١٢ \ ١٣ \ ١٤ \ ١٥ \ ١٦$ وبذلك يكون هناك $\frac{720}{6 \times 2} = 60$ شكلا سداسياً مختلفاً رؤوسه $١٦ \ ١٥ \ ١٤ \ ١٣ \ ١٢ \ ١١$.

واذا وقعت هذه النقط الست على منحني قيل إن كلا من الاشكال السداسية السابقة (والبالغ عددها ٦٠ شكلاً) مرسوم داخل المنحنى .

وفيما يلي سنرمز للنقطة برقم عددي مع حذف الحرف فتكلم عن النقطة ١ والنقطة ٢ ... الخ بدلا من $١٦ \ ١٥ \ ١٤ \ ١٣ \ ١٢ \ ١١$... الخ ونرمز للواصل من النقطة ١ الى النقطة ٢ بالرمز (٢١) وهكذا .

تعريف : اذا علم شكل سداسى $٦٥ \ ٤٣ \ ٢١$ فان أزواج الاضلاع (٢١) : (٥٤) : (٣٢) : (٦٥) : (٤٣) : (١٦) تسمى أزواج الموضوع المتقابلة .
(ب) نظرية پاسكال^(١)

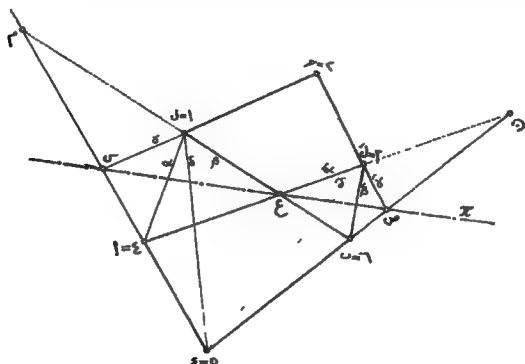
تقطع تقاطع الازواج المتوالية لموضوع المتقابلة في أى شكل سراسى مرسوم داخل منقطع مخروطى تقع على خط مستقيم يسمى «خط پاسكال» .
البرهان :

نفرض في (شكل ٩٤) أن $٦٥ \ ٤٣ \ ٢١$ شكل سداسى مرسوم داخل

(١) برهن پاسكال B. Pascal هذه النظرية سنة ١٦٤٠ وهو في السادسة عشرة من عمره !

مقطع مخروطي وأنه يراد البرهنة على أن النقط $س٩$ $ص٩$ $ع$ وهي نقط تقاطع أزواج الاضلاع المتقابلة : $(٢١) . (٥٤)٩ (٣٢) ، (٦٥)٩ (٤٣) : (١٦)$ على استقامة واحدة .

لذلك نعتبر النقطتين ٣٩ ١ رأسين للحزمتين المتوالتين $\alpha \beta \gamma \delta$ $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ اللتين يمكن الحصول عليهما بتوصيل النقطتين ٣٩ ١ (الموزولهما بالمزين $ل٩$ $ل'$)



(شكل ٩٤)

بالنقط الباقية : $١ = ٤$ ٦٩ $ب = ٢٩$ $ح = ٥٩$ $و$ فبناء على النظرية الأساسية الاولى (بند ٨٤) تكون

$$(\alpha' \beta' \gamma' \delta') = (\alpha \beta \gamma \delta)$$

فاذا فرضنا أن الحزمة $ل$ قطعت الضلع (٥٤) $١ \equiv$ في النقط $٩م٩$ ١ $س٩$ $و$ على التوالي وأن الحزمة $ل'$ قطعت الضلع (٦٥) $و \equiv$ في النقط $٩ب٩$ $ص٩$ $و$ على التوالي فإن صفى النقط المتكونة حيثند على الحاملين $(٥٤)٩ (٦٥)$ يكونان صفين متوالتين لأن

$$(٢١ س ع) = (\delta \gamma \beta \gamma) = (\delta' \gamma' \beta' \alpha) = (\delta ب ص ع)$$

وحيث إن النقطة δ في هذين الصفين وهي نقطة تقابل حاملهما تناظر نفسها فيكون الصفان إذن منظورين ويجب لذلك أن تمر المستقيمتان الواصلتان بين أزواج النقط المتناظرة في الصفين بنقطة واحدة أى أن المستقيمتان $\delta ب$ و $\delta ص$ يجب أن تمر جميعاً بالنقطة ϵ وإذن فالنقط $\delta ب$ و $\delta ص$ ϵ يجب أن تكون على استقامة واحدة .

ملحوظة : سنرمز غالباً بالمسائل والأمثلة الآتية بالرمز δ لنقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٢١) δ (٥٤) كما سنرمز بالرمز δ لنقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٣٢) δ (٦٥) وبالرمز ϵ لنقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٤٣) δ (١٦) . وأخيراً سنرمز لخط پاسكال بالرمز π أى أن $\pi \equiv \delta ب ص ع$.

(ح) نظرية بريانشون ^(١)

المستقيمتان التي تصل رؤوس المقابلة في أى شكل سداسي مرسوم خارج مقطع مخروطي تقابل في نقطة واحدة تسمى « بنقطة بريانشون » .
ترك إثبات صحة هذه النظرية كتمرين للقارئ على قاعدة المزاوجة (بند ٨٢) مع ملاحظة أن الشكل السداسي المؤلف من ستة مستقيمتان يسمى مرسوماً خارج (أو حول) منحني معلوم إذا كانت أضلاعه جميعاً تمس المنحني . وإذا رمزنا لأضلاع الشكل السداسي في هذه الحالة مأخوذة على الترتيب بالارقام ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ولنقطتين تلتقي الضلعين ١ ٢ بالرمز (٢١) وهكذا فإن أزواج النقط (٢١) ، (٥٤) ، (٣٢) ، (٦٥) ، (٤٣) ، (١٦) تسمى رؤساً مقابلة .

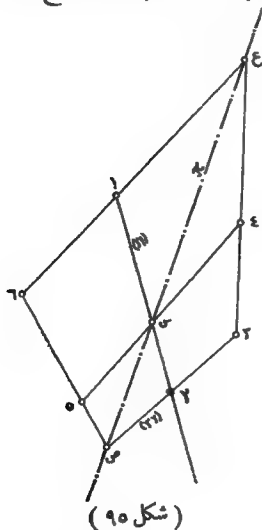
وسنرمز غالباً في المسائل والأمثلة الآتية للمستقيجات الثلاثة التي تصل كل زوج من تلك الرؤوس المتقابلة بالرموز α β γ على التوالي كما سنرمز لنقطة بريانشون التي تتلاقى فيها هذه المستقيجات بالرمز δ .

نبر ٩٠ : حل المسائل الرئيسية من الدرجة الأولى بواسطة أساليب بريانشون

نذكر فيما يلي كيفية حل المسائل الرئيسية الأربعة التي يرجع إليها في حل مسائل الدرجة الأولى للمقاطع المخروطية (بند ٨٧) وذلك بواسطة نظرتي بإسكال (إذا كان المقطع معلوماً بخمس نقط) وبريانشون (إذا كان المقطع معلوماً بخمس مماسات) :

المسألة الأولى

إذا علم من منحنى مقطع مخروطي خمس نقط ورسم من إحداها مستقيم فالمطلوب تعيين نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المنحنى ^(١).
لذلك نفرض النقط المعلومة كما هو مبين في (شكل ٩٥) . فإذا رمزنا للنقطة المرسومة منها المستقيم المعلوم بالرقم ١ فيجب أن نرمز للنقطة المطلوب تعيينها بالرقم ٢ أو بالرقم ٦ لأن المستقيم المعلوم هو أحد أضلاع الشكل السداسي



(شكل ٩٥)

(١) أو بعبارة أخرى : المطلوب إنشاء مقطع مخروطي معلوم بخمس نقط وذلك بتعيين نقط جديدة عليه .

الذى يصل رأسين متتاليين من رؤوسه . فإذا فرضنا أن النقطة المطلوب تعيينها هي ٢ بحيث يكون المستقيم المعلوم هو الضلع (٢١) فإنه يمكن تسمية النقط الباقية بأى ترتيب كان : ٣ ٤ ٥ ٦ . ويكون خط پاسكال هو $\pi \equiv س ع$ حيث س هي نقطة تقاطع الضلع (٢١) مع الضلع المقابل له (٥٤) وحيث ع هي نقطة تقاطع الضلع (٤٣) مع الضلع المقابل له (١٦) .

فإذا رسم خط پاسكال أمكن تعيين النقطة الباقية المجهولة س عليه والتي هي نقطة تقاطع الضلع المجهول (٣٢) مع الضلع المعلوم (٦٥) إذ أن س هي نقطة تقاطع π مع الضلع (٦٥) فإذا وصل (٣ ص) كان هذا الواصل نفس الضلع (٣٢) الذى يقطع لذلك الضلع (٢١) فى النقطة المطلوبة ٢ .

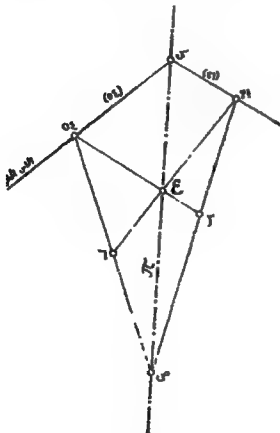
ملحوظة : إذا كان المقطع المخروطى معلوماً بأربع نقط والمماس فى إحداها فإن هذا لا يغير من طريقة الحل المشروحة آنفاً لأن النقطة المعلوم فيها المماس

تحتسب فى هذه الحالة بنقطتين (متتاليتين) ويرمز لها لذلك برقين متتاليين مثل ١ ٢ فيكون المماس فيها هو الضلع (٢١) .

المسألة الثانية .

المطلوب رسم المماس فى إحدى نقط مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط

لشرح الملاحظة السابقة نفرض فى (شكل ٩٦) أن المعلوم هو أربع نقط والمماس فى إحداها (وهذا



(شكل ٩٦)

يعادل خمس نقط) وأن المطلوب هو رسم المماس في واحدة من النقط الأخرى .
 لذلك نرمز للنقطة المعلوم فيها المماس برقمين متتاليين كما قدمنا مثل ٢٩١
 (وتكتب : ٢١) فيكون المماس هو الضلع (٢١) من الشكل السداسي المرسوم
 داخل المقطع . وبالمثل نرمز للنقطة المطلوب رسم المماس فيها برقمين متتاليين
 (إذ يجب أن تحسب مثل النقطة الأولى بنقطتين متتاليتين) مثل ٤٥٥ فيكون
 المطلوب إذن هو إيجاد الضلع (٥٤) وأخيراً نرمز للنقطتين الباقيتين بالرقين
 ٦٩٣ . ثم نرسم خط پاسكال $\pi \equiv \text{ص ع حيث ص}$ هي نقطة تقاطع الضلع
 (٣٢) مع الضلع المقابل له (٦٥) وحيث ع هي نقطة تقاطع الضلع (٤٣) مع
 الضلع المقابل له (١٦) . فلذا تقاطع الضلع (٢١) مع π في النقطة س ووصلت
 س بالنقطة ٥٤ المطلوب رسم المماس فيها كان هذا الواصل هو الضلع (٥٤)
 أي المماس المطلوب .

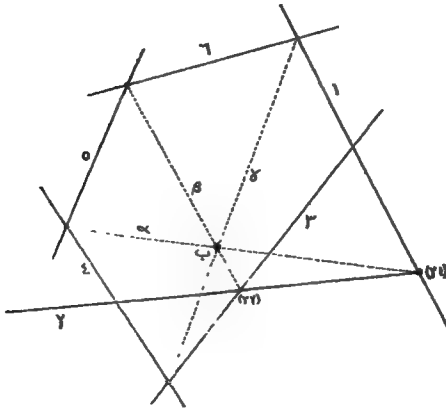
المسألة الثالثة (مزاوجة للأولى)

إذا علم من مقطع مخروطي خمسة مماسات فالمطلوب رسم مماس سادس له من
 نقطة معلومة على أحد المماسات الخمسة ^(١) .

إذا رمزنا في (شكل ٩٧) للمماس المعلوم عليه النقطة بالرقم ١ فيجب أن
 يكون المماس المجحول والمطلوب رسمه من هذه النقطة إما التالي للمماس ١ مباشرة
 أو السابق له مباشرة أي يجب أن نسميه إما ٢ أو ٦ وقد رمزنا في الشكل لهذا
 المماس المطلوب بالرقم ٢ فتكون النقطة المعلومه هي نقطة تقاطع الضلعين
 ٢٩١ أي النقطة (٢١) من أضلاع الشكل السداسي ٦٥٤٣٢١
 المرسوم خارج المقطع المخروطي . فالمستقيم α الذي يصل الرأسين المتقابلين

(١) أو بعبارة أخرى: المطلوب إنشاء مقطع مخروطي معلوم بخمسة مماسات
 وذلك برسم مماسات جديدة له .

(٢١) ٩ (٥٤) يمر بنقطة بريانشون β وكذا المستقيم γ الذي يصل الرأسين المتقابلين (٤٣) ٩ (١٦) فتكون β هي نقطة تقاطع γ ٩ α . فاذا وصلت β بالنقطة (٦٥) وجب أن يكون هذا الواصل هو المستقيم الثالث β الذي يصل الرأسين المتقابلين (٣٢) ٩ (٦٥) وبذلك تكون α ٩ β ٩ γ ثلاثي متلاقٍ مع المماس ٣ ويكون المماس المطلوب γ هو المستقيم الذي يصل النقطتين (٢١) ٩ (٣٢) .

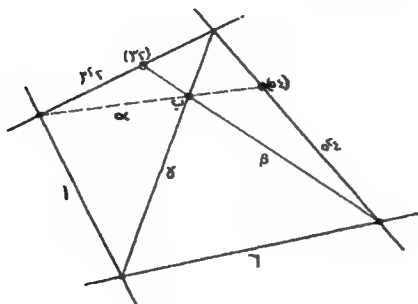


(شكل ٩٧)

ملحوظة : إذا علم من المقطع المخروطي مماس بنقطة التماس فيعتبر مماسين متالين ويرمز له لذلك برقمين متالين مثل ٢٩١ وتكون نقطة التماس هو الرأس (٢١) .

المسألة الرابعة (مزاوجة للثانية)

المطلوب تعيين نقطة تماس أحد المماسات لقطع مخروطي معلوم بخمسة مماسات .
 لشرح الملحوظة السابقة نفرض في (شكل ٩٨) أن المعلوم أربعة مماسات
 ونقطة تماس أحدها (وهذا يعادل خمسة مماسات) وأن المطلوب تعيين نقطة
 تماس أحد المماسات الأخرى .



(شکل ۹۸)

لذلك نرسم للمماس المعلومة نقطة تماسه برقمين متتاليين كما قمنا مثل ٢٩٢ وبذا تكون نقطة التماس هي الرأس (٣٢) ونرسم بالمثل للمماس المطلوب تعيين نقطة تماسه برقمين متتاليين مثل ٥٩٤ فكون نقطة التماس المطلوبة هي الرأس (٥٤) ثم نكمل الشكل السداسي بتسمية الضلعين الباقيين ٦٥١ .

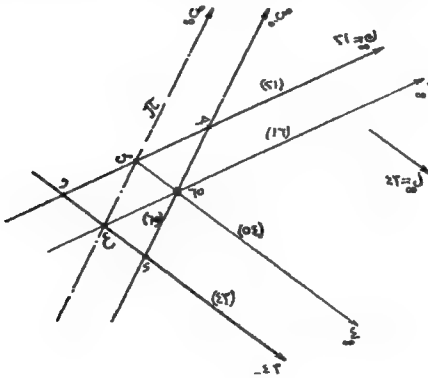
فقطه بريانشون ب تبعين في هذه الحالة بتقاطع المستقيم β الذي يصل الرأسين المتقابلين (٣٢) γ (٦٥) مع المستقيم γ الذي يصل الرأسين المتقابلين (٤٣) α (١٦) . فاذا وصلنا ب بالرأس (٢١) كان هو المستقيم الثالث α

الذى يصل الرأسين المتقابلين (٢١) ٢ (٥٤) والذى يقطع لذلك المماس ٥٤ في الرأس (٥٤) وهى نقطة التماس المطلوبة .

بند ٩١ أمثلة تطبيقية على نظريتي باسكال وبريانشور

إذا لاحظنا ما سبق ذكره في (بند ٦٥) فيما يتعلق بالعمليات الهندسية البسيطة الخاصة بالنقط والمستقيحات التى فى اللانهاية فان الامثلة الآتية وكلها من الدرجة الأولى لا تختلف عن المسائل الرئيسية المشروحة فى البند السابق مع جواز تكرار هذه المسائل فى المثال الواحد .

مثال ١ : إذا علم من قطع زائد أحد الخطين التقريبين واتجاه الآخر وعلت أيضاً نقطة عليهما المماس فيها فالمطلوب رسم الخط التقربى الثانى نفسه (شكل ٩٩) .



(شكل ٩٩)

المعلوم فى هذا المثال خمس نقط من المنحنى لأن الخط التقربى المعلوم وهو المماس فى إحدى نقطتي القطع الزائد اللتين فى اللانهاية — يمكن اعتباره نقطة على المقطع المخروطى المماس فيها معلوم وبالمثل النقطة الاخرى المعلوم فيها

المماس ولذلك يصح اعتبار كل من هاتين النقطتين نقطتين متاليتين وبمجموع ذلك أربع نقط و اتجاه الخط التقريبي الآخر يعين نقطة القطع الزائد الثانية التي في اللانهاية أى النقطة الخامسة على المقطع ^(١).

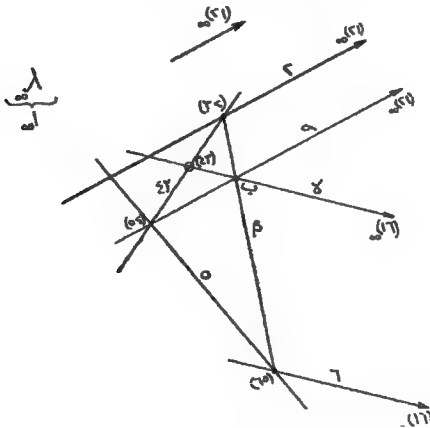
ولما كان المطلوب في المسألة هو الخط التقريبي الثاني أى المماس في النقطة الثانية ل ∞ التي في اللانهاية فإن هذا المثال يطابق المسألة الرئيسية الثانية (شكل ٩٦). ولذا رمزنا في (شكل ٩٩) للنقطة ∞ المعلوم فيها الخط التقريبي بالرقين المتتاليين ٢١ وللنقطة ل ∞ المطلوب رسم خطها التقريبي بالرقين ٤٣ وللنقطة المعلوم فيها المماس بالرقين ٦٥ وبنا يكون الخط التقريبي المعلوم هو الضلع (٢١) والمماس المعلوم هو الضلع (٦٥) والخط التقريبي المطلوب رسمه هو الضلع (٤٣) ويكون خط پاسكال في هذه الحالة هو 'المستقيم $\pi \equiv س س \infty$ حيث $س$ هي نقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٢١) ∞ (٥٤) وحيث $س \infty$ هي نقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٣٢) ∞ (٦٥) والأول منهما هو نفس المستقيم الذى في اللانهاية لأنه يصل النقطتين ٢ ∞ ٣ اللتين في اللانهاية . فإذا تقابل الضلع (١٦) مع π في النقطة الثالثة ع ورسم من ع مواز للاتجاه ل ∞ أى وصلت ع بالنقطة ل ∞ كان هو الضلع (٤٣) أى الخط التقريبي المطلوب ^(٢).

مثال ٢ : إذا علم من قطع مكافئ ثلاثة مماسات ونقطة التماس على أحدها فالمطلوب رسم مماس القطع الموازى لاتجاه معلوم ^(٣).

- (١) يلاحظ أنه كان يمكن اعتبار الخط التقريبي والمماس في النقطة المعلوم — أربعة مماسات لو كان المعلوم من القطع الزائد مماس خامس بدلا من النقطة الخامسة .
- (٢) يلاحظ أن النقطة المعلوم ٦٥ يجب أن تكون بمقتضى خاصية القطع الزائد المشروحة في (بند ٧٣ ع) — في منتصف البعد ح د (شكل ٩٩) فباستخدام هذه الخاصية يمكن رسم الخط التقريبي المطلوب بطريقة بسيطة جداً .
- (٣) مثل هذا المثال في القطع الناقص أو الزائد مسألة من الدرجة الثانية (أنظر بند ٩٢ ح) ولكنه في القطع المكافئ حيث لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد له مواز لاتجاه معلوم (بند ٧٤) — من الدرجة الأولى .

لما كان المستقيم λ_∞ الذي في اللانهاية في المستوى يعتبر مماساً للقطع المكافئ، وكان المماس المعلومة نقطة تماسه يحسب بمماسين فالقطع المخروطي يعتبر في هذه الحالة معلوماً بخمسة مماسات. ولما كان الاتجاه المعلوم يمكن اعتباره نقطة معلومة على المماس λ_∞ الذي في اللانهاية كان هذا المثال مطابقاً للسؤال الرئيسية الثالثة (شكل ٩٧).

لذلك نرمز في (شكل ١٠٠) للمماس λ_∞ الذي في اللانهاية بالرقم ١ ونرمز للمماس المطلوب بالرقم ٢ فتكون النقطة التي في اللانهاية الواقعة على المماس λ_∞



(شكل ١٠٠)

والتي يحددها الاتجاه المعلوم هي الرأس (٢١) ∞ . تم نكمل الشكل السداسي المرسوم حول المنحنى بتسمية المماسات الثلاثة الباقية : ٤٣ ٥ ٦ فتكون نقطة التماس المعلومة على المماس ٤٣ هي الرأس (٤٣).

ثم نجد نقطة بريانشون B بمعلومية α وهو المستقيم الذى يصل الرأسين المتقابلين $(21) \infty$ α (٥٤) ومعلومية المستقيم γ الذى يصل الرأسين المتقابلين $(42) \infty$ α (١٦) فتكون B نقطة تقاطع هذين المستقيمين . فإذا وصلنا B بالرأس (65) كان هذا الواصل هو المستقيم الثالث β الذى يصل الرأسين المتقابلين $(22) \infty$ α (٦٥) والذى يقطع لذلك المماس ٣ فى الرأس (32) فيكون المستقيم المرسوم من هذه الرأس موازياً للاتجاه المعلوم [أى الذى يصل الرأس (32) بالرأس $(21) \infty$] هو المماس ٢ المطلوب .

مثال ٣ : اذا علم من قطع مكافئ مماسان ونقطة التماس لكل منهما فالمطلوب تعيين الرأس والمحور بواسطة نظرية بريانشون .
حل هذا المثال تتبع الخطوات الآتية :

اولاً — تعيين اتجاه المحور أو بعبارة أخرى تعيين نقطة تماس المستقيم ∞ الذى فى اللانهاية والذى هو المماس الخامس (وهذا يطابق المسألة الرئيسية الرابعة فى شكل ٩٨) .

ثانياً — رسم المماس الموازى للاتجاه العمودى على اتجاه المحور (وهذا يطابق كما قدمنا فى المثال الثانى المسألة الرئيسية الثالثة فى شكل ٩٧) ^(١) فيكون هو المماس فى الرأس .

ثالثاً — تعيين نقطة التماس للباس فى الرأس (بعد جعل عدد المماسات المعلومه خمسة فقط ليطابق المسألة الرئيسية الرابعة فى شكل ٩٨) فتكون هى رأس القطع المكافئ ومنها نرسم موازياً لاتجاه المحور فيكون هو المحور المطلوب .

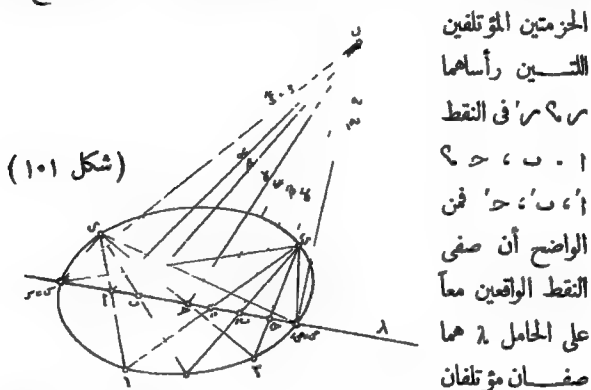
(١) يلاحظ أنه بعد تعيين اتجاه المحور فى الخطوة الأولى يصبح معلوماً من المحنى ستة مماسات (ثلاثة مماسات بنقطة التماس لكل منها) فيحسن قبل البدء بحل الجزء الثانى من المثال — أن نستغنى عن أحد هذه المماسات وذلك مثلاً بحذف إحدى مماسات التماس المعلومتين فى رأس المسألة

بند : ٩٢ مسائل الدرجة الثانية ودائرة متنايزة (١)

(١) الصفوف المتولفة الواقعة على حامل واحد والحزم المتولفة المارة

براس واحدة

إذا فرضنا في (شكل ١٠١) مستقيماً λ يقطع المقطع المخروطي المتعين بالنقط الخمس $م١ م٢ م٣ م٤ م٥$ في النقطتين $س١ س٢$ ويقطع أشعة



الحزمتين المتولفتين
التيين رأسهما
 $م١ م٢ م٣$ في النقط
١ . ب ، ح ، د ، هـ
أ ، ب ، ح ، د ، هـ فن
الواضح أن صفي
النقط الواقعين معاً
على الحامل λ هما
صفان متولفتان

فيهما ١ ، أ ، ب ، ح ، د ، هـ أزواج من النقط المتناظرة وأن العلاقة
الامتلائية بينهما قد تحددت بمعلومية هذه الأزواج الثلاثة . فإذا كانت و
نقطة ما من الصف الاول أمكن تعيين النقطة و' في الصف الثاني المناظرة الى و
(وذلك بتوصيل الشعاع $م١$ في الحزمة $م١$ تم تعيين الشعاع المناظر له في الحزمة
 $م١$ كما تقدم في بند ٨٣) بحيث يكون $(أ' ب' ح' د' هـ) = (أ ب ح د)$.

ويؤخذ من الشكل أن كلا من النقطتين $s \equiv s' \equiv s''$ تناظر نفسها في هذين الصفيين المتوازيين والتمرى الحامل ويطلق على هاتين النقطتين اسم النقطتين المضاعفتين .

وفي كل علاقة اتلافية من النوع السابق لا يمكن أن يكون هاتان النقطتان إما حقيقتين مختلفتين كما في مضاعفتين استين . ويجوز أن تكون هاتان النقطتان إما حقيقتين مختلفتين كما في (شكل ١٠١) أو حقيقتين متحدتين (كما لو كان λ مماساً) أو حقيقتين تخيليتين (كما لو كان λ غير قاطع للمنحنى) . أما إذا وجدت ثلاث نقط مضاعفة (مناظرة لنفسها) فإن كل نقطة على الحامل المشترك للصفيين تناظر نفسها أيضاً لأن العلاقة الاتلافية بين الصفيين يمكن اعتبارها قد تحددت في هذه الحالة بهذه النقاط الثلاث المناظرة لنفسها .

وإذا فرضنا في (شكل ١٠١) نقطة ما مثل l ووصلناها بالنقط a, b, c, \dots حصلنا على هزتين مؤلفتين مشتركين في الرأس l فيهما $\xi \equiv \xi' \equiv \xi''$ شعاعان يناظر كل منهما نفسه ويطلق عليهما اسم المستقيمين المضاعفين أو الشعاعين المضاعفين .

(ب) المسائل الأساسية

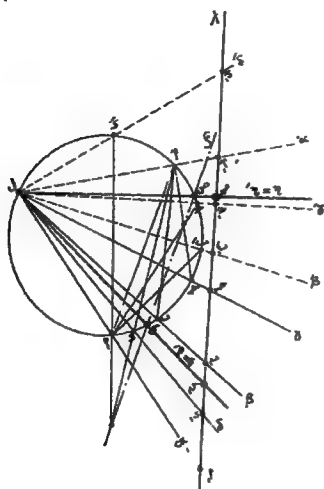
المسألة الأولى :

إذا علمت العلاقة الاتلافية بين هزمتين مؤلفتين مشتركين في الرأس l بثلاثة أزواج من الأشعة المناظرة $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ فالمطلوب رسم :

أولاً — الشعاع δ في إحدى الهزمتين المناظر للشعاع δ في الهزمة الأخرى بحيث يكون $(\alpha' \beta' \gamma' \delta) = (\alpha \beta \gamma \delta)$

ثانياً - الشعاعين المضاعفين

لذلك نرسم دائرة حيثما اتفق مارة بالرأس المشتركة لـ (شكل ١٠٢)



هاتان الحزمتان مؤلفتان

(شکل ۱۰۲)

$$(w \text{ راجع بند } w) (\dots \gamma' \beta' \alpha) = (\dots \delta' \zeta' \iota) \text{ ا}$$

وكذلك $(\dots \gamma \beta \alpha) = (\dots \delta \epsilon \zeta)'$

ولكن $(\dots \gamma' \beta' \alpha) = (\dots \gamma \beta \alpha)$ فرضاً

$$(\dots \mathcal{H} \cup \mathcal{A})' \uparrow = (\dots \mathcal{H}' \cup \mathcal{A}') \uparrow \therefore$$

ومن حيث إن المستقيم ١١' الذى يصل رأسى هاتين الحزمتين المؤلفتين
 ينظر نفسه فيما إذن حزمتان منظورتان بحيث يكون محور النظرية ١٢' هو
 المستقيم الذى يصل نقطة تقاطع المستقيمين المتناظرين ١١' ب' ١٢' ب نقطة
 تقاطع ١١' ب' ١٢' ب (راجع بند ٨٢).

(١) يلاحظ أنه كان يمكن استخدام مقطع مخروفي ماراً بالرأس ل بدلا من البائرة وانما اختيرت الدائرة للسهولة .

المادة الثانية :

إذا علمت العلاقة الاتلافية بين صفين مؤلفين واقعين على حامل واحد بثلاثة أزواج من النقط المتناظرة فالمطلوب تعيين النقطتين المضاعفتين .
هذه المسألة مزوجة للاولى وتحل بنفس الطريقة السابقة بعد تحويل الصفين الى حزمين مؤلفتين مشتركتين في الرأس التي يجوز أن تكون أية نقطة غير واقعة على حامل الصفين .

ملحوظة هامة

يعرف بعض العلماء النسبة المضاعفة لدرج تقط $\alpha \beta \gamma \delta$ و $\epsilon \zeta \eta \theta$ على مقطع مخروطي بأنها النسبة المضاعفة لدرجته الاربعة التي تصل هذه النقط باية تقط مثل δ على المنحنى ويطلقون كذلك اسم الصف على مجموعة النقط الواقعة على المقطع . ويقال لصفين من النقط $\alpha \beta \gamma \delta$ و $\epsilon \zeta \eta \theta$ ' $\alpha \beta \gamma \delta$ و ' $\epsilon \zeta \eta \theta$... على مقطع مخروطي (شكل ١٠٢) لانهما صفاه مؤلفاه اذا تساوت نسبتاهما المضاعفتان .
فاذا علمت ثلاثة أزواج $\alpha \beta \gamma \delta$ و $\epsilon \zeta \eta \theta$ و $\iota \kappa \lambda \mu$ من النقط المتناظرة في صفين مؤلفين على مقطع مخروطي فان طريقة الحصول على النقطة و ' في أحد الصفين المتناظرة لنقطة ما مثل و من الصف الآخر وكذلك طريقة تعيين النقطتين المضاعفتين $\alpha \beta \gamma \delta$ و $\epsilon \zeta \eta \theta$ تكون بتحويل الصفين على المقطع الى حزمين رأسهما المشترك إحدى نقط المنحنى ثم تعيين محور المنظورية كما بينا في (شكل ١٠٢) وبذلك يمكننا القول انه النقطتين المضاعفتين (حقيقيتين أو تخيليتين) في صفين مؤلفين على منحنى مقطع مخروطي هما نقطتا تقاطع محور المنظورية مع المنحنى ^(١)

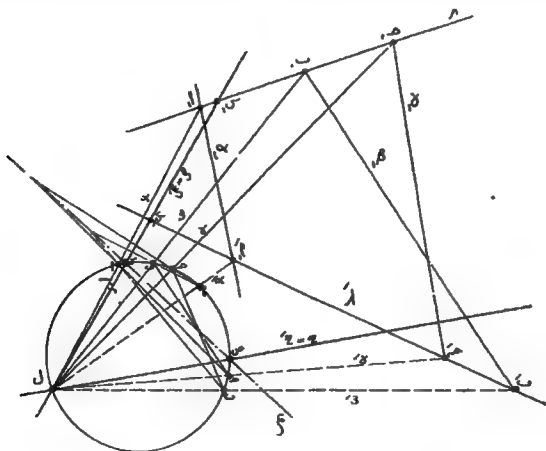
(١) ولهذا السبب أطلقنا على هذا المحور اسم « محور المنظورية للدائرة أو للقطع » فهو إذن المحور الذي يمكن الحصول عليه اذا تعينت العلاقة الاتلافية بين صفين على المنحنى أو حزمين مشتركين في رأس واقعة على المنحنى .

(ح) المسألتان الرئيسيتان ذواتا الدرجة الثانية

المسألة الاولى :

إذا علمت نقطة مثل λ فالمطلوب رسم الماسين منها الى مقطع مخروطي معلوم بخمسة مماسات $\lambda \epsilon \alpha \epsilon \beta \epsilon \gamma$ (شكل ١٠٣)

لذلك نجعل ثلاثة من المماسات المعلومة مثل $\alpha \epsilon \beta \epsilon \gamma$ تقطع الاثنین الباقيين $\lambda \epsilon \gamma$ في أزواج النقط $١, ١'$ ، $٢, ٢'$ ، $٣, ٣'$ ، حيث γ فيكون بذلك صفان مؤتلفان حاملهما $\lambda \epsilon \gamma$ ثم نصل λ بتلك النقط فنحصل على ثلاثة أزواج



(شكل ١٠٣)

$\alpha \epsilon \beta \epsilon \gamma \epsilon \lambda$ ، $\alpha' \epsilon \beta' \epsilon \gamma' \epsilon \lambda$ من الاشعة المتناظرة في حزمتين مؤتلفتين مشتركتين في الرأس λ ثم نجد الشعاعين المضاعفين $\xi \equiv \xi' \epsilon \eta \equiv \eta'$ في هاتين

الحزمتين كما تقدم في (شكل ١٠٢) فيكونان هما المماسان المطلوبان . لأنه اذا كانت
 σ_1, σ_2 نقطتي تقاطع ξ مع γ, δ على التوالي فن حيث إن
 $(\alpha \beta \gamma \xi) = (\alpha \beta \gamma' \xi')$ بالعمل
 $\therefore (\alpha \beta \gamma \delta) = (\alpha \beta \gamma' \delta')$
 وينتج من ذلك أن المستقيم ξ الذي يصل النقطتين المتناظرتين σ_1, σ_2
 مماس (راجع بند ٨٤) .

واذا كانت النقطة λ المطلوب رسم المماسين منها الى المقطع المخروطي هي
 نقطة في اللانهاية لهما كانت جميع الاشعة المتناظرة $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$
 في هذه الحالة متوازية . فالحصول على الشعاعين المضاعفين تقطع الحزمتين
 بمستقيم حيثما اتفق وبذلك نحول الحزمتين المؤتلفتين المشتركين في الرأس ،
 لهما الى صفتين مؤتلفتين على حامل واحد ثم نجد النقطتين المضاعفتين في هذين
 الصفتين ونصلهما بالرأس لهما أو بعبارة أخرى نرسم منهما موازيين لاشعة
 الحزمتين فيكونان هما الشعاعان المضاعفان أى المماسان المطلوبان (١) .

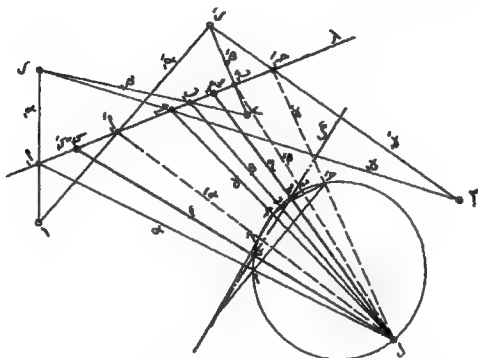
المسألة الثانية :

اذا علم مستقيم مثل λ فالمطلوب تعيين نقطتي تقاطعه مع مقطع مخروطي
 معلوم بخمس نقط $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ (شكل ١٠٤) .

لذلك نصل ثلاثا من النقط المعلومة مثل $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ بالنقطتين الباقيتين
 σ_4, σ_5 فنحصل بذلك على ثلاثة أزواج $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$
 من الاشعة المتناظرة في الحزمتين المؤتلفتين اللتين رأساهما σ_4, σ_5 . فاذا تقاطع
 λ مع هذه الاشعة في النقط $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ وهي ثلاثة

(١) في القطع المكافئ. تقول هذه الحالة الاخيرة الى مسألة من الدرجة الاولى
 (راجع المثال الثاني في بند ٩١) .

أزواج من النقط المتناظرة تُحدد العلائق بين الصفيين المؤتلفين المتحدى الحامل λ
كانت النقطتان المضاعفتان $س_١ \equiv س'_١$ ، $س_٢ \equiv س'_٢$ في هذين الصفيين هما
نقطتا التقاطع المطولتان



(شكل ١٠٤)

ولمعرفة نوع المقطع المخروطى اذا علمت منه خمس نقط نعين نقطتى تقاطعه
مع المستقيم الذى فى اللانهاية وذلك بنفس الطريقة المشروحة آنفاً مع ملاحظة
ما ذكر فى (بند ٦٥) عن النقط والمستقيمت التى فى اللانهاية^(١) . فيكون
المنحنى قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما اذا كانت نقطتا التقاطع
حقيقتين مختلفتين أو حقيقتين متحدتين أو تخيليتين أى على حسب ما اذا كان
محور المنظورية لدائرة شتاينر قطعاً لهذه الدائرة (فى نقطتين حقيقتين
مختلفتين) أو ماساً لها أو غير قاطع لها .

(١) ففى هذه الحالة يكون المستقيم الذى فى اللانهاية هو الحامل المشترك لصفى النقط
 $١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠$
على التوالى

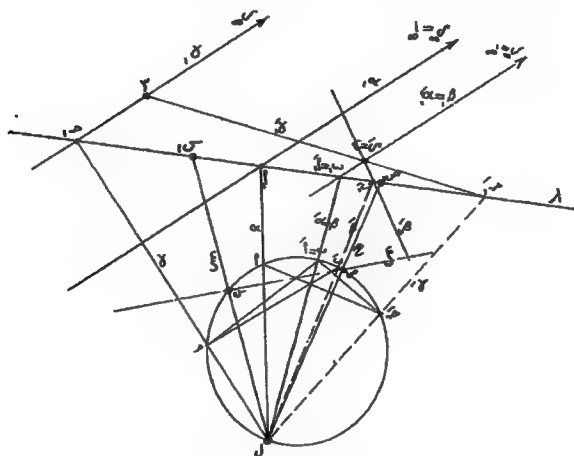
ملحوظة : اذا أريد رسم مماسين من نقطة الى مقطع مخروطي معلوم بخمس نقط أو أريد تعيين نقطتي تقاطع مستقيم مع مقطع مخروطي معلوم بخمسة مماسات فانه يجب كخطوة أولى استخدام نظرية پاسكال في الحالة الاولى في تحويل النقط المعلومة الى مماسات واستخدام نظرية بريانشون في الحالة الثانية في تحويل المماسات المعلومة الى نقط .

بند ٩٣ : أمثلة تطبيقية من الدرجة الثانية

مثال ١ : المعلوم من قطع زائد أحد خطيه التقريبن ونقطتان والمماس في إحدهما والمطلوب تعيين نقطتي تقاطعه مع مستقيم معلوم ℓ (شكل ١٠٥) الخطوة الاولى — نختار نقطتين من النقط المعلومة ونجعلهما رأسين $م١م$ ، $م٢م$ للحزمتين المؤلفتين الناتجتين من توصيلهما بالنقط الاخرى على المنحنى . فاذا كان المقطع المخروطي معلوماً بخمس نقط مختلفة (ليس بينها نقط متالية) كما هو الحال في المسألة الرئيسية الثانية (بند ٩٢) أخذت $م١م$ ، $م٢م$ حيثما اتفق من بين النقط الخمس أما اذا كان المماس في إحدى النقط معلوماً فنتخار هذه النقطة بالذات رأساً لاحدى الحزمتين المذكورتين . ففى هذا المثال نختار النقطتين المعلوم في كل منهما المماس (إحدهما نقطة في اللانهاية) لىكونا الرأسين $م١م$ ، $م٢م$.

الخطوة الثانية — نرسم للثلاث نقط ، الاخرى ، بالارقام ١، ٢، ٣ فما أن كلا من الرأسين $م١م$ ، $م٢م$ تمثل نقطتين متاليتين لذلك نرسم للنقطة المجاورة للرأس $م١م$ والمنطقة عليها بواحد من هذه الارقام وليكن ١ وبالمثل نرسم للنقطة المجاورة للرأس $م٢م$ بالرقم ٢ مثلاً أى أن $م١م \equiv ١$ ، $م٢م \equiv ٢$ وتكون النقطة الباقية ٣ .

الخطوة الثالثة - فصل كلام من ∞ مر' بالنقط الثلاث ٣٩٢٩١ فقطع الاشعة المستقيم المعلوم ٢ في النقط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٥، ٧٦، ٧٧، ٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١، ٨٢، ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٦، ٨٧، ٨٨، ٨٩، ٩٠، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٦، ١٠٧، ١٠٨، ١٠٩، ١١٠، ١١١، ١١٢، ١١٣، ١١٤، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١١٩، ١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٣، ١٢٤، ١٢٥، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨، ١٢٩، ١٣٠، ١٣١، ١٣٢، ١٣٣، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٧، ١٣٨، ١٣٩، ١٤٠، ١٤١، ١٤٢، ١٤٣، ١٤٤، ١٤٥، ١٤٦، ١٤٧، ١٤٨، ١٤٩، ١٥٠، ١٥١، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٥، ١٥٦، ١٥٧، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦١، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٠، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٦، ١٧٧، ١٧٨، ١٧٩، ١٨٠، ١٨١، ١٨٢، ١٨٣، ١٨٤، ١٨٥، ١٨٦، ١٨٧، ١٨٨، ١٨٩، ١٩٠، ١٩١، ١٩٢، ١٩٣، ١٩٤، ١٩٥، ١٩٦، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٢، ٢٠٣، ٢٠٤، ٢٠٥، ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢٠٩، ٢١٠، ٢١١، ٢١٢، ٢١٣، ٢١٤، ٢١٥، ٢١٦، ٢١٧، ٢١٨، ٢١٩، ٢٢٠، ٢٢١، ٢٢٢، ٢٢٣، ٢٢٤، ٢٢٥، ٢٢٦، ٢٢٧، ٢٢٨، ٢٢٩، ٢٣٠، ٢٣١، ٢٣٢، ٢٣٣، ٢٣٤، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٣٧، ٢٣٨، ٢٣٩، ٢٤٠، ٢٤١، ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٤، ٢٤٥، ٢٤٦، ٢٤٧، ٢٤٨، ٢٤٩، ٢٥٠، ٢٥١، ٢٥٢، ٢٥٣، ٢٥٤، ٢٥٥، ٢٥٦، ٢٥٧، ٢٥٨، ٢٥٩، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧٢، ٢٧٣، ٢٧٤، ٢٧٥، ٢٧٦، ٢٧٧، ٢٧٨، ٢٧٩، ٢٨٠، ٢٨١، ٢٨٢، ٢٨٣، ٢٨٤، ٢٨٥، ٢٨٦، ٢٨٧، ٢٨٨، ٢٨٩، ٢٩٠، ٢٩١، ٢٩٢، ٢٩٣، ٢٩٤، ٢٩٥، ٢٩٦، ٢٩٧، ٢٩٨، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٣، ٣٠٤، ٣٠٥، ٣٠٦، ٣٠٧، ٣٠٨، ٣٠٩، ٣١٠، ٣١١، ٣١٢، ٣١٣، ٣١٤، ٣١٥، ٣١٦، ٣١٧، ٣١٨، ٣١٩، ٣٢٠، ٣٢١، ٣٢٢، ٣٢٣، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٢٨، ٣٢٩، ٣٣٠، ٣٣١، ٣٣٢، ٣٣٣، ٣٣٤، ٣٣٥، ٣٣٦، ٣٣٧، ٣٣٨، ٣٣٩، ٣٤٠، ٣٤١، ٣٤٢، ٣٤٣، ٣٤٤، ٣٤٥، ٣٤٦، ٣٤٧، ٣٤٨، ٣٤٩، ٣٥٠، ٣٥١، ٣٥٢، ٣٥٣، ٣٥٤، ٣٥٥، ٣٥٦، ٣٥٧، ٣٥٨، ٣٥٩، ٣٦٠، ٣٦١، ٣٦٢، ٣٦٣، ٣٦٤، ٣٦٥، ٣٦٦، ٣٦٧، ٣٦٨، ٣٦٩، ٣٧٠، ٣٧١، ٣٧٢، ٣٧٣، ٣٧٤، ٣٧٥، ٣٧٦، ٣٧٧، ٣٧٨، ٣٧٩، ٣٨٠، ٣٨١، ٣٨٢، ٣٨٣، ٣٨٤، ٣٨٥، ٣٨٦، ٣٨٧، ٣٨٨، ٣٨٩، ٣٩٠، ٣٩١، ٣٩٢، ٣٩٣، ٣٩٤، ٣٩٥، ٣٩٦، ٣٩٧، ٣٩٨، ٣٩٩، ٤٠٠، ٤٠١، ٤٠٢، ٤٠٣، ٤٠٤، ٤٠٥، ٤٠٦، ٤٠٧، ٤٠٨، ٤٠٩، ٤١٠، ٤١١، ٤١٢، ٤١٣، ٤١٤، ٤١٥، ٤١٦، ٤١٧، ٤١٨، ٤١٩، ٤٢٠، ٤٢١، ٤٢٢، ٤٢٣، ٤٢٤، ٤٢٥، ٤٢٦، ٤٢٧، ٤٢٨، ٤٢٩، ٤٣٠، ٤٣١، ٤٣٢، ٤٣٣، ٤٣٤، ٤٣٥، ٤٣٦، ٤٣٧، ٤٣٨، ٤٣٩، ٤٤٠، ٤٤١، ٤٤٢، ٤٤٣، ٤٤٤، ٤٤٥، ٤٤٦، ٤٤٧، ٤٤٨، ٤٤٩، ٤٥٠، ٤٥١، ٤٥٢، ٤٥٣، ٤٥٤، ٤٥٥، ٤٥٦، ٤٥٧، ٤٥٨، ٤٥٩، ٤٦٠، ٤٦١، ٤٦٢، ٤٦٣، ٤٦٤، ٤٦٥، ٤٦٦، ٤٦٧، ٤٦٨، ٤٦٩، ٤٧٠، ٤٧١، ٤٧٢، ٤٧٣، ٤٧٤، ٤٧٥، ٤٧٦، ٤٧٧، ٤٧٨، ٤٧٩، ٤٨٠، ٤٨١، ٤٨٢، ٤٨٣، ٤٨٤، ٤٨٥، ٤٨٦، ٤٨٧، ٤٨٨، ٤٨٩، ٤٩٠، ٤٩١، ٤٩٢، ٤٩٣، ٤٩٤، ٤٩٥، ٤٩٦، ٤٩٧، ٤٩٨، ٤٩٩، ٥٠٠، ٥٠١، ٥٠٢، ٥٠٣، ٥٠٤، ٥٠٥، ٥٠٦، ٥٠٧، ٥٠٨، ٥٠٩، ٥١٠، ٥١١، ٥١٢، ٥١٣، ٥١٤، ٥١٥، ٥١٦، ٥١٧، ٥١٨، ٥١٩، ٥٢٠، ٥٢١، ٥٢٢، ٥٢٣، ٥٢٤، ٥٢٥، ٥٢٦، ٥٢٧، ٥٢٨، ٥٢٩، ٥٣٠، ٥٣١، ٥٣٢، ٥٣٣،



(شکل ۱۰۵)

وبلاحظ أن الشعاع الذي يصل إحدى الرأسين بنقطة مجاورة لها هو نفس المماس في الرأس فالشعاع الذي يصل m بالنقطة a هو نفس الخط التقربي المعلوم (أى المماس في الرأس m) ويقطع المستقيم l في النقطة a وبالمثل الشعاع $m' - 2$ هو نفس المماس المعلوم في m' ويقطع المستقيم l في النقطة b .

الخطوة الرابعة — نعين النقطتين المضاعفتين س، ص، للصفين
 ١، ١، ب، ح، ... ١، ١، ب، ح، ... بواسطة طريقة شتاينر. فنصل لذلك أية نقطة
 مثل ل بالنقط ١، ١، ب، ح، ١، ١، ب، ح، ... فإذا قطعت الأشعة أية
 دائرة مارة بالنقطة ل (دائرة شتاينر) في النقط ١، ١، ب، ح، ١، ١، ب، ح، ...

على التوالي وكان γ محور المنظورية (لهذه الدائرة) الذي يصل نقطة تقاطع α مع α' بنقطة تقاطع β مع β' (و يمر أيضاً بنقطة تقاطع γ مع γ') فان المستقيمين $\alpha\alpha'$ و $\beta\beta'$ الذين يصلان α بالنقطتين α' و β مع β' تقاطع γ مع الدائرة هما الشعاعان المضاعفان α و β في الحزمتين المتولفتين المشتركين في الرأس α ويقطعان المستقيم المعلوم α في النقطتين المضاعفتين α و β وهما نقطتا تقاطعه مع القطع الزائد .

مثال ٢ : المطلوب رسم مقطع مخروطي يمر بنقطة مثل α ويمس أربع مستقيمتين

معروفة .

لذلك نرمز الى هذه المماسات بالرموز α و β و γ و δ ونفرض أن α و β يقطعان α و β' في الزوجين α' و β' من النقط المتناظرة ثم نبدا بتعيين المماس للمنحنى في α (كما لو كانت α غير واقعة على المنحنى) بالطريقة الآتية :

نرسم أية دائرة تمر بالنقطة α (دائرة شتاير) ونصل α و β و γ و δ لقطعان هذه الاشعة الدائرة في النقط α' و β' و γ' و δ' على التوالي . فاذا وصلنا α و β' فان هذين المستقيمين يتلاقيان في نقطة مثل γ تكون واقعة على محور المنظورية γ لدائرة شتاير (بالنسبة للحزمتين المتولفتين المشتركين في الرأس α واللتين تمر أشعتهما المتناظرة بنقط تقاطع مماسات المنحنى المطلوب رسمهما مع المماسين α و β) ولرسم المماس للمنحنى في α نلاحظ

(١) يلاحظ أن المستقيم α' هو في هذه الحالة مماس الدائرة في النقطة α' .

(٢) النقطتان α و β هما النقطتان المضاعفتان للصغين المتولفتين α و β ...

α و β ... على دائرة شتاير (قارن الملاحظة المذكورة في آخر الفقرة β من

أن محور المنظورية يجب أن يمر دائرة شتاينر وذلك لأنه لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد للمنحنى من نقطة عليه أى أن المماسين المرسومين من L إلى المنحنى يجب أن يكونا حقيقيين متحدين . فإذا رسمنا من النقطة P مماساً لدائرة شتاينر ممسها في نقطة مثل S فإن المستقيم LS يكون مماس المنحنى في L ومتى تعين هذا المماس تعين المنحنى .

ملحوظة : لما كان من الممكن رسم مماسين على وجه العموم من النقطة P للدائرة كان للمسألة حلان أى أنه برسم على وجه العموم مقطعاً مخروطياً بمس كل منهما أربعة مستقيمات برسم بنقطة معلومة .
فإذا وقعت P داخل دائرة شتاينر كانت المسألة مستحيلة الحل أى أن المقطعين يكونان تخيليين في هذه الحالة .

ونلفت النظر إلى أنه لا يمكن أن ينطبق المقطعان المذكوران وذلك لعدم إمكان وقوع P على دائرة شتاينر (إلا إذا كانت L واقعة على أحد المماسات الأربعة ففي هذه الحالة تكون L نقطة التماس وتؤول المسألة إلى مقطع مخروطى معين بما يعادل خمسة مماسات) .

مثال ٣ : المطلوب رسم مقطع مخروطى بمس مستقيماً مثل l ومرر بأربع نقط معلومة .

ترك للقارئ حل هذا المثال على منوال المثال السابق باعتباره مزاجاً له وإثبات أنه إما أن يكون للمسألة حلان أو ليس لها حل .

ونوجه النظر إلى أنه ينتج من هذا المثال أنه إذا علمت أربع نقط في المستوى فإنه يوجد عدد لا نهاية له من القطاعات الناقصة أو الزائدة التي تمر بها ولكن لا يوجد سوى قطعين مكافئين اثنين (يجوز أن يكونا تخيليين) لأن هذين القطعين — فضلاً عن كونهما يمران بالنقط الأربع — يمسان أيضاً المستقيم اللانهاية .

مثال ٤ : اذا تماس مقطعان مخروطيان في نقطة مثل م وعلم من كل منهما زيادة على م والمماس المشترك فيها ثلاث نقط أخرى فالمطلوب تعيين نقطتي تقاطعها .

نعتبر المنحنيين مؤتلفين مركزياً حيث م مركز الالتلاف (بند ٧٥) فاذا وصلنا م بالنقط الثلاث الواقعة على أحد المنحنيين وعينا بواسطة نظرية پاسكال نقط تقاطع هذه المستقيمت الثلاث مع المنحنى الثانى حصلنا على ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة في هذا الالتلاف المركزى وبذلك يمكن تعيين محور الالتلاف . ثم نجد نقطتي تقاطع هذا المحور مع أحد المقطعين المخروطيين بواسطة دائرة شتاينر فيكونان النقطتين المطلوب تعيينهما .

مثال ٥ : اذا تماس مقطعان مخروطيان في نقطة مثل ١ وعلم من كل منهما زيادة على المماس المشترك في نقطة التماس ١ ثلاثة مماسات أخرى فالمطلوب رسم المماسين المشتركين الباقيين .

لذلك نعتبر المنحنيين مؤتلفين مركزياً حيث المماس المشترك في هو محور الالتلاف فاذا تقاطع في مع المماسات الثلاث الاخرى لاحد المنحنيين في النقط م م م ع ثم رسم من هذه النقط بواسطة نظرية بريانشون المماسات الثلاث الممكنة للمنحنى الثانى لا يمكن الحصول على ثلاثة أزواج من المستقيمت المتناظرة في هذا الالتلاف المركزى وبذا يتعين مركز الالتلاف م ويكون المماسان المشتركان المطلوب رسمهما هما المماسان المرسومان من م لاحد المنحنيين (شتاينر) .

مثال ٦ : اذا علم من مقطعين مخروطيين مماسان مشتركان وعلبت نقطتا تماس كل منهما مع هذين المماسين وعلبت كذلك نقطة خامسة على كل من المنحنيين فالمطلوب تعيين نقط تقاطعهما الرابع .

نعتبر المقطعين مؤتلفين مركزياً حيث مركز الالتلاف هو النقطة م ملتقى المماسين المشتركين . فاذا تقاطع وتر التماس في المنحنيين (أى الخطان القطبيان

لنقطة ٢ بالنسبة الى كل منهما) في س كانت س نقطة على محور الالتلاف .
 لنفرض الآن أن النقطة الخامسة على المنحنى الاول هي ١ وعلى الثانى ب وأن
 المستقيم ١ ٢ يقابل المقطع المخروطى المار بالنقطة ب فى نقطتين '١' و '٢'
 (يمكن إيجادهما بواسطة شتاينر) فكل واحدة من هاتين النقطتين يصح اعتبارها
 منازرة للنقطة ١ فى الالتلاف المركزى وعلى ذلك يمكن الحصول على محورين
 للالتلاف مارين بالنقطة س وكل محور منهما يقطع أحد المنحنيين فى نقطتين
 (شتاينر) فتكون هذه النقط الأربع هى فقط تقاطع المنحنيين .

مثال ٧ : اذا علم من مقطعين مخروطيين نقطتان مشتركتان من نقط
 تقاطعهما وعلم أيضاً المماسان فى هاتين النقطتين ومماس آخر (مماس خامس)
 غيرهما لكل واحد من المنحنيين فالمطلوب رسم مماساتهما المشتركة الاربعة .
 نترك للقارىء حل هذا المثال على منوال المثال السابق باعتباره مزاجاً له
 (يؤخذ فى هذه الحالة قوتر تقاطع المنحنيين محوراً للالتلاف المركزى بينهما ثم يعين
 مركزا الالتلاف ويرسم من كل واحد من هذين المركزين مماسان لأحد المنحنيين) .

بند ٩٤ : النظام

لنفرض فى (شكل ١٠٢) أن ١ ، ١' ، ٢ ، ٢' ، ٣ ، ٣' ثلاث
 أزواج من النقط المتناظرة تحدد العلاقة الالتلافية بين صفتين مؤتلفين واقعين
 على حامل واحد ١. ولنفرض أننا اخترنا نقطة جديدة على هذا الحامل ورمزنا
 اليها بالرمز ٤ باعتبارها إحدى نقط الصف ١ ، ٢ ، ٣ ... ثم عينا (باستخدام
 دائرة شتاينر كما هو مبين فى بند ٩٢) النقطة ٤' المناظرة لها فى الصف ١' ، ٢' ، ٣' ...
 فإذا اعتبرنا نفس النقطة ٤' إحدى نقط الصف ١' ، ٢' ، ٣' ... ورمزنا
 اليها بهذا السبب بالرمز ٤' (أى أن ٤' \equiv ٤) ثم عينا النقطة ٥' المناظرة لها
 فى الصف ١ ، ٢ ، ٣ ... فانه يتضح مباشرة من طريقة شتاينر أن ٥' لا تنطبق

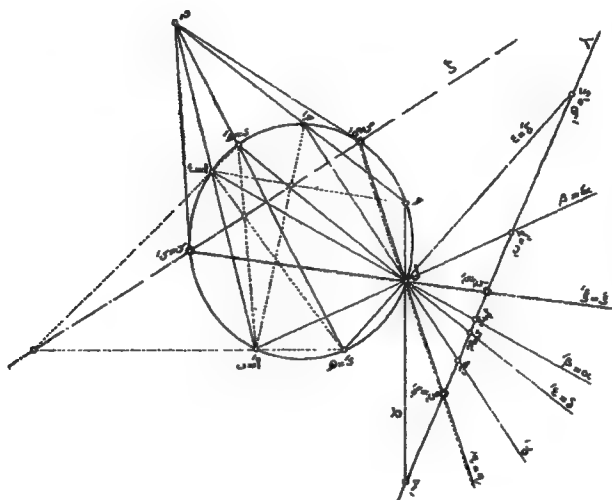
على وجه العموم على γ' . أما اذا انطبقت عليهما قيل لهذا الزوج من النقط المتناظرة : $\gamma \equiv \gamma' \equiv \gamma''$ ، إنه قابل للمبادأة وفي هذه الحالة يكون الشعاعان اللذان يصلان هاتين النقطتين بآية نقطة مثل l زوجا قابلا للمبادأة في الحزمتين المؤتلفتين المشتركين في الرأس l .

ونبرهن الآن على النظرية الآتية :

إذا أمكن إجراء عملية مبادئية بين زوج واحد من النقط المتناظرة في صفين مؤتلفين ضمرى الحامل فانه يمكن إجراء مثل هذه العملية بين جميع الأزواج الأخرى .
ويطلق على العلاقة الانتلافية بين النقط في هذه الحالة اسم العمود المتضامات أو التضام كما يطلق على صفى النقط اسم مجموعة متضامة من النقط أو صف متضام ويقال لآى نقطتين متناظرتين إنهما تغطانه مترافقانه .
ويقال ما يزواج هذا تماماً عن الوتيرة المترافقة في مجموعة أو مزمنة متضامة من المستقيمات .

وتتضح صحة النظرية السابقة اذا فرضنا في (شكل ١٠٦) أن العلاقة الانتلافية بين صفين من النقط واقعين على الحامل l قد تحدت بالأزواج الثلاثة $١, ١'$ ، $٢, ٢'$ ، $٣, ٣'$ ، γ, γ' من النقط المتناظرة وفرضنا أنه أمكن إجراء عملية مبادئية بين الزوجين الأولين بحيث يؤولان الى زوج واحد : $١, ٢ \equiv ٣, ١'$ ، $\gamma \equiv \gamma'$. فإذا كانت γ' في الصف $١'$ ، $٢'$ ، γ' ... تناظر نقطة ما مثل γ في الصف ١ ، ٢ ، γ ... وفرضت نقطة مثل γ' في الصف $١'$ ، $٢'$ ، γ' ... منطبقة على γ فالنقطة γ المناظرة لها في الصف ١ ، ٢ ، γ ... لابد أن تنطبق على γ' وذلك بمقتضى العملية المذكورة في بند (٩٢ ب) إذ في هذه الحالة يمكن اعتبار الوترين $١'$ و ١ في دائرة شتاينر (الذين بتلاقيهما على محور المنظورية γ للدائرة يحددان γ' وبالتالي γ) هما نفس الوترين ٢ و $٢'$ (الذين بتلاقيهما على γ يحددان γ وبالتالي γ') .

وبالمثل اذا اعتبرنا الحزمة المتضامنة من المستقيمت $\alpha \beta \gamma \dots \alpha' \beta' \gamma' \dots$ فانه يمكن القول ان النظرية المزاوجة للنظرية السابقة صحيحة. ويمكننا الآن بالاشارة الى (شكل ١٠٦) استخلاص الحقائق والنظريات الآتية مما تقدم:



(شكل ١٠٦)

(١) — يقال للصفين المؤلفين $\alpha \beta \gamma \dots \alpha' \beta' \gamma' \dots$ الواقعين على الدائرة أو أى مقطع مخروطى (راجع الملاحظة المذكورة فى آخر الفقرة ب من بند ٩٢) إنهما يكونان مجموعة متضامنة من القطع على المنحنى إذا كانت أزواج النقط المتناظرة قابلة للبادل أو اذا أمكن الحصول على نقط المجموعة كنقط تقاطع المنحنى مع الاشعة المتراصة فى حزمة متضامنة من المستقيمت رأسها إحدى نقط المنحنى.

(٢) — المستقيمتان $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ التي تصل أزواج النقط المتراكمة في مجموعة متضامنة على مقطع مخروطي تمر جميعاً بنقطة واحدة $و$ هي قطب محور المنظورية $٩'$ بالنسبة للمقطع وتسمى بقطب التضامن .

تنتج هذه النظرية مباشرة من الخواص القطبية البسيطة للمقاطع المخروطية حيث محور المنظورية $٩'$ هو المحل الهندسي لاقطاب المستقيمتان $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$... بالنسبة للمنحنى .

(٣) — يتعين التضامن بين مجموعة متضامنة من النقط على مستقيم أو على مقطع مخروطي بمعلومية زوجين اثنين من النقط المتراكمة لانه اذا علم على المستقيم ١ الزوجان $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ وعلى المقطع (دائرة شتاينر في شكل ١٠٦) الزوجان $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ وتقابل المستقيمان $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ في النقطة $و$ التي هي قطب التضامن لا يمكن بكل سهولة ايجاد النقطة $و'$ المراقبة لاية نقطة مثل $و$ على المنحنى ($و'$ هي نقطة تقاطع المستقيم $و$ مع المنحنى) ومتى علمت $و'$ أمكن تعيين النقطة $و'$ المراقبة الى النقطة $و$ على المستقيم ١ .

(٤) — يؤخذ من (شكل ١٠٦) أنه لما كانت

$$(١١' ب' ب' ٩' ح' ح') = (١١' ب' ب' ٩' ح' ح') \text{ وكانت } ١١' ب' ب' ٩' ح' ح' \equiv ١١' ب' ب' ٩' ح' ح' \text{ فان}$$

$$(١١' ب' ب' ٩' ح' ح') = (١١' ب' ب' ٩' ح' ح')$$

ومعنى هذا أنه لما كان التضامن يتعين بمعلومية زوجين من النقط المتراكمة فانه اذا علمت ثلاثة أزواج $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ ، $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ ، $١١' ب' ب' ٩' ح' ح'$ من النقط المتناظرة قلن الشرط الموزم والفاي لكي تكون هذه النقط صفاً متضامناً هو أن تكون

$$(١١' ب' ب' ٩' ح' ح') = (١١' ب' ب' ٩' ح' ح')$$

(٥) — اذا حذفنا في (شكل ١٠٦) الرقم ١٠٦ من الحروف الدالة على نقط الحامل ١ وفرضنا أن النقطة $و$ على هذا الحامل هي النقطة المراقبة للنقطة $و'$ التي في اللانهاية فيمقتضى النظرية السابقة تكون

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}') = (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}')\mathfrak{L}(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}') = (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}')$$

$$2. \frac{a':b'}{a':c'} = \frac{a''':b'''}{a''':c'''} = \frac{a':b'}{a':c'} \therefore$$

$$\dots \& \frac{a'}{b'} : \frac{a''}{b''} = \frac{a'}{b'} : \frac{a}{b}$$

$$\dots \text{ و } \frac{a'}{a''} : 1 = 1 : \frac{a}{a''} \text{ و } \frac{a'}{a''} : 1 = 1 : \frac{a}{a''}$$

$$1. 1 = 0. 0. 1 \text{ و } 1. 1 = 0. 1. 0 \text{ و } 1. 1 = 0. 1. 1 \text{ و } 1. 1 = 1. 0. 0 \text{ و } 1. 1 = 1. 0. 1 \text{ و } 1. 1 = 1. 1. 0 \text{ و } 1. 1 = 1. 1. 1$$

أى أن و . و = و . و = و . و ح . و ح

$= و . و ' = \dots$ مقداراً ثابتاً و

وتسمى النقطة و بمركز التضامن ويكون معنى المعادلات السابقة أن حاصل ضرب بعضى أى تقطيع مترافقتين فى صف متضامن (على مستقيم) عن مركز التضامن لهذا الصف يساوى مقررًا ثابتًا .

وكثيراً ما يعتبر عكس هذه النظرية تمرغاً للصف المتضامن .

(٦) — يؤخذ من النظرية السابقة أنه إذا علم زوجان من النقط المتراكمة في صف متضامن ورسمت دأرتان تمر كل منهما بنقطتين مترافقتين كان مركز الضامن هو نقطة تقاطع المحور الرئيسى للدأرتين (وتر تقاطعهما) مع حامل الصف . هذا إذا تقاطعت الدأرتان أما إذا لم تقاطعا (كما في شكل ١٠٦) لورسمت مثل هاتين الدأرتين (فان مركز التضامن يكون نقطة تقاطع حامل الصف مع المحل الهندسى لجميع النقط المتساوية القوة بالنسبة للدأرتين ^(١) .

(١) إذا رسم من نقطة مثل \odot في مستوى دائرة مستقيم قطعها في نقطتين مثل $\odot \text{ م } ١$ فإن $\odot \text{ م } ١$ يسمى « قوة » النقطة \odot بالنسبة للدائرة . فإذا كانت $\odot \text{ م } ١$ مركزى دائرتين غير متقاطعتين في المستوى ورسمت دائرة ثالثة مساعدة قاطعة لهما وتقابل وتقاطع مع الدائرتين في نقطة مثل \odot كان العمود النازل من \odot على المستقيم $\odot \text{ م } ١$ هو المحل الهندسى لجميع نقط المستوى المتساوية القوة بالنسبة للدائرتين $\odot \text{ م } ١$.

(٧) — النقطتان σ و ρ (في شكل ١٠٦) هما النقطتان المضاعفتان للنصف المتضامن على المقطع المخروطي (دائرة شتاينر) والنقطتان σ و ρ هما النقطتان المضاعفتان للنصف المتضامن على الحامل l . ويؤخذ من النظرية الخامسة (حيث كل من هاتين النقطتين تناظر نفسها) أن

$$\overline{\sigma\rho} = \overline{\rho\sigma} = \overline{\sigma\sigma} = \overline{\rho\rho}$$

ومعنى هذا أن يمر كل من النقطتين المضاعفتين (في صف متضامن على مستقيم) عن مركز التضامن ويساوي طول المحاس المرسوم من σ إلى أي دائرة مارة بنقطتين مترافقتين. فإذا وقعت σ داخل هذه الدائرة أي إذا تقاطعت أي دائرتين تمر كل منهما بنقطتين مترافقتين فإن النقطتين المضاعفتين تكونان في هذه الحالة تخيليتين.

ويؤخذ من (شكل ١٠٦) أنه لما كان غير ممكن أن يمر محور المنظورية σ بالدائرة أي غير ممكن أن تنطبق النقطتان المضاعفتان سواء على الدائرة أو على المستقيم l لذلك فإن النقطتين المضاعفتين نصف متضامن أما أنه يكونا معاً حقيقيين فمختلفين أو أنه يكونا معاً تخيليين.

(٨) — بما أن $(\sigma, \rho) = (\rho, \sigma)$ ولكن $\sigma \neq \rho$ وبالتعويض: $(\sigma, \rho) = (\rho, \sigma)$ $\Rightarrow \sigma = \rho$ وينتج من ذلك أن أي نقطتين مترافقتين في صف متضامن يكونانه مترافقتين توافيقاً بالنسبة للنقطتين المضاعفتين وبالعكس.

(٩) — إذا رسمت في مستو من نقطة ما مستقيمتين متعامدة بعضهما على بعض فإن هذه المستقيمتين تكونان ممزعة متضامنة تضامناً عمودياً (وذلك لأن العلاقة التلافية والمناظرة بين أي زوج من هذه الأشعة المتعامدة مناظرة تبادلية). فتلأ الاقطار المترافقة في دائرة تكون حزمة من هذا النوع.

(١٠) — مجموعة النقط المترافقة بالنسبة إلى مقطع مخروطي (بند ٥٤) والواقعة على مستقيم ثابت (لا يمر بالمنحنى) تكونان متضامناً نقطتاه المضاعفتان هما

نقطتا تقاطع المستقيم (حقيقتين أو تخيليتين) مع المنحنى ^(١).

[يتضح من ذلك أنه اذا اتحدت على مستقيم واحد مجموعتان متضامتان من النقط المترافقة بالنسبة الى مقطعين مخروطيين وكوّنت بذلك مجموعة واحدة متضامنة على المستقيم فان النقطتين المضاعفتين لهذا التضامن هما نقطتا تقاطع المستقيم مع كل من المنحنيين أى يكونان نقطتين من نقط تقاطع المنحنيين (حقيقتين أو تخيليتين). ولما كان المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى أى دائرتين يمكن اعتباره حاملا لمجموعة واحدة متضامنة من النقط المترافقة بالنسبة للدائرتين (لأن كل قطرين مترافقين — أى متعامدين — فى إحدى الدائرتين يمكن رسم قطرين مترافقين وموازيين لهما فى الدائرة الاخرى بحيث يلاقيان المستقيم الذى فى اللانهاية فى نفس نقطى تقاطعه مع القطرين المترافقين فى الدائرة الاولى أى أن هاتين النقطتين مترافقتان بالنسبة الى الدائرتين معاً) لذلك قيل إن المستقيم الذى فى اللانهاية يلاقى الدائرتين فى نفس النقطتين التخييليتين وإن جميع دوائر المستوى تقاطع فى نقطتين تخيليتين على المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى يطلق عليهما اسم النقطتين الدائريتين فى اللانهاية].

وبالمثل مجموعة المستقيمت المترافقة بالنسبة الى مقطع مخروطى والمارة بنقطة ثابتة (غير واقعة على المنحنى) تكون مرزقة متضامنة شعاعاها المضاعفان هما المماسان للرسمان من النقطة الى المنحنى.

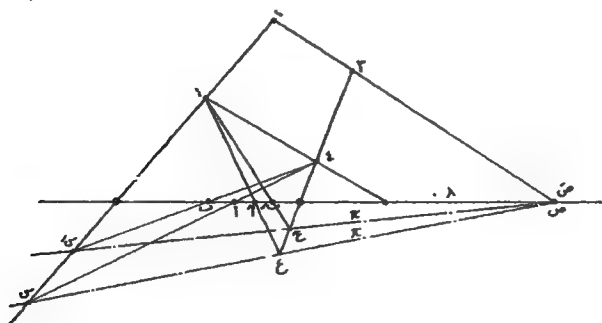
(١) لانه اذا كان λ مستقيماً فى مستوى مقطع مخروطى وكانت μ إحدى نقطه فانه توجد نقطة واحدة λ' مترافقة لها بالنسبة الى المقطع (بند ٥٤) وواقعة على λ ولما كانت النقطة المترافقة الى λ' بالنسبة الى المقطع هى نفس النقطة الاولى μ ومعنى هذا أن المناظرة ببادلية فأزواج النقط $\lambda\mu$ تكون لذلك صفاً متضامناً على الحامل λ .

(١١) — في أية حزمة متضامنة يوجد زوج واحد متعامد من الاشعة المتناظرة (ويمكن الحصول عليه في شكل ١٠٦ بتوصيل مركز الدائرة بالنقطة ω فاذا تقاطع هذا الواصل مع الدائرة في $\mu \rho \mu'$ كان $\mu \rho \mu' \equiv \mu \rho \mu' \equiv \mu \rho \mu'$ هو الزوج المتعامد في الحزمة المتضامنة التي رأسها ω) ولا يمكن أن يوجد أكثر من زوج واحد إلا اذا كانت الحزمة متضامنة تضامنا متعامدا .

بند ٩٥ : مثال على التضامن

لنأخذ مثال ٣ في (بند ٩٣) فهناك طريقة جديدة للحل نشرحها فيما يلي تطبيقاً للتضامن :

نختار في (شكل ١٠٧) نقطة ما مثل λ على المستقيم المعلوم λ ثم نعين (بواسطة پاسكال) النقطة الثانية λ' التي يقابل فيها المستقيم λ المقطع المخروطي المتعين بالنقط الخمس : $١ \ ٢ \ ٣ \ ٤ \ ٥$ [لذلك نرمز للنقطة λ بالرقم ٥



(شكل ١٠٧)

ف تكون النقطة λ' المطلوب تعيينها هي النقطة λ' ويكون المستقيم المعلوم λ هو المصنع (٦٥) [ف تكون λ' على وجه العموم نقطة جديدة غير النقطة الاولى λ

لأنه إذا صادف وانطبقت $أ'$ على $أ$ كانت $أ$ هي نقطة تماس المستقيم $ل$ مع المنحنى وبذا يكون هذا المنحنى قد تحدد.

ثم نختار نقطة جديدة مثل $ب$ على $ل$ ونجد بنفس الطريقة النقطة $ب'$ لتقاطع $ل$ مع المنحنى المتعين بالنقط الخمس: ١٢٣٤٥٦٧٨٩ .
فن حيث إن

$$(أ ب ...) = (س س' ...) = (ع ع' ...) = (أ' ب' ...)$$

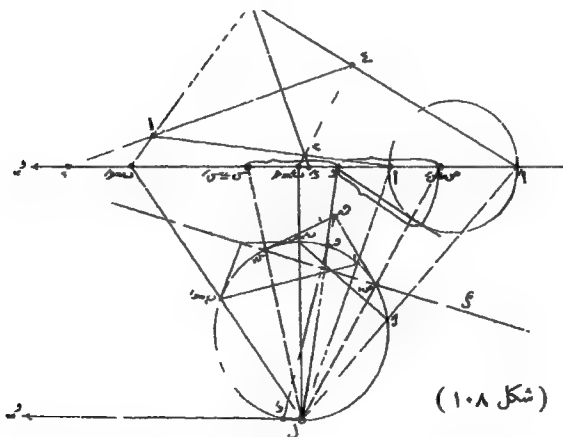
فنتج من ذلك أن صفى النقط $أ ب ...$ صفان مؤتلفان واقعان على الحامل المشترك $ل$ ^(١). وتكون النقطتان المضاعفتان (التي تناظر كل منهما نفسها) في هذين الصفين هما نقطتا تماس المستقيم $ل$ مع المقطعين المخروطين اللذين يمكن أن يمر كل منهما بأربع نقط ويمس مستقيماً معلوماً .

ولما كانت المناظرة بين أزواج النقط في هذين الصفين هي مناظرة تبادلية فمثلاً إذا فرضنا نقطة مثل $ح$ من الصف الاول منطبقة على $أ'$ فإن $ح'$ (وهي النقطة الثانية التي يقابل فيها المستقيم $ل$ المقطع المخروطى ١٢٣٤٥٦٧٨٩) لابد أن تنطبق على $أ$ — فنتج من ذلك أن أزواج النقط ١٢٣٤٥٦٧٨٩ ، $أ ب$ ، $ب' أ'$... على الحامل $ل$ تكون صفاً متضامناً ويكفى لتعيين التضامن أن يعلم زوجان اثنان من النقط المترافقة . ولما كان كل زوج من هذه النقط المترافقة مثل ١٢٣٤٥٦٧٨٩ هو نقطتا تقاطع المستقيم المعلوم $ل$ مع أحد المقاطع المخروطية التي تمر بالنقط الأربع فالنظرية الآتية المعروفة باسم نظرية زاريغ — توررم ^(٢) صحيحة —

(١) يمكن استنتاج هذه العلاقة الانتلافية مباشرة من مناظرة الفرد للفرد بين أزواج النقط ١٢٣٤٥٦٧٨٩ ، $أ ب$ ، $ب' أ'$... إذ أن أية نقطة مل $أ$ من الصف الاول تحدد مقطعاً مخروطياً واحداً يقابل $ل$ في نقطة واحدة $أ'$ مناظرة الى $أ$.

جميع المقاطع المخروطية المارة بأربع نقط معلومة تقطع مستقيماً معلوماً في أنواع مترافقة من مجموعة متضامة من النقط. وتكونه النقطتان المضاعفتان لهذا التضامن هما نقطتا تماس المستقيم مع المقطعين المخروطيين (حقيقيين مختلفين أو تخيليين) اللذين يمر كل منهما بالنقط الأربع ويمس المستقيم. ويزاوج هذه النظرية النظرية الآتية:

إذا علمت أربع مستقيمت ونقطة ورسم من النقطة مماسان لكل مقطع مخروطي لمس المستقيمت الأربعة فإن أزواج هذه المماسات هي أشعة متناظرة في حزمة متضامة. ويكون الشعاعان المضاعفان في هذا التضامن هما المماسان في



النقطة المعلومة للمقطعين المخروطيين (حقيقيين مختلفين أو تخيليين) اللذين يمر كل منهما بالمستقيمت الأربعة ويمر بالنقطة.

فاذا فرضنا في (شكل ١٠٨) أن أزواج المستقيمت (٢١) ، (٤٣) ، (٢٢) ، (٤١) ، (٢٣) ، (٤٢) ، (٣١) تقطع المستقيم المعلوم في أزواج النقط

١، ١'، ٢، ٢'، ٣، ٣'، ٤، ٤' على التوالي في مقتضى نظرية « ذراج » تكون هذه الأزواج أزواجاً مترافقة في مجموعة متضامنة من النقط على المستقيم λ لأن بين جميع المقاطع المخروطية التي تمر بأربع نقط معلومة ١ ٢ ٣ ٤ توجد ثلاثة كل منها « منحل » إلى مستقيمين فكل زوج من أزواج المستقيمتين السالفة الذكر يمثل مقطعاً مخروطياً ماراً بالنقط الأربع المعلومة وقاطعاً λ في زوج من النقط المترافقة .

وبمعلومية زوجين اثنين مثل ١. ١'، ٢. ٢' من هذه النقط المترافقة يتعين التضامن على المستقيم λ وتكون النقطتان المضاعفتان σ و σ' في هذا التضامن (ويمكن تعيينهما إما بواسطة دائرة شتاينر أو باستخدام مركز التضامن و كما تقدم في النظريتين السادسة والسابعة من البند السابق) هما نقطتا تماس λ مع المقطعين المخروطيين .

الباب الرابع

السطوح السورانية

الفصل الاول

الرسم خط منحن

بند ٩٦ : تعريف

ذكرنا في (بند ٤٥) أنه السطح الدوراني يمكن اعتباره متولداً عن دورانه «خط» ما يسمى الرسم حول محور ثابت. وهذا الخط الراسم يجوز أن يكون خطاً مستقيماً كما سنرى في الفصل الثاني أو منحنياً مستوياً أو منحنياً فراغياً كما أنه يجوز في حالة المنحنى المستوى أن يكون مستويه ماراً أو غير مار بالمحور (١). فكل نقطة من نقط الرسم ترسم أثناء الدوران دائرة مستويها عمودية على المحور ومركزها واقع عليه وتسمى هذه الدوائر بدوائر العرض.

وأى مستو مار بالمحور يسمى مستوى زوال ويقطع السطح في منحن يسمى منحن زوال أو مقطع جانبي. وظاهر أن جميع خطوط الزوال متساوية ومتماثلة في

(١) لا ينشأ عن كون المنحنى الراسم فراغياً ولا عن عدم مرور مستويه إذا كان مستوياً بالمحور — لا ينشأ عن هذين الاعتبارين زيادة في عمومية تعريف السطح الدوراني — كما عرفناه في (بند ٤٥) — بأنه سطح نشأ عن دوران منحن مستو حول محور في مستويه إذ من الممكن دائماً قطع السطح الدوراني بمستو مار بالمحور واتخاذ منحن التقاطع (خط الزوال) مولداً للسطح. أى أن السطح الواحد يمكن أن يتولد بطرق مختلفة إحداها دائماً طريقة تولده عن دوران منحن مستو حول محور في مستويه.

الشكل والهيئة وأن مسقطى أى اثنين من هذه الخطوط على مستو مواز للبحور (أو ماربّه) هما منحنيان يؤتلفان اتّلاقاً متوازياً حيث محور الاتّلاف هو مسقط محور السطح (أو محور السطح نفسه) واتّجاه الاتّلاف عمودى على المحور . ولتمثيل السطح الدورانى فى المسطّطين الاقضى والرأسى يختار المحور عادة رأسياً ^(١) ويسمى فى هذه الحالة المقطع الجانبي الواقع فى المستوى المار بالمحور موازياً للمستوى الرأسى بخط الزوال الرئيسى .

بند ٩٧ : بعض المسائل المتعلقة بالسطوح الدورانية

يكن تلخيص أهم المسائل العملية المتعلقة بالسطوح على وجه العموم فيما يلى :

- ١ — اذا علم أحد مسقطى نقطة على السطح فالمطلوب تعيين مسقطها الآخر .
- ٢ — تعيين المستوى المماس للسطح فى نقطة معلومة عليه .
- ٣ — رسم منحنى تقاطع السطح بمستو معلوم أى المقطع المستوى للسطح .
- ٤ — تعيين نقط تقاطع السطح مع مستقيم معلوم .
- ٥ — رسم المحيطات الظاهرية للسطح .
- ٦ — رسم الظلال الحقيقية والظاهرية المترتبة على وجود مصدر ضوء معلوم

٧ — رسم منحنى تقاطع سطحين .

وسنبن باختصار فى البنود التالية كيفية حل هذه المسائل للسطوح الدورانية مستعينين على شرح المسائل الاولى والثانية والثالثة والرابعة بشكل (١٠٩) الذى يمثل ما يسمى بالسطح الكعكى أو السطح الحقيقى وقد فرضناه معلوماً بمحوره الرأسى وبالمنحنى الراسم وهو فى هذه الحالة دائرة يمر مستويها بالمحور .

(١) اذا لم يكن المحور رأسياً فانه يمكن دائماً تغيير مستوى الاسقاط بحيث يصبح

عمودياً على أحدهما (بند ١٩) .

بند ٩٨ : المسألة الاولى

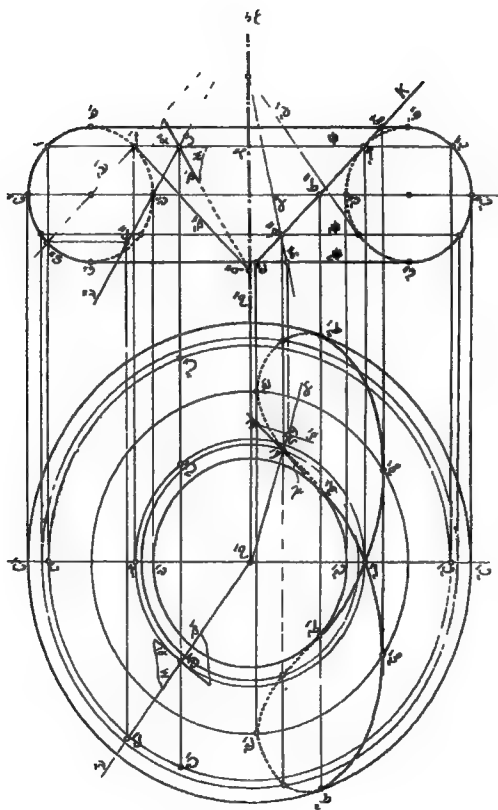
اذا علم المسقط الرأسى δ " لنقطة مثل δ على السطح الكعكى المين في (شكل ١٠٩) فالمطلوب تعيين δ' .

لذلك نرسم من δ " مستقيماً أقبياً يمثل مستوياً أقبياً δ ماراً بالنقطة δ فاذا قطع هذ المستقيم خط الزوال الرئيسى في النقط α " β " γ " δ " و قطع المحور في μ " كان البعدان μ " α " β " γ " δ " مساويين لنصفى قطرى دائرتى العرض الواقعتين في المستوى δ " واللّتين يمكن رسمهما في المسقط الاقضى بالمركز المشترك ϵ . فاذا تقاطع خط التناظر المار بالمسقط المعلوم δ " مع هاتين الدائرتين في النقط الرابع δ' " δ'' " δ''' " δ'''' " δ''''' " أمكن اعتبار أية واحدة منها المسقط الاقضى المطلوب أى أن δ " هى المسقط الرأسى المشترك لاربع نقط δ' " δ'' " δ''' " δ'''' " كلها واقعة على السطح . فالنقطتان الاوليتان (δ' " δ'' ") (δ''' " δ'''' ") واقعتان على الطبقة الخارجية المتولدة عن دوران نصف الدائرة δ " و حول المحور فهما لذلك نقطتان زمرتانه (راجع شكل ٤٨) بينما النقطتان الباقيتان (δ''' " δ'''' ") (δ'' " δ''' ") واقعتان على الطبقة الخارجية المتولدة عن دوران نصف الدائرة δ " و فهما إذن نقطتان ناقصتانه .

بند ٩٩ : المسألة الثانية

المطلوب تعيين المستوى المماس δ وكذا عمودى السطح ν في النقطة δ . يتحدد المستوى المماس في نقطة على السطح كما قلنا في (بند ٤٣) اذا علم مماسان لهذا السطح مارين بالنقطة المذكورة . وفي حالة السطوح الدورانية يختار عادة للسهولة المماسان في النقطة لدائرة العرض ولخط الزوال المارين بها .

فالمماس الاول α (المماس لدائرة العرض) مسقط الرأسى α " هو المستقيم



(شكل ١٠٩)

الاقصى المار بالمسقط الرأسى ρ " للنقطة ومسقطه الاقصى α ' هو مماس دائرة العرض فى المسقط الاقصى ρ ' للنقطة .

أما المماس الثانى β (المماس لخط الزوال) فيمكن الحصول عليه كما يأتى :

نصل ϵ ' ρ ' فيكون هو المسقط الاقصى β ' للمماس β ثم نرسم المماس β " لخط الزوال الرئيسى فى النقطة α " (حيث α هى إحدى النقطتين الواقعتين فى مستوى خط الزوال الرئيسى لدائرة العرض المارة بالنقطة ρ) فيلاقى المحور فى σ " ثم نصل σ " ρ " فيكون هو المسقط الرأسى β " للمماس β . وذلك لان المماس β ' يبقى أثناء الدوران ماساً للاوضاع المختلفة لخط الزوال فى نقط دائرة العرض المشار اليها ويلاقى محور السطح دائماً فى النقطة الثابتة σ .

وبتعيين α ' β يتعين المستوى المماس Σ للسطح عند النقطة ρ ' ويلاحظ أنه لما كان المماس β هو مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى Σ بالنسبة للمستوى الاقصى فإنه يكفى بمفرده لتعيين المستوى Σ (بند ٧) .

ويتضح بسهولة من (شكل ١٠٩) أنه لما كان المستقيم α عمودياً على مستوى الزوال المار بالنقطة ρ ' وجب أن يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى Σ أو بعبارة أخرى :

المستوى المماس فى أية نقطة على سطح دررانى عمودى دائماً على مستوى منط الزوال المار بالنقطة .

ولرسم العمودى ν للسطح فى النقطة ρ ' نرسم العمودى ν " لخط الزوال الرئيسى فى النقطة α " فلذا قابل ν " المحور فى ϵ " ووصل ϵ " ρ " كان هذا الواصل هو المسقط الرأسى ν " للعمودى المطلوب وذلك لان عموديات السطح فى نقط دائرة عرض واحدة تمر جميعاً بنقطة ثابتة على المحور وهذه النقطة هى ϵ فى حالة دائرة العرض المارة بالنقطة ρ ' . ويتعين العمودى المطلوب ν بواسطة

مسقطه الرأس v "مسقطه الاقصى v (وهو المستقيم $ح' د'$).

ولما كان المستوى المماس فى نقطة على السطح ومستوى خط الزوال المار بها متعامدين كما قدمنا لذا كان عمودى السطح فى أية نقطة واقعاً دائماً فى مستوى الزوال المار بها .

ويسمى المخروط من المتولد عن دوران المماس β بالمخروط المماسى فى دائرة العرض α كما يسمى المخروط ϵ الناشئ عن دوران العمودى γ بالمخروط العمودى بالنسبة لدائرة العرض ذاتها .

بند ١٠٠ : المسألة الثالثة

المطلوب رسم منحنى تقاطع السطح مع مستو معلوم (شكل ١٠٩) .
لذلك نفرض تسليلاً للعمل أن المستوى القاطع K هو نفس المستوى المماس للسطح فى النقطة الزائدية α فيكون K فى هذه الحالة عمودياً على المستوى الرأسى (الذى يوازى مستوى الزوال الرئيسى المار بالنقطة α) على أن الطريقة المستعملة لرسم منحنى التقاطع فى الحالة العامة لا تختلف فى الجوهر عنها فى هذه الحالة الخاصة .

فالحصول على نقط المنحنى نختار عدة مستويات أفقية مساعدة مثل المستوى Φ فيقطع كل منها السطح فى دوائر عرض ويقطع المستوى القاطع K فى مستقيم وبذلك تكون نقط المنحنى هى نقط تقاطع كل مستقيم من هذه المستقيمات مع دوائر العرض الموجودة معه فى مستو أفقى واحد .

فإذا كانت ($ح' د'$) إحدى هذه النقط (وقد أمكن الحصول عليها بواسطة المستوى الاقصى المساعد Φ) وأريد رسم المماس μ فيها لمنحنى التقاطع فالتا نعين المستوى المماس Γ للسطح فى هذه النقطة (وذلك بتعيين المماس γ لخط الزوال المار بها كما تقدم فى بند ٩٩) فيكون μ هو خط تقاطع المستويين

$$\cdot (\text{٤٣ ٤٤})^{(1)} \Gamma \text{ و } K$$

ويلاحظ أن المماس لمنحنى التقاطع في كل واحدة من النقط Q_1, Q_2, Q_3 من Σ يكون عمودياً على المستوى الرأسى لأن المستوى المماس للسطح في كل منها عمودى على المستوى الرأسى.

كذلك يلاحظ أن النقطة ١، يجب أن تكون طبقاً لما سبق ذكره في (بند ٤٣) نقطة مضاعفة (وهي في هذه الحالة نقطة معقودة) على منحنى التقاطع.

بند ۱-۱ : الحاشية الرابعة

المطلوب تعيين نقط تقاطع مستقيم معلوم مع السطح .
لذلك نختار مستويًا مناسباً ماراً بالمستقيم (وليكن أحد المستويين المسقطين)
ثم نعين منحنى التقاطع كما تقدم فكون النقط المطلوبة هي نقط تقاطع المستقيم مع
هذا المنحنى .

هذا اذا كان المستقيم غير قاطع للمحور أما اذا كان قطعاً له كالمستقيم v في (شكل ١٠٩) فانه يمكن الحصول على نقط التقاطع في هذه الحالة بالطريقة البسيطة الآتية :

نفرض أن المستقيم v قد دار حول المحور واتخذ الوضع الامامى v الواقع في مستوى خط الزوال الرئيسى وأن نقط تقاطع v مع هذا الخطى لمسقط

(١) والحصول عليه تقطع المستويين بمستوى أعلى Φ فإذا كانت مر نقطة تقاطع γ (وهو المستقيم ذو الميل الاعظم في المستوى Γ) مع Φ ورسم من مر المستقيم δ عمودياً على γ فإن δ (وهو أثر المستوى Γ مع Φ) يقابل خط التناظر المرسوم من كـ "في النقطة و" التي اذا وصلت بالنقطة حـ كان الواصل هو المسقط الاقوى لـ للباس المطلوب .

الرأسى هي "أ" "ب" فالمستقيمان الاقبيان للرسومان من "أ" "ب" يلاقيان "ج" في المساقط الرأسية "د" "هـ" لنقط تقاطع "ج" مع السطح .

بشر ١٠٢ : المسائر الظاهرة

المحيطات الظاهرية (راجع بند ٤٤) .

اذا كان محور السطح رأسياً كما هو الحال في (شكل ١٠٩) فالمحيط الظاهري بالنسبة الى المستوى الاقبي يتكوّن من دوائر العرض التي تكون المستويات المماسّة للسطح في نقطها عمودية على المستوى الاقبي ^(١) . فهو يتكوّن في (شكل ١٠٩) من دائرة عرض صغرى يطلق عليها اسم دائرة الخلف وهي الدائرة "د" "هـ" ومن دائرة عرض كبرى يطلق عليها اسم دائرة الاستواء وهي الدائرة "ف" "ج" . ويلاحظ أن منحنى تقاطع السطح مع المستوى K يمر (في المسقط الاقبي) هاتين الدائرتين في النقط الأربع "ط" "م" "ن" "ك" (التي مسقطها الرأسى المشترك هو "ط") وأن كل واحدة من هذه النقط الاربع تفصل جزءاً منظوراً من منحنى التقاطع عن جزء غير منظور .

والمحيط الظاهري بالنسبة الى أى مستو مواز للمحور كالمستوى الرأسى في (شكل ١٠٩) يتكوّن من خط الزوال الرئيسى ومن دوائر العرض النهائية هـ "و" "ز" (حيث المستويات المماسّة عمودية على المستوى الرأسى) . أما اذا كان المحور مائلاً على أحد مستوي الاسقاط وليكن المستوى الاقبي (شكل ١١٠) فالتأثير يبدأ بتعيين النقط التي تكون المستويات المماسّة للسطح فيها عمودية على المستوى الاقبي فهذه النقط يتألف منها المحيط الحقيقى ط بالنسبة

(١) في هذه الحالة تنقلب المستويات المماسّة في نقط دائرة عرض واحدة واسطوارة مماسة ، (بدلا من المخروط المماس في النقط العادية) تماس السطح في محيط هذه الدائرة .

للمستوى الاقوى ويكون المسقط الاقوى ط' لهذا المنحنى هو المحيط الظاهرى بالنسبة للمستوى الاقوى . وتستخدم لهذه الغرض د كور ، مساعدة مرسومة داخل السطح وذلك بالطريقة الآتية :-

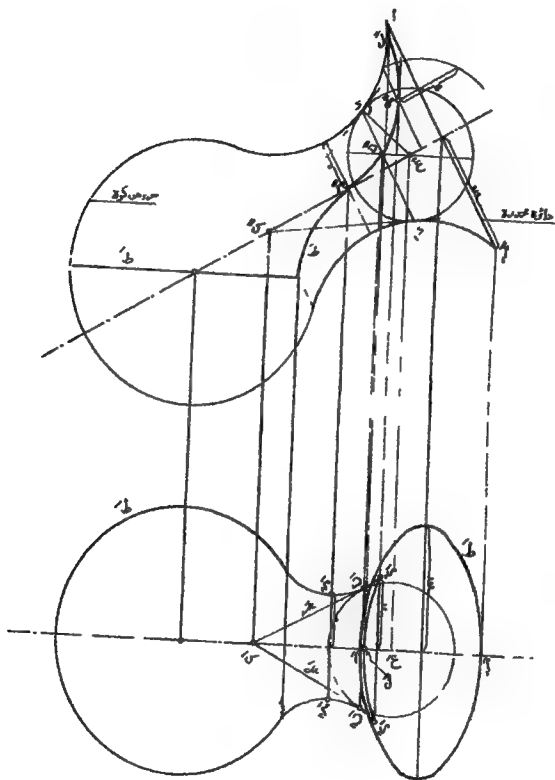
الخطوة الاولى — نختار أية دائرة عرض مثل وى ، ونعين المركز ع للكرة المرسومة داخل السطح والتي تمسه فى محيط هذه الدائرة بحيث يكون المستوى المماس للسطح فى أية نقطة من نقط وى ، منطبقاً على المستوى المماس للكرة فيها . وبلاحظ أن ع هى فى نفس الوقت رأس المخروط العمودى بالنسبة الى الدائرة وى .

الخطوة الثانية — نرمس من ع مستويًا موازيًا لمستوى الاسقاط الذى يارد رسم المحيط الظاهرى بالنسبة له أى مستويًا أفقيًا فى هذه الحالة فيقطع الكرة فى دائرة عظمى هى المحل الهندسى لجميع نقط الكرة التى يكون المستوى المماس للكرة فى كل منها عمودياً على المستوى الاقوى .

الخطوة الثالثة — الدائرة المشار اليها فى الخطوة السابقة تتقاطع مع دائرة العرض وى ، (لأن الدائرتين واقعيتين على سطح كرة واحدة) فى نقطتين د' و ه' متحدتين فى المسقط الرأسى (د' " هو مسقطهما الرأسى المشترك) فلا بد أن يكون المستوى المماس للسطح الدورانى فى كل من هاتين النقطتين (وهو نفس المستوى المماس للكرة فى كل منهما) عمودياً على المستوى الاقوى فهما إذن نقطتان من نقط المحيط الحقيقى ط' وتكون د' " إحدى نقط المسقط الرأسى ط' لهذا المحيط (١) .

الخطوة الرابعة — خط التناظر المرسوم من د' " يقطع فى المسقط الاقوى الدائرة التى مركزها ع' ونصف قطرها يساوى نصف قطر الكرة (وهذه

(١) ومعنى هنا أن المنحنى ط' منحني مزدوج بحيث تمر كل نقطة من نقطه نقطتين من نقط المحيط الحقيقى .



(شكل ١١٠)

الدائرة هي المسقط الاقصى للدائرة العظمى المذكورة آنفاً على سطح الكرة) في المسططين الاقبيين $\omega' \omega''$ للنقطتين $\omega' \omega''$. فكون $\omega' \omega''$ نقطتين من نقط المحيط الظاهرى ط' .

الخطوة الخامسة — اذا عينا المسقط الاقصى س' لرأس المخروط المماس الذى يمس السطح الدورانى فى محيط دائرة العرض $\omega' \omega''$ ووصلنا س' $\omega' \omega''$ س' $\omega' \omega''$ كان هذان الواصلان هما المماسان $\omega' \omega''$ للمحيط الظاهرى ط' فى النقطتين $\omega' \omega''$ على التوالي (وذلك لان $\omega' \omega''$ يمثل مستويًا عمودياً على المستوى الاقصى هو المستوى المماس المشترك فى النقطة $\omega' \omega''$ لكل من سطح المخروط والكرة والسطح الدورانى المعلوم) .

الخطوة السادسة — تعيين بعض النقاط المهمة على المحيط الظاهرى التى من شأنها تسهيل رسم هذا المحيط . فمنها ما يمكن الحصول عليها برسم المحيطات الظاهرية للسطوح الاساسية (الكرة والمخروطى والاسطوانة) التى تكون جزءاً من السطح الدورانى المعلوم (اذا وجدت) وذلك مثل جزء الكرة فى (شكل ١١٠) . ومنها ما يمكن الحصول عليه برسم مساقط الدوائر المحددة مثل الدائرة $\omega' \omega''$. ومنها مساقط النقاط الواقعة على دوائر عرض صغرى أو كبرى (حيث يؤول المخروط المماس الى اسطوانة عمسة) وذلك مثل النقطتين $\omega' \omega''$ على الدائرة الصغرى . ومنها أيضاً مساقط النقاط الواقعة على المحيط الحقيقى والتى يكون المماس له فى كل منها عمودياً على مستوى الاسقاط (رأسياً) وذلك مثل النقطتين $\omega' \omega''$. فالمسقطان الاقبيان $\omega' \omega''$ لهاتين النقطتين هما نقصاً رجوع على المحيط الظاهرى (راجع بند ٣٩ شكل ٤٥) .

بند ١٠٣ : المسألة السادسة — الظهور

اذا فرضنا فى (شكل ١١٠) أنه يراد رسم الظلال الناتجة عن وجود اضافة توازية عمودية على المستوى الاقصى فمن الواضح أن خط الظل المستطع يكون فى

هذه الحالة هو نفس المحيط الحقيقي له بالنسبة الى المستوى الاقصى كما أن المحيط الظاهري يمثل الظل الساقط على أى مستو اقصى . ولهذا السبب كانت عملية رسم الظلال للسطوح الدورانية فى حالة الاضاءة المتوازية شبيهة بالعملية السابقة لتعيين المحيطات الحقيقية والظاهرية ^(١) .

واذا فرضنا أنه يراد رسم الظل الذى يلقيه منحني مثل ح على سطح ما بسبب وجود نقطة مضيئة مثل ل فالطريقة المثلى لذلك هى أن نختار على السطح منحنيًا حيثما اتفق مثل م ونجد الظلين ح م و م للتحنيين معاً على مستو ما فاذا كانت م إحدى نقط تقاطع ح م و م ووصل م ل فقطع المنحني م فى م كانت م إحدى نقط الظل الساقط المطلوب رسمه وهكذا يمكن الحصول على عدة نقطاً أخرى كالنقطة م باختيار منحنيات جديدة على السطح مثل المنحني الاول م . فاذا كان المطلوب إيجاد ظل سطح على سطح آخر فالتا نجد خط الظل ل احد السطحين ثم نجد الظل الذى يلقيه هذا الخط على السطح الآخر بالطريقة السابقة . وترك للقارئ تطبيق هذه الطرق على السطوح الدورانية حيث تختار للسهولة دوائر العرض المختلفة لتمثيل المنحنيات م المشار اليها آنفاً .

بـ ١٠٤ : المسألة السابعة — منحنى تقاطع سطحين دورانيين

- (١) اذا اشترك السطحان فى المحور فان خط التقاطع يتكوّن من دوائر العرض المارة بنقط تقاطع خطي الزوال الرئيسيين .
- (٢) اذا كان المحوران متوازيين تختار عدة مستويات مساعدة عمودية على

(١) لما كانت الاشعة الضوئية تحل فى هذه الحالة محل أشعة الاسقاط فانه لتعيين خط ظل سطح دوراني تكون المستويات المارة بمراكز الكور المرسومة داخله عمودية على تلك الاشعة .

المحورين فقطع كل منها السطحين في دوائر عرض تقاطع بدورها في عدة نقط على منحنى التقاطع.

(٣) اذا تقاطع المحوران فابسط طريقة لرسم منحنى التقاطع تكون باختيار عدة كور مساعدة متحدة المركز في نقطة تقاطع المحورين . فكل كرة من هذه الكور تقطع السطحين في دوائر عرض تقاطع بدورها في عدة نقط على منحنى التقاطع .

(٤) اذا كان المحوران غير متقاطعين فان اختيار المستويات أو السطوح المساعدة (مثل الكور السابقة) يتوقف على وضع السطحين . فمثلاً اذا كان أحد المحورين عمودياً على المستوى الاقوى والآخر موازياً للمستوى الرأسي (. يمكن دائماً الوصول الى هذا الوضع بتغيير مستويات الاسقاط) فان أى مستو اقوى يقطع السطح الاول في دائرة ويقطع السطح الثاني في منحن يمكن رسمه بسهولة ويتقاطع مع الدائرة في عدة نقط على منحنى التقاطع .

كذلك يمكن استخدام كور مساعدة في بعض الحالات الخاصة اذا كان محورا السطحين غير متقاطعين . مثال ذلك لنفرض أن أحد السطحين سطح كعكي وأن محور السطح الآخر واقع في مستوى دائرة الاستواء للسطح الكعكي . وليكن Σ مستويها ما ماراً بمحور السطح الكعكي وقاطعاً له في دائرتين . فاذا قمنا من مركز إحدى هاتين الدائرتين (دائرة زوال) عموداً على المستوى Σ ليقابل محور السطح الآخر (حيث إن هذا المحور والعمود واقعان في هذه الحالة في مستو واحد هو مستوى دائرة الاستواء) في نقطة مثل ϵ فالكرة التي مركزها ϵ وتمر بدائرة الزوال السالفة الذكر تقطع أيضاً السطح الآخر في دائرة (أو أكثر من دوائر العرض) وتكون نقط تقاطع هاتين الدائرتين تقع على منحنى التقاطع المطلوب .

أما المماس لمنحنى تقاطع سطحين في نقطة على المنحنى مثل \odot فيمكن الحصول عليه دائماً بأحدى الطريقتين العامتين الآتيتين :—

(١) باعتباره خط تقاطع المستويين المماسين للسطحين في النقطة \odot (بند ٤٣) .

(٢) باعتباره العمود المقام من \odot على المستوى المعين بعمودي السطحين في النقطة \odot ذاتها .

وتفضل عادة الطريقة الثانية في حالة السطوح الدورانية لسهولة

الفصل الثاني

السطح الزائدى الدوراني ذو الطية الواحدة

بند ١٠٥ : تعاريف ومساائل أساسية

إذا اعتبرنا محوراً ثابتاً ومستقيماً راسماً يدور حوله فإن هذا الراسم يمكن أن يشغل ثلاثة أوضاع بالنسبة للمحور :

أولاً — إما أن يكون عمودياً على المحور فيولد بدورانه مستوياً

ثانياً — وإما أن يكون قاطعاً للمحور على بعد نهائى أو لا نهائى فيولد بدورانه مخروطاً أو أسطوانة على التوالى .

ثالثاً — وإما أن يكون غير قاطع للمحور (ومائلاً عليه) فيولد بدورانه ما يسمى بالسطح الزائدى الدوراني ذو الطية الواحدة (شكل ١١١) .

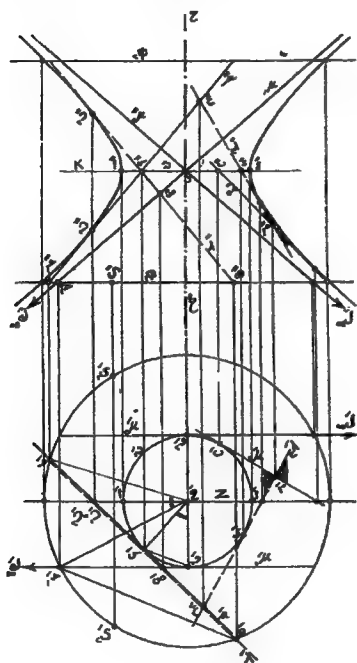
وهذا السطح الاخير هو الذى خصصنا هذا الفصل لدراسته . وسنبداً أولاً بالبرهنة على أن خط الزوال لهذا السطح هو منحنى من الدرجة الثانية . فلا ثبات ذلك نقطع السطح بمستوى مار بالمحور فيكون المقطع خط زوال ونفرض أى مستقيم α فى مستوى المقطع ثم ثبت أنه يقطع خط الزوال فى نقطتين اثنتين وذلك بالطريقة الآتية :

بما أن المستقيم α والمحور واقعان فى مستو واحد هو مستوى المقطع فانهما يتقابلان فى نقطة على المحور مثل M . ولكن α أى وضع من أوضاع الراسم الذى يولد السطح بدورانه حول المحور فإذا أدركنا المستقيم α حول المحور دورة كاملة وفرضنا أنه أثناء دورانه يلاقى المستقيم α (مع فرض بقائه ثابتاً) ∞ من المرات فمن الواضح أننا اذا ثبتنا المستقيم α وأدركنا المستقيم α حول المحور

دورة كاملة فإنه يجب أن يلاقى α بنفس العدد n من المرات (وفي نفس النقط على كل من المستقيمين) أى أن عدد نقط تلاقي المستقيم α مع السطح الزائدى يساوى عدد نقط تلاقي المستقيم μ مع السطح المخروطى الناشئ عن دوران

المستقيم α حول المحور المعلوم . ولكن العدد الاخير هو اثنان ، إذن فالمستقيم α يلاقى السطح الدورانى أى يلاقى خط الزوال المعلوم فى نقطتين اثنتين (حقيقتين أو تخيليتين) ويكون خط الزوال إذن منحنياً من الدرجة الثانية . ولما كان من الممكن دائماً

كما يؤخذ من (شكل ١١١) أن يتخذ المستقيم الراسم وضعين موازيين لاي مستو مار بالمحور فإنه ينتج أن خط الزوال مقطع مخروطى له نقطتان فى المديونية أى قطع زائد . ويكون محور الدوران هو المحور المرافق للقطع الزائد



(شكل ١١١)

فى جميع أوضاعه بحيث يمكن اعتبار السطح الزائدى الدورانى ذى الطية الواحدة متولداً عن دورانه قطع زائد حول محوره غير القاطع وهو أحد

سطوح الدرجة الثانية المعروفة (راجع الهندسة التحليلية حيث يمكن البرهنة على أن كل سطح ينشأ عن دوران مقطع مخروطي حول محوره هو سطح من الدرجة الثانية) . لذا فإن أى مستقيم فى الفراغ يقطع السطح الزائدى ذا الطية الواحدة فى نقطتين (حقيقتين أو تخيليتين) كما أن أى مستوى يقطعه فى منحنى من الدرجة الثانية أى مقطع مخروطي .

فإذا كان السطح فى (شكل ١١١) معلوماً بالمحور الرأسى $ح ح$ والمستقيم الراسم (μ, μ') ورسم العمود المشترك بين المحور والرأسم مقابل الأخير فى النقطة $س$ فإن هذه النقطة ترسم أثناء الدوران أصغر دائرة على السطح وتسمى بدائرة الملمس وقد رمزنا إليها فى الشكل بالرمز $د$ ، كما رمزنا إلى مستويها الأخرى بالرمز K .

وإذا كان Φ مستوياً أفقياً حيثما اتفق يقابل الراسم μ فى النقطة $ح$ فإن $ح$ ترسم أثناء الدوران دائرة نصف قطرها يساوى $ح' ح$ وهذه الدائرة هى المحل الهندسى لنقط تقاطع الاوضاع المختلفة للرأسم مع المستوى Φ . فالحصول على وضع جديد μ للرأسم نلاحظ أن مسقطه الأخرى μ' يجب أن يمر بـ $و$ وأن أثره مع المستوى Φ يجب أن يكون واقعاً على الدائرة المرسومة فى هذا المستوى وبذلك يتعين μ .

ليكن Z مستوى خط الزوال الرئيسى (المستوى المار بالمحور موازياً للمستوى الرأسى) وليكن النقطة $هـ$ نقطة تقاطع الرأسم μ مع Z فالمسقط الرأسى μ للرأسم يجب أن يمر بخط الزوال الرئيسى (وهو كما قدمنا قطع زائد) فى المسقط الرأسى $هـ$ ، لنقطة $هـ$. وذلك لأن المستوى المماس N للسطح الزائدى فى النقطة $هـ$ يتعين بالرأسم μ وببئس الخفى لحظ الزوال الرئيسى فى النقطة $هـ$ ذاتها (وهذا المماس واقع فى المستوى Z) وبما

أن المستوى N يجب أن يكون عمودياً على مستوى الزوال Z المار بالنقطة ∞ فينتج من ذلك أن N هو نفس المستوى المسقط للرسم μ على المستوى الرأسى بحيث يكون μ هو المسقط الرأسى المشترك لكل مستقيم مرسوم فى المستوى N ومن بينها المماس الحقيقى لخط الزوال الرئيسى .

يؤخذ مما تقدم أن المسقط الرأسى لآى وضع من أوضاع الراسم يمرس القطع الزائد فى المسقط الرأسى لنقطة تقاطعه مع المستوى Z . فإذا كان μ أحد الوضعين الامامين (الموازيين الى Z) للرسم فإن نقطة تقاطعه ∞ مع Z تكون على بعد لا نهائى وإذن فالمسقط الرأسى μ لهذا الوضع يمرس القطع الزائد فى النقطة ∞ التى فى اللانهاية أى أن μ هو أحد الخطين التقريبين للقطع الزائد أما الخط التقربى الآخر فهو μ " \equiv " و " ل " ∞

بند ١٠٦ : مجموعة الرواسم

لنفرض فى (شكل ١١١) أن λ مستقيم واقع فى المستوى المسقط أفقياً للراسم μ بحيث يكون $\lambda \equiv \mu$ وأن المستقيمين λ و μ متماثلان بالنسبة للمستوى K (فيتقاطعان لذلك فى النقطة s على دائرة الحاق s) فمن الواضح أن المستقيم λ يقع حينئذ بتمامه على السطح الزائدى الذى ينشأ عن دوران μ حول المحور بحيث يمكن اعتبار هذا السطح ناشئاً أيضاً عن دوران المستقيم λ حول نفس المحور . فالمستقيم λ هو إذن راسم مبرير للسطح وهذا معناه أن هناك مجموعتين من الرواسم على السطح هما μ و μ ... μ و λ و λ ... ولما كان أى راسمين فى مجموعة واحدة هما دائماً مستقيمان غير متقاطعين (لأنه يمكن الحصول على أحدهما بإدارة الآخر حول المحور) وكان على العكس من ذلك أى راسمين من مجموعتين مختلفتين مثل μ و λ هما دائماً مستقيمان متقاطعان فى نقطة على بعد نهائى أو لا نهائى

(لأن المستوى المعين بالمستقيمين المتوازيين μ و ν يمر بالراسمين μ و ν ويجب لذلك أن يتقاطع هذان الراسمان) لذا كانت النظرية الهامة الآتية صحيحة :—

نوجب على أى سطح زائدى دورانى ذى طية واحدة مجموعة أو فصليته مختلفاته من الراسم وأى راسمين فى مجموعة واحدة هما دائماً مستقيمان غير متقاطعين فى حين أنه كل راسم فى إحدى المجموعتين يتقاطع مع جميع راسم المجموعة الأخرى .
ويؤخذ من هذه النظرية أن كل نقطة على السطح يمر بها دائماً راسمان كل فى مجموعة وهذان الراسمان يعينان المستوى المماس للسطح فى هذه النقطة (١) .

بند ١٠٧ : المستويات المماس والمقاطع المستوية

إذا علم أحد مسقطى نقطة على السطح الزائدى وأريد إيجاد مسقطها الآخر فالطريقة لذلك لا تختلف عن الطريقة العامة المذكورة فى الفصل السابق . فثلاً إذا كان المعلوم المسقط الرأسى " لنقطة مثل ν وأريد إيجاد مسقطها الاقضى ν' فاننا نرسم من ν " مستقيماً ألقياً يمثل المستوى الاقضى المار بالنقطة ν والذي يقابل الراسم المعلوم μ فى النقطة μ مثلاً . فإذا رسمت فى المسقط الاقضى دائرة العرض التى مركزها μ ونصف قطرها $\mu \nu$ (شكل ١١١) فان خط التناظر المار بالنقطة ν " يقطعها فى نقطتين ν_1 و ν_2 يصلح كل منهما أن يكون المسقط الاقضى المطلوب .

(١) إذا كانت ν و μ نقطتين على الراسم μ وكان μ و ν الراسمين فى المجموعة الأخرى المارين بهاتين النقطتين فلما كان μ و ν مستقيمين غير متقاطعين فانه ينتج أن المستوى المماس فى ν يجب أن يكون غيره فى μ . وهنا معناه أنه اذا تحركت نقطة على راسم ما فالمستوى المماس للسطح فيها يدور حول هذا الراسم .

وبطريقة عكسية يمكن الحصول على المسقط الرأسى اذا علم المسقط الاقصى لنقطة على السطح . وسنشرح فيما يلى طريقة أخرى لذلك يمكن بواسطتها فى الوقت نفسه تعيين المستوى المماس فى النقطة :

نفرض أن M' المسقط الاقصى لنقطة مثل M واقعة على السطح الزائدى المعلوم بالمحور CC والراسم μ . وليكن $\mu\mu'$ المماسين من M' الى دائرة الحلق U (حيث U و μ' نقطتا التماس) . فهذان المماسان هما المسقطان الاقبيان للراسمين $\mu\mu'$ المارين بالنقطة M . فاذا فرضنا أن $\mu\mu'$ يقابل الراسم المعلوم μ فى النقطة E (E هى نقطة تقاطع $\mu\mu'$) كان $\mu\mu'$ هو المستقيم E " و " وعليه يقع المسقط الرأسى M " للنقطة M ويكون $\mu\mu'$ هو المستقيم M " و " وبذلك يتعين الراسمان $\mu\mu'$ الماران بالنقطة M والمحددان للمستوى المماس فيها . ولما كان من الممكن تغيير اسمى المماسين M' و μ' الى M و μ الى دائرة الحلق U وذلك بأن نطلق عليها الاسمين $\mu\mu'$ على التوالى (بدلا من $\mu\mu'$ كما فعلنا فى شكل ١١١) فانه ينتج من ذلك إمكان الحصول على مسقط رأسى جديد للنقطة أى أن M هو المسقط الاقصى المشترك لنقطتين على السطح .

ويسمى المستوى المماس فى أية نقطة على بعد لانهاى من نقط السطح مثل K أو L بالمستوى التقربى . وهذه المستويات تغلف مخروطاً دورانياً (يسمى السطح فى اللانهاية) رأسه فى مركز السطح ورواسمه توازى رواسم السطح ويطلق على هذا المخروط اسم المخروط التقربى .

ويكون المقطع المستوى للسطح (وهو منحرف من الدرجة الثانية كما قدمنا) قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما اذا كان المستوى المار بمركز السطح والموازى للمستوى القاطع — قطعاً المخروط التقربى (فى راسمين حقيقيين من رواسم المخروط) أو مماساً له أو غير قاطع له على التوالى .

الباب الخامس

السطوح اللولبية

الفصل الاول

المنحنى اللولبي وسطحه اللولبي القابل للاستواء

بند ١٠٨ : تعريف

المنحنى اللولبي هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك حركة لولبية حول محور ثابت أى حركة دوران حول المحور مصحوبة بحركة انتقال فى اتجاهه بحيث تكون النسبة بين السرعة الزاوية للحركة الدورانية والسرعة الخطية للحركة الانتقالية تساوى مقداراً ثابتاً (بند ٤٥) .

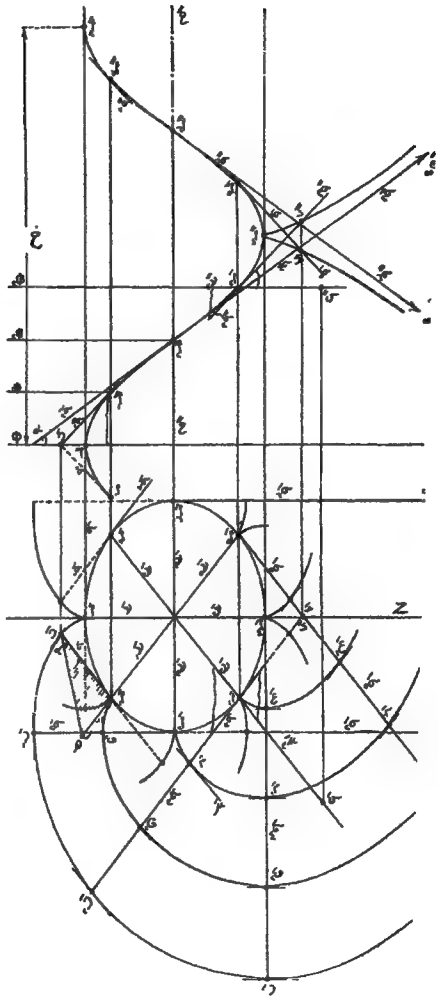
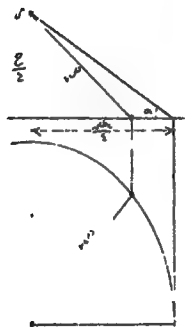
كذلك يمكن تعريف المنحنى اللولبي بأنه منحنى فراغى مرسوم على سطح اسطوانة دورانية بحيث يميل على رواسمها فى نقط التقاطع بزواوية ثابتة (لا تساوى ٩٠°) .
ويؤخذ من ذلك أن المنحنى اللولبي يزول بعد فرد الاسطوانة المرسوم على سطحها الى خط مستقيم فهو إذن أقصر خط يصل أى نقطتين (غير واقعيتين على مقطع عمودى واحد) على سطح هذه الاسطوانة .

بند ١٠٩ : كيفية رسم المنحنى اللولبي

إذا علمت الاسطوانة (نصف قطرها r) المرسوم على سطحها المنحنى اللولبي ونقطة الابتداء ١ (شكل ١١٢) وعلمت كذلك الزاوية الثابتة α التى يميل بها المنحنى اللولبي على المستوى الاقصى العمودى على محور الاسطوانة (أى



مساحت مثلث



الزاوية المتممة للزاوية التي يميل بها المنحنى على رواص الاسطوانة (ورمزنا البعد بين نقطتين متساويتين من نقط تقاطع المنحنى اللولبي مع راسم واحد من رواص الاسطوانة وهو البعد الذي يطلق عليه اسم الخطوة ^(١) بالرمز α — فان

$$\alpha = 2\pi \sin \phi$$

وننتج هذه العلاقة مباشرة من بسط الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى .
فالحصول على عدة نقط من المنحنى اللولبي تمر بالنقطة ١ المستوى الاقصى ϕ فيقطع الاسطوانة في الدائرة الميئة بالشكل ثم نقسم هذه الدائرة الى ϕ من الاقسام ($\phi = 8$ في شكل ١١٢) بالنقط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ فتكون هي المساط الاقصى للنقط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ الواقعة على المنحنى والتي ترتفع عن المستوى ϕ بما مقداره $\frac{\alpha}{\phi}$ ، $\frac{2\alpha}{\phi}$ ، $\frac{3\alpha}{\phi}$ ، ... على التوالي . فاذا قيست هذه الارتفاعات في المسقط الرأسى على خطوط التناظر ابتداء من منسوب النقطة ١ " حصلنا على المساط الرأسى ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ ... للنقط المذكورة تلك المساط التي يتألف منها المسقط الرأسى للمنحنى اللولبي وهو كما يمكن إثباته بسهولة منحني جيبي .

وللحصول على المسقط الرأسى ϕ " لماس المنحنى في النقطة ١، مثلا نقيس على مسقطه الاقصى ϕ (وهو مماس الدائرة في ١) ابتداء من ١، البعد ١، ٢ مساوياً لطول القوس ١، ٢ فتكون ϕ المسقط الاقصى لآثر المماس ϕ مع المستوى ϕ . فاذا كانت ϕ " هي المسقط الرأسى لهذا الاثر كان ϕ " هو

(١) اذا اعتبرنا المنحنى اللولبي محلا هندسياً لنقطة متحركة كانت الخطوة هي المسافة الموازية للمحور والمقطوعة في نفس الزمن الذي تكون فيه النقطة المتحركة قد دارت دورة كاملة حول المحور .

المستقيم $\sigma' \alpha'$. وذلك لان المماس للمنحنى اللولبي في أية نقطة يميل على المستوى الاقصى σ بالزاوية الثابتة α وقد بينا فيما تقدم أن

$$\frac{\sigma' \alpha'}{\sigma \alpha} = \frac{\sigma' \alpha'}{\sigma \alpha}$$

ولما كان ارتفاع النقطة α' عن المستوى σ مساوياً الى $\frac{\sigma}{\alpha}$ فإن

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \alpha'$$

فمن هاتين المعادلتين ينتج أن

$$\sigma' \alpha' = \frac{\sigma' \alpha'}{\sigma} = \frac{\sigma' \alpha'}{\sigma} = \sigma' \alpha'$$

بند ١١٠ : مخروط الترميم

إذا مد من أية نقطة في الفراغ مثل σ (مستطاهها $\sigma' \alpha'$ في شكل ١١٢) موازيات للمماسات المنحنى اللولبي فإن هذه الموازيات تولد مخروطاً دائرياً قائماً رأسه σ وزاوية قاعدته α ويطلق عليه اسم مخروط الترميم . ويمكن استخدام هذا المخروط في تعيين المماس للمنحنى في أية نقطة بالطريقة البسيطة الآتية :

ليكن المطلوب في (شكل ١١٢) تعيين المماس $\sigma' \alpha'$ في النقطة α' فلما كان المسقط الاقصى $\sigma' \alpha'$ (وهو مماس الدائرة في α') لهذا المماس معلوماً فإنه إذا رسم من σ' المستقيم $\sigma' \alpha'$ موازياً الى $\sigma' \alpha'$ وعين المسقط الرأسى σ' لرسم مخروط التوجيه الذى مسقطه الاقصى $\sigma' \alpha'$ كان $\sigma' \alpha'$ هو المستقيم المرسوم من α' موازياً الى $\sigma' \alpha'$.

بند ١١١ : المستوى العمودي

نفرض أن σ نقطة على المنحنى اللولبي وأن γ عمودي الاسطوانة (المرسوم على سطحها المنحنى) المار بهذه النقطة ولنفرض أيضاً أن σ_1, σ_2 نقطتان على المنحنى قريبتان من σ ومثلثان عمودياً بالنسبة الى γ فن الواضح أن المستوى A المار بالنقط σ_1, σ_2 يحتوي حينئذ العمودي γ . فإذا تحركت σ_1, σ_2 على المنحنى مقتربتين من σ مع بقائهما متماثلتين بالنسبة الى γ فإن المستوى A يدور حول العمودي γ ويؤول في وضعه النهائي عند ما تنطبق σ_1, σ_2 على σ الى المستوى المماس Σ (بند ٣٧) للمنحنى اللولبي في σ وفي هذه الحالة يؤول كل من القاطعين σ_1, σ_2 الى المماس Σ للمنحنى في σ . ونتج ما تقدم أن

المستوى العمودي للمنحنى اللولبي في أية نقطة من قطعه يمر بمماس المنحنى وعمودي الاسطوانة في هذه النقطة ^(١).

ويسمى مماساً معتدلاً كل منحن مرسوم على سطح ما بحيث تكون مستوياته المماسية في نقطة مختلفة عمودية على السطح. فالمنحنى اللولبي على هذا هو منحن معتدل على سطح الاسطوانة ونظراً الى أنه أقصر خط يصل أى نقطتين على السطح كما قدمنا ولما كان من الممكن البرهنة على أن هذا صحيح لكل منحن معتدل مرسوم على سطح ما لذا قيل بصفة عامة إن المنحنى المعتدل هو أقصر خط منحن يمكن رسمه على سطح ما ليصل أى نقطتين من نقط هذا السطح ^(٢).

(١) يمكن أيضاً البرهنة على هذه النظرية بالتعويض في نظرية كاتلان (بند ١٢٨) حيث $\gamma \sim \infty$ في هذه الحالة ونتج من ذلك أن $\infty = 0$ ومعنى هذا أن المستوى المماس يجب أن يكون عمودياً على المستوى المماس أى يحتوي عمودي السطح. (٢) اذا تصورنا خطاً قد بُدئ الى سطح ما بين نقطتين من نقط السطح فإن هذا الخيط يرسم المنحنى المعتدل على السطح بين النقطتين. وذلك لاننا اذا اعتبرنا قوتي الشد في جزئين متجاورين من الخيط وجب أن تكون محصلة هاتين القوتين على استقامة عمودي السطح ولما كانت هذه المحصلة موجودة في مستوى القوتين وهو هنا المستوى المماس لنا كان هذا المستوى في جميع نقط الخيط عمودياً على السطح.

وبمقتضى النظرية السابقة يتعين المستوى الملاصق Σ_3 في أية نقطة على المنحنى اللولبي مثل α (شكل ١١٢) بالمماس σ للمنحنى والعمودى σ^\perp للاسطوانة في هذه النقطة ولكن لما كان σ هو في هذه الحالة مستقيم ذو ميل أعظم في المستوى Σ_3 (بالنسبة الى المستوى الاقصى) فهو يكفى وحده لتحديد المستوى Σ_3 .

ويلاحظ أنه لما كان المستوى الملاصق في كل من النقط $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ عمودياً على المستوى الرأسى (لان عمودى الاسطوانة في كل منها هو في نفس الوقت عمودى على المستوى الرأسى) فانه يجب أن تكون المساط الرأسية $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ لهذه النقط هي نقط انقلاب على المسقط الرأسى للمنحنى اللولبي (راجع بند ٣٩).

بند ١١٢ : نصف قطر الانحناء

بمقتضى العلاقة التى اثبتناها في (بند ٣٩) وهى :

$$\alpha = \frac{1}{\rho}$$

$$\rho = \frac{1}{\alpha} = \rho \times \alpha \quad \text{جنا } \alpha$$

(حيث ρ هو نصف قطر الانحناء لمنحنى فراغى في نقطة مثل α و ρ^\perp هو نصف قطر الانحناء للمسقط العمودى للمنحنى في α وحيث $\alpha = \frac{1}{\rho}$ هما زاويتا ميل المماس والمستوى الملاصق في α على مستوى الاسقاط) يمكن بسهولة تعيين نصف قطر الانحناء ρ للمنحنى اللولبي في أية نقطة من نقطه . وذلك لانه لما كان المسقط الاقصى للمنحنى اللولبي هو دائرة فان ρ^\perp في العلاقة السابقة ثابت لجميع نقط المنحنى ويساوى نصف قطر الاسطوانة ولما كانت الزاوية α ثابتة كذلك ومعلومة لجميع النقط ولما كان ميل المستوى الملاصق على المستوى الاقصى يساوى في كل نقطة ميل المماس عليه (لان هذا المماس

هى كما يتضح بسهولة من الشكل برابط الدائرة المارة بالنقط $أ' ب' ج' د' هـ' ز'$...
التي هى نقط رجوع على هذه البواسط (بند ٢٥) .

ومن السهل أن يرى أن المماس لاي واحد من المنحنيات السالفة الذكر فى نقطة تقاطعه مع المنحنى اللولبي يجب أن يكون منطبقاً على عمودى الاسطوانة المارة بها
فتلا $م م م \equiv م$ لان كلا من هذين المستقيمين واقع فى المستوى الاقصى $م م م$
وعمودى على راسم السطح $م م$ المار بالنقطة $م م$. ويتضح من هذا أن المستوى
المماس للسطح اللولبي فى أية نقطة من نقط المنحنى اللولبي هو نفس المستوى المماس
فيها للمنحنى اللولبي .

ولما كان المستوى المماس للسطح فى أية نقطة عليه مثل $م$ هو نفس المستوى
المماس له فى النقطة $م م$ (نقطة تماس الراسم $م م$ المار بالنقطة $م$ مع المنحنى
اللولبي) لان الاول منها متعين بالمستقيمين $م م م$ و $م م م$ والثانى متعين
بالمستقيمين $م م م$ و $م م م$ وكلا المستقيمين $م م م$ متوازيان — فانه ينتج أن
المستوى المماس للسطح اللولبي القابل للاستواء فى إحدى نقطه يمس بطول
المستقيم الراسم المار بها وبذا يمكننا القول بان السطح المماس لمنحنى لولبي هو غلاف
مستو يتحرك بحيث يكونه فى جميع أوضاعه مستوياً موصفاً للمنحنى .

ولما كان تماس المنحنى اللولبي أو راسم السطح هو مستقيم ذو ميل أعظم
(بالنسبة للمستوى الاقصى) فى المستوى المماس المار بهذا الراسم ولما كانت جميع
مماسات المنحنى اللولبي متساوية الميل على المستوى الاقصى فينتج من ذلك أن جميع
المستويات المماسية للسطح متساوية الميل على المستوى الاقصى فالسطح اللولبي
القابل للاستواء هو إذن سطح ميل (أنظر بند ١٦٣) .

ويسمى أى مستوئامر بمحور السطح اللولبي كما يسمى نظيره فى حالة السطوح

للورانية بمستوى زوائره كما يسمى منحنى تقاطعه مع السطح بمنحنى زوائره

خط الزوال الرئيسى في (شكل ١١٢) نعين نقط تقاطع رواسم السطح المختلفة مع مستوى الزوال Z المار بالمحور موازياً للمستوى الرأسى فالتقطان ρ_1 و ρ_2 هما نقطتا تقاطع الراسمين ρ_1 و ρ_2 مع المستوى Z فتكونا لذلك نقطتين على خط الزوال كما تكون النقطة a نقطة أخرى على هذا الخط (ويلاحظ أن هذه النقطة الأخيرة نقطة رجوع على المنحنى). ولما كان الراسمان ρ_1 و ρ_2 يوازيان المستوى Z لنا كان مسقطاهما الرأسيان ρ_1'' و ρ_2'' خطين تقريبين لخط الزوال الرئيسى. ويمثل الحصول على المماس لهذا الخط في إحدى نقطه برسم خط تقاطع المستوى المماس للسطح في هذه النقطة مع المستوى Z .

ويتضح بسهولة من (شكل ١١٢) أن السطح اللولبي القابل للاستواء يمكن اعتباره أيضاً متولداً عن تحرك خط زواله أو تحرك مقطع العمودى — حركة لولبية حول المحور.

الفصل الثانى

السطوح اللولبية على وجه العموم

بند ١١٤ : كلمة عامة وتعريف

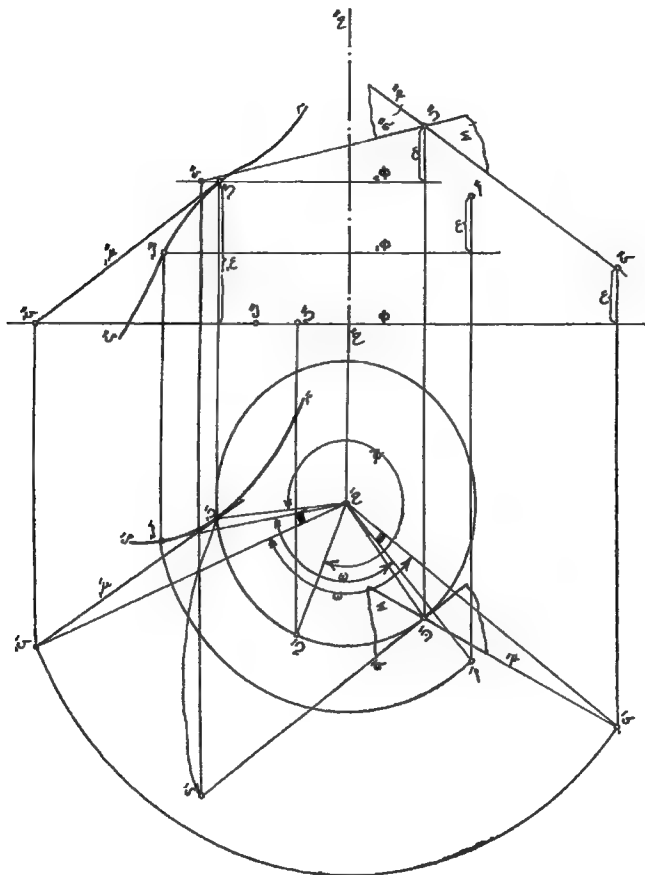
لنفرض فى (شكل ١١٣) أن المنحنى (الفراغى) \mathcal{C} يتحرك حركة لولبية حول المحور \mathcal{C} فيولد بذلك سطحاً لولبياً (بند ٤٥) فن الواضح أن كل نقطة من نقط هذا المنحنى ترسم أثناء الحركة منحنياً لولبياً ثابت الخطوة لجميع النقط . فإذا علمت هذه الخطوة واتجاه الحركة اللولبية تعين السطح تمام التعيين . ويتعين السطح أيضاً إذا علم بدلاً من الخطوة واتجاه الحركة — مسار إحدى نقط المنحنى الراسم أو وضعان من أوضاعها أثناء الحركة وليكن هذان الوضعان فى (شكل ١١٣) هما الوضع الابتدائى (α', β') والوضع (α'', β'') لنفس النقطة بعد أن دارت حول المحور زاوية مقدارها ω . فإذا رمزنا الى الارتفاع المعلوم للنقطة α عن المستوى الاقصى Φ ، المار بالوضع الابتدائى α' بالرمز \mathcal{C} والى الخطوة الثابتة بالرمز \mathcal{X} فإن

$$\mathcal{C} = \mathcal{X} \times 360^\circ$$

وإذا رمزنا الى الارتفاع الذى يناظر زاوية دوران أخرى مثل ψ بالرمز \mathcal{C} فإن

$$\mathcal{C} = \mathcal{X} \times \psi^\circ$$

فإذا علمت فى هذه المعادلة زاوية الدوران ψ لاية نقطة تحدد الارتفاع المناظر \mathcal{C} وبالعكس اذا علم الارتفاع \mathcal{C} أمكن تعيين زاوية الدوران ψ .



(شكل ١١٣)

ولنفرض الآن أنه يراد تعيين مسقطى نقطة جديدة على السطح مثل σ معلوم وضعها الابتدائي σ على المنحنى الراسم وذلك بعد أن يدور هذا الوضع دورة مقدارها ω حول المحور. فنرسم لذلك الدائرة التي مركزها σ ونصف قطرها σ — وهذه الدائرة هي المسقط الاقصى للمنحنى اللولبي الذي ترسمه النقطة σ — ثم نقيس الزاوية $\sigma' \sigma' \sigma = \omega$ فتكون σ المسقط الاقصى للوضع الجديد σ . أما المسقط الرأسى σ فيقع على خط التناظر المرسوم من σ وعلى ارتفاع عن المستوى الاقصى σ (المر بالوضع الابتدائي σ) مساو للارتفاع المناظر الى الزاوية ω وهو نفس الارتفاع المعلوم σ .

بند ١١٥ : المستوى المماس

لتعيين المستوى المماس σ للسطح في النقطة σ المذكورة آنفاً نرسم بالطريقة السابق شرحها في (بند ١٠٩) — المماس σ للمنحنى اللولبي المار بالنقطة σ هو مماس الدائرة في σ فإذا قيس على σ البعد $\sigma' \sigma'$ مساوياً طول القوس $\sigma' \sigma$ فإن σ' تقع على σ ويكون σ هو المستقيم $\sigma' \sigma$ (ونرسم كذلك المماس σ للمنحنى الراسم في وضعه الجديد المار بالنقطة σ وذلك بالطريقة الآتية التي تكفيها مؤونة رسم الوضع الجديد للمنحنى :

ليكن $\sigma' \sigma'$ المسقطين الاقصى والرأسى للمماس σ للمنحنى σ في النقطة σ فيكون σ هو الوضع الابتدائي للمماس σ . فإذا أخذنا أية نقطة مثل σ على σ وحررناها حركة لولبية بحيث تدور زاوية مساوية للزاوية التي دارتها σ حول المحور (ومقدارها ω كما قدمنا) وكانت σ هي الوضع الجديد للنقطة σ بعد الدوران فإن $\sigma' \sigma' \sigma = \omega$ يكونان المسقطين الاقصى والرأسى $\sigma' \sigma'$ للمماس المطلوب σ .

وبذلك يكون المستوى σ هو المستوى المعين بالمستقيمين :

بشر ١١٦ : كيفية تعيين أهم مسقطي تقاطع على السطح اذا علم مسقطها الآخر

اذا علم المسقط الاقنى ϕ لنقطة على السطح مثل ϕ وأريد إيجاد مسقطها الرأسى ϕ' فان الطريقة لذلك تكون باستخدام النقطة الابتدائية ϕ على المنحنى الراسم المعلوم ϕ كما يتضح من (شكل ١١٣) .

أما اذا كان المعلوم هو المسقط الرأسى ϕ' لنقطة مثل ϕ' على السطح وأريد تعيين ϕ فنمر بالنقطة المستوى الاقنى (العمودى على المحور) ϕ ونعين منحنى تقاطعه مع السطح أى المقطع العمودى ϕ وذلك بان نحرك نقط المنحنى ϕ حركة لولية الى أن تقع فى المستوى ϕ فتلا ارتفاع ϕ عن ϕ يساوى ϕ فالزاوية ϕ المناظرة لهذا الارتفاع ϕ التى يمكن حسابها من المعادلة المذكورة فى (بند ١١٤) هى الزاوية التى يجب أن تدورها ϕ (فى الاتجاه المضاد لاتجاه الزاوية ϕ) لتأخذ الوضع ϕ الواقع فى المستوى ϕ فاذا كانت الزاوية ϕ ϕ' ϕ' ϕ' مساوية الى ϕ كانت ϕ' إحدى نقط المسقط الاقنى ϕ للقطع العمودى ϕ وتعيين عدة نقط أخرى بنفس الطريقة يمكن الحصول على ϕ ويكون المسقط الاقنى المطلوب ϕ للنقطة ϕ هو إحدى نقط تقاطع خط التناظر المرسوم من ϕ مع ϕ .

واذا أمرنا بالنقطة ϕ' مستقيما موازيا لخط الارض ليمثل مستوى الزوال الرئيسى Z واعتبرنا نقط هذا المستقيم مساقط أهية لنقط على السطح ثم عينا مساقطها الرأسية فأن هذه المساقط يتألف منها حيثند خط الزوال الرئيسى للسطح .

بشر ١١٧ : بعض الامثلة

من الامثلة التطبيقية المهمة على السطوح اللولية ذوات الراسم المنحنى السطوح التى يكون فيها المنحنى الراسم دائرة . فاذا تحركت الدائرة حركة

لولية حول محور ثابت بحيث كان مستويها في جميع أوضاعه عمودياً على المنحنى اللولبي الذي يرسمه مركز الدائرة أثناء الحركة نشأ ما يسمى بالسطح الماسوري ويمكن تصور نفس هذا السطح متولداً عن تحريك كرة حركة لولية حول المحور . ويطلق على السطح المتولد عن تحريك دائرة حركة لولية حول محور واقع في مستويها (بحيث تكون هذه الدائرة هي خط الزوال للسطح) اسم بريمة سان چيل .

ويجوز أن تكون الحركة اللولية للدائرة حول المحور هي بحيث يكون مستويها دائماً عمودياً على المحور أى بحيث يكون المقطع العمودي للسطح المتولد دائرة فثلاً سطح العמוד الملتوى والمثقاب البريمي يتولدان عن مثل هذه الحركة .

الفصل الثالث

السطوح اللولبية المسطرة

بند ١١٨ : تقسيم

يسمى سطحاً لولبياً سطحاً كل سطح يمكن تولده عن تحرك خط مستقيم (راسم) حركة لولبية حول محور ثابت .

والمستقيم الراسم إما أن يكون قطعاً أو غير قطع للمحور ففي الحالة الأولى ينشأ ما يسمى بالسطح الممروى أو المنقلب وفي الحالة الثانية يكون السطح المتولد سفراً^(١) ويسمى حينئذ المنحنى اللولبي المرسوم على سطح الاسطوانة التي نصف قطرهما يساوى أقصر بعد بين المحور والراسم باللوب الخفي . وتنقسم السطوح المحورية كما تنقسم المفرغة الى عمودية ومائلة على حسب ما اذا كان الراسم عمودياً أو مائلاً على المحور^(٢) .

فالسطوح اللولبية المسطرة يمكن إذن تقسيمها الى أربعة أقسام كما تقدم جميعها سطوح غير قابلة للاستواء أى سطوح معوجة (أنظر بند ١٢٣) ما عدا السطح المماس للمنحنى اللولبي الذي سبق يأنه في (بند ١١٣) فهذا السطح وإن كان يمكن اعتباره أحد السطوح اللولبية المفرغة المائلة إلا أنه حالة خاصة منها إذ يشترط في المستقيم الراسم أثناء حركته أن يكون على الدوام ماساً (وليس فقط قطعاً) للوب الخفي وهذا الشرط هو الذي يجعل هذا السطح وحده قابلاً للاستواء .

(١) أى أنه يمكن تحديد جزء معين من الفراغ (في هذه الحالة أسطوانة) داخل هذا السطح بحيث تكون جميع قطعه أقرب الى المحور من أية نقطة من نقط السطح .

(٢) فالمقصود بقولنا سطح لولبي « عمودي » أو « مائل » هو أن يكون « عمودي الراسم » أو « مائل الراسم » على التوالي .

ويتعين كل واحد من السطوح سالفة الذكر اذا علم المحور والمستقيم الراسم والخطوة الثابتة للمنحنيات اللولية التي ترسمها نقط المستقيم الراسم أثناء الحركة .
وسنقصر بحثنا فيما يلي على السطوح المحورية لاهميتها في التطبيقات العلمية .

بند ١١٩ : بعض خواص السطوح المحورية العمودية

نفرض في (شكل ١١٢) أن المستقيم v (عمودى الاسطوانة) العمودى على المحور $ح ح$ والمتقاطع معه — يتحرك حول هذا المحور حركة لولية فيرسم بذلك سطحاً محورياً عمودياً . فاذا كانت النقطة ١ على المستقيم v ترسم أثناء هذه الحركة المنحنى اللولبي الممين بالشكل والذي خطوته $خ$ فان كل نقطة أخرى من نقط المستقيم ترسم بالمثل منحنياً لولياً خطوته $خ$ أيضاً .

والنقطة $س$ الميئة في (شكل ١١٢) يمكن اعتبارها المسقط الاقوى لعدد لا نهاية له من نقط السطح حيث إن المستقيم المرسوم من $س$ عمودياً على المستوى الاقوى يقابل الراسم أثناء الحركة في عدد لا نهاية له من النقط . وللحصول على المسقط الرأسى $س$ " لاحدى هذه النقط نصل $س$ بـ $ح$ \equiv $ص$ ونفرض أنه يقطع الدائرة المعلومة (وهى المسقط الاقوى للمنحنى اللولبي المعلوم الذى ترسمه النقطة ١) في $ا$ ثم نرسم من $ا$ المستقيم $ص$ " العمودى على المحور (حيث $ص$ " المسقط الرأسى للراسم $ص$) ليقابل خط التناظر المرسوم من $س$ في المسقط الرأسى المطلوب $س$ " وبذا تكون النقطة $س$ واقعة على السطح .

ويتحدد المستوى المماس في أية نقطة من نقط السطح مثل $ا$ بمعلومية الراسم $ص$ المار بها والمماس $ص$ للمنحنى اللولبي الذى ترسمه نفس النقطة أثناء الحركة (١) ولما كان هذا المماس هو مستقيم ذو ميل أعظم في المستوى لذا كانت

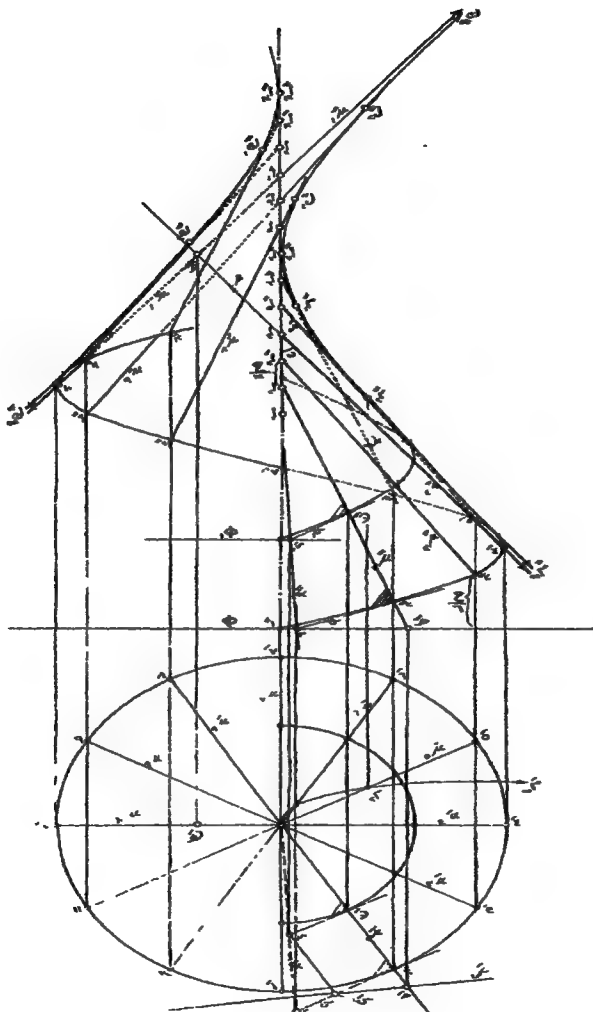
(١) أى أن المستوى المماس لسطح انحورى العمودى في أية نقطة من نقطه هو نفس المستوى الملاصق في هذه النقطة للمنحنى اللولبي الذى ترسمه أ.أ. الحركة .

الزاوية التي تميل بها المستويات المماسية للسطح في جميع ققط منحني لولبي واحد — على المستوى الاقصى (المستوى العمودى على المحور) ثابتة وتساوى

ظا $\frac{1}{2} \frac{X}{\rho}$ حيث ρ هو نصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى اللولبي . ولما كانت X ثابتة للمنحنيات اللولية المختلفة فينتج أنه كلما بعدت النقطة عن المحور أى كلما كبرت ρ كلما صغرت زاوية ميل المستوى المماس للسطح فيها على المستوى الاقصى فثلاً الزاوية التي يميل بها المستوى المماس في ρ على المستوى الاقصى أصغر من التي يميل بها المستوى المماس في ρ (شكل ١١٢) . فإذا كانت $\rho = \infty$ كان المستوى المماس أقبياً ومعنى هذا أن المستويات المماسية للسطح في ققطه التي في اللانهاية وهى التي يطلق عليها اسم المستويات التقريبية — هى مجموعة من المستويات العمودية على المحور .

بدر ١٢٠ : السطوح المحورية المائلة

المعلوم في (شكل ١١٤) المحور والمستقيم MM وهو أحد أوضاع الراسم μ الذى يتحرك متكناً على المحور وصانعاً معه زاوية ثابتة ω (لا تساوى 90°) ومولداً بهذه الحركة اللولية سطحاً محورياً مائلاً . فإذا علم أيضاً المنحنى اللولبي $4321 \dots$ لاحدى فقط الراسم فان هذا المنحنى يمكن اعتباره أحد أدلة السطح (بند ٤٢) التي يلزم الراسم بالاتكاء عليها دواماً (أنظر بند ١٢٢) وتسميته لذلك بالمنحنى اللولبي الدليل وبواسطته تحدد الخطوة الثابتة X للمنحنيات اللولية الأخرى . ولما كانت الزاوية ω السالفة الذكر ثابتة وكان طول الجزء من الراسم المحدد بنقطتي اتكائه على المحور والمنحنى اللولبي الدليل ثابتاً كذلك لنا كان مسقط هذا الجزء على المحور ثابتاً وينتج من ذلك أن الارتفاعات AM ، AM' ، AM'' ، AM''' ... تساوى على التوالى ارتفاعات النقط 3 ، 4 ، 5 ، 6 ... من المنحنى اللولبي الدليل عن



(شکل ۱۱۴)

النقطة ٢ أى أن كلامنا الابعاد $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}$... يساوى $\frac{1}{12}$ غ (لان النقط $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}$... تقسم الدائرة فى الشكل الى ١٢ قسم) .
وبذا يمكن بسهولة تعيين الاوضاع المختلفة $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}$... للرسم .

ولما كان الوضع μ_1 هو أحد أوضاع الراسم الامامية لنا كانت الزاوية المحصورة بين μ_1 والمحور هى المقدار الحقيقى للزاوية ω . فاذا افترضنا السطح معلوماً بهذه الزاوية والمحور والمنحنى اللولبى الدليل كان هذا كافياً أيضاً لتحديد السطح لان المستقيم μ_1 المرسوم فى هذه الحالة من النقطة ϵ " صانعاً مع المحور الزاوية المعلومة ω يكون هو المسقط الرأسى للوضع الامامى μ_1 للرسم .

وبلاحظ أن أى وضعين متتاليين من أوضاع الراسم لا يمكن أن يتقاطعا وهذا هو الذى يجعل إمكان بسط السطح على مستو مستقيماً كما سيأتى بيانه ^(١) .

ويتضح من (شكل ١١٤) أن امتداد الراسم الى الجهة الاخرى بعد تقاطعه مع المحور يولد أثناء الحركة طية أخرى من السطح (طية عليا) تشترك مع الطية الاولى فى المحور وفى عدد لا نهاية له من المنحنيات اللولية لانه اذا افترضنا أى وضعين من أوضاع الراسم موجودين فى مستو واحد مار بالمحور (مستوى زوال) كالوضعين μ_1, μ_2 . وفرضنا أن امتداد μ_1 للجهة الاخرى من المحور — وهو الامتداد الذى يولد بحركته الطية العليا للسطح — يقطع μ_2 فى النقطة هـ فان هـ تكون نقطة مشتركة بين الطيتين وترسم أثناء الحركة منحنياً لولياً هو أحد منحنيات تقاطع الطيتين وتكون نقط تقاطع امتداد الراسم μ_1

(١) قارن هذه الخاصية بنظيرتها للسطح اللولبى القابل للاستواء فى (بند ١١٣) حيث كل راسمين متتاليين يتقاطعان فى نقطة على اللولب الحلقى .

نفسه مع الرواسم $\mu\mu$ $\mu\mu$ $\mu\mu$ $\mu\mu$... نقطة جديدة كالنقطة ه تولد منحنيات لولية أخرى مشتركة بين الطيتين .

وإذا كانت ه إحدى نقط السطح فالمستوى المماس لـ فيها يتعين بمعلومية الراسم $\mu\mu$ المار بها والمماس ه للنحنى اللولى الذى ترسمه هذه النقطة أثناء الحركة . وكذلك يتعين المستوى المماس لـ للسطح فى نقطة أخرى على الراسم $\mu\mu$ مثل النقطة ٢ بالراسم $\mu\mu$ نفسه وبالمماس ه للنحنى اللولى الذى ترسمه النقطة ٢ أثناء الحركة . ومن الواضح أن المستوى لـ لا يمكن أن ينطبق فى هذه الحالة على المستوى لـ لان المماسين ه ه هما كما يتضح من الشكل مستقيمان غير متقاطعين ولما كان هذا صحيحاً لاي مستويين مماسين فى نقطتين على راسم واحد إذ هما دائماً مستويان مختلفان ولا يشتركان الا فى الراسم الواقعة عليه النقطتان لذا فانه يمكننا القول إنه إذا تحركت نقطة على راسم السطح فانه المستوى المماس لـ فيها يرد حول هذا الراسم ^(١) .

ويلاحظ أنه إذا كانت م نقطة تقاطع المماس ه مع المستوى لـ وكانت م نقطة تقاطع ه مع المستوى لـ وفرضنا أن م م م م ... هى نقط تقاطع م م م م ... مع المستويات م م م م ... على التوالي (حيث م م م م ... هى المماسات للمنحنيات اللولية المختلفة فى نقط تقاطعها مع الراسم $\mu\mu$ وحيث م م م م م م ... هى المستويات الاقمية المارة بنقط الابتداء لتلك المنحنيات) فان م م م م م م م م م م ... تقع جميعاً على مستقيم واحد « متقاطع مع المحور أى أن النقط م م م م م م م م م م ... (حيث ح ' المسقط

(١) قارن هذه الخاصية فى حالة السطوح المعوجة بما يقابلها فى السطوح انماثلة للاستواء كالسطح المبين فى (بند ١١٣) حيث يبقى المستوى المماس ثابتاً إذا تحركت النقطة على الراسم .

الاقصى للمحور) تكون على استقامة واحدة ^(١) وذلك لان

$$\frac{\frac{٢ ط م' ١}{١٢}}{\frac{١ م' ١}{١ م'}} = \frac{\frac{٢ ط م' ١}{١٢}}{\frac{٢ م' ١}{٢ م'}} = \frac{٢ م' ١}{٢ م'}$$

حيث س' م' م' ١ هما نصف قطرى المتخمين اللولين المارين بالنقطتين ٢ م' ١ على التوالي .

وتتضح مما تقدم أن أى مستو مار براسم ما لا بد أن يمس السطح في نقطة معينة يمكن تعيينها بواسطة نظرية شالز (أنظر بندى ١٣٠ و ١٣٢) وأيضاً بالطريقة الآتية :-

لنفرض أن المستقيم ح' س' (شكل ١١٤) هو أثر مستو ما مثل P مار بالراسم م' على المستوى (حيث ح' هو أثر الراسم) فإذا كانت س' هى نقطة تقاطع هذا الاثر مع المسقط الاقصى س' للمماس أحد المتخنيات اللولية للسطح في نقطة تقاطعه مع الراسم م' ورسم من س' موازياً الى م' ليقطع المستقيم α = ح' س' (حيث ح' المسقط الاقصى للمحور وحيث س' أثر المماس س' على المستوى) في س' فإن المستقيم المرسوم من س' موازياً الى س' يقابل م' في المسقط الاقصى م' لنقطة تماس المستوى P مع السطح (وتتضح صحة هذه الطريقة مباشرة مما سبق لنا ذكره من أن النقط س' م' س' م' س' ... س' ح' على استقامة واحدة) .

(١) ويتج من ذلك أنه لما كانت المماسات س' م' س' م' س' ... السالفة الذكر تكيه دائماً على مستقيمين غير متقاطعين هما م' س' α وتوازي جميعاً في الوقت نفسه مستوياً ثابتاً هو المستوى المار بأى واحد من هذه المماسات عمودياً على المستوى الاقصى — فإن هذه المماسات تولد سطحاً يسمى بالسطح المكافئ الزائدى (بند ١٣٥) يمس السطح اللولى بطول الراسم م' .

(١) المحيط الظاهري للطية السفلى ويتكوّن من مجموعة المنحنيات :

١ "٢" ٣ "٤" ٥ "٦" ٧ "٨" ٩ "١٠" ...

(ب) المحيط الظاهري للاطية العليا المتولدة عن حركة امتداد الرأس بعد تقاطع مع المحور وقد اقتصرنا في الشكل على رسم المنحنى $١, ٢, ٣, ٤$ الذي يكون جزءاً من هذا المحيط .

وبلاحظ أن هذه المنحنيات كلها تمس المحور باعتبارها المسقط الرأسى المشترك للرواسم $\rho_{1\mu}, \rho_{7\mu}, \rho_{13\mu}, \dots$ فى النقط $\rho_{1\mu}, \rho_{7\mu}, \rho_{13\mu}, \dots$ وأن المساط الرأسية $\rho_{1\mu}, \rho_{7\mu}, \rho_{13\mu}, \dots$ للاوضاع الامامية للرأسى هى خطوط تقربة لهذه المنحنيات .

(١) والمحيط الظاهري Σ أيضاً بمقتضى النظرية المشار إليها — المنحنيات اللولبية الميئة بالشكل وتكون نقط التماس هي الحدود الفاصلة بين الاجزاء المضغوطة وغير المضغوطة من هذه المنحنيات. ولاحظ أن الجزء γ "٨" "٩" ... (الى نقطة التماس مع المنحنى ك_١ "ك" "ك" ∞) من المنحنى اللولبي γ "٢" ... إنما فرضناه ظاهر الاثنا اعتبرنا السطح منتهي بهذا المنحنى .

بند ١٢١ : المقاطع المستوية ومغنيات التقاطع للسطوح المحورية

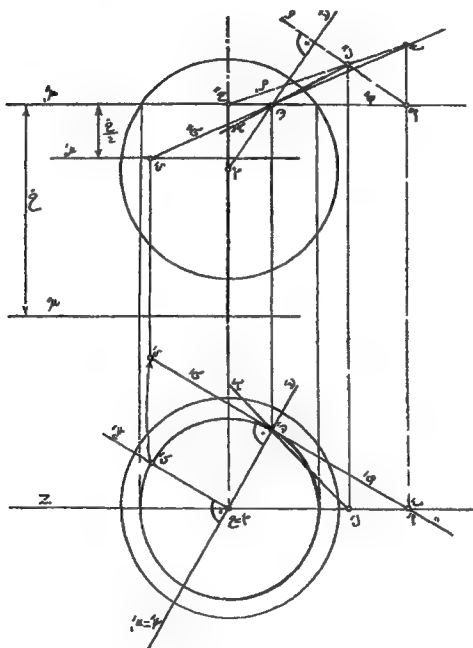
يتألف خط الزوال في حالة السطوح اللولبية المحورية من مجموعة من الخطوط المستقيمة وهي أوضاع الراسم الواقعة في مستوى الزوال المعلوم .
أما المقطع العمودي (أى منحنى تقاطع السطح مع مستو عمودى على المحور) فهو في حالة السطح العمودى (بند ١١٩) نفس المستقيم الراسم الواقع في مستوى المقطع أما في حالة السطح المائل (شكل ١١٤) فيمكن البرهنة بسهولة على أنه منحنى حلزوى .

ويمكن الحصول على منحنى تقاطع أى سطح لولبي مسطر مع مستو ما بتعيين نقط تقاطع الاوضاع المختلفة للراسم مع المستوى القاطع . ويكون المماس لمنحنى التقاطع في إحدى نقطه هو كما تقدم خط تقاطع المستوى المماس للسطح فيها مع المستوى القاطع .

كذلك لرسم منحنى تقاطع سطح لولبي مسطر مع سطح آخر ^(١) نجد نقط تقاطع الاوضاع المختلفة لراسم السطح اللولبي مع السطح الآخر . مثال ذلك لنفرض في (شكل ١١٥) أنه يراد رسم منحنى تقاطع الكرة المبينة والى مركزها م مع السطح اللولبي العمودى المعلوم بالمحور ع ع والراسم ($\mu \mu'$) والخطوة خ . فالوضع الجديد μ للراسم بعد دورة مقدارها 180° مثلاً يمكن الحصول عليه برسم المستقيم μ'' موازياً الى μ وعلى بعد منه مساو للخطوة المعلومه خ فيكون $\mu'' \equiv \mu'$ هما المستيطان الرأسى والافقى للراسم μ . فاذا كانت ω إحدى نقطتى تقاطع μ مع الكرة فانها تكون إحدى نقط

(١) اذا اشترك سطح محورى مع اسطوانة دورانية كان خط تقاطع كل طية من طيات السطح المحورى مع الاسطوانة منحنياً لولبياً .

منحنى التقاطع المطلوب . ولرسم المماس τ لهذا المنحنى في النقطة σ نعين المستويين للماسين Σ_1, Σ_2 للسطح اللولبي والكرة في هذه النقطة فيكون τ



(شكل ١١٥)

هو خط تقاطعها . فقي (شكل ١١٥) المستقيم σ' هو المماس في σ' للدائري التي مركزها σ' ونصف قطرها σ' (والتي هي المسقط الاكبر لـ σ' المنحنى اللولبي الذي ترسمه النقطة σ') .

فإذا قسنا على 'ه' البعد 'مر' مساويا الى طول القوس 'س' مثلا ($\frac{1}{4} =$ المحيط) ثم رسمنا من 'مر' خط التناظر لقطع المستقيم 'م' المرسوم موازيا الى 'م' وأوطى منه بمقدار $\frac{1}{4}$ (وهو الارتفاع المناظر الى $\frac{1}{4}$ المحيط) في 'مر' ووصلنا 'ه' \equiv 'مر' 'ه' كان 'ه' 'س' هما المسقطان الاقنى والرأسي للمماس المنحنى اللولبي الذى ترسمه النقطة 'ه' فى 'ه' ذاتها وتعين حينئذ المستوى المماس 'م' بالمستقيمين 'ه' 'م'. أما المستوى المماس 'م' للكرة فى النقطة 'ه' فهو المستوى المار بهذه النقطة عمودياً على نصف القطر 'م' هـ . فإذا فرضنا أن 'م' هـ هما خطا تقاطع 'م' 'م' مع مستوى الزوال الرئيسى 'Z' وكانت 'ل' نقطة تلاقي 'م' 'هـ' كان المستقيم 'ل' هو خط تقاطع المستويين 'م' 'م' أى المماس المطلوب .

من الامثلة التطبيقية الهامة على السطوح اللولية المسطرة — البريمتان المثلثية والمستطيلة . فالبريمة المثلثية تنشأ عن تحرك مثلث متساوى 'ساقين' أو متساوى الاضلاع (حركة لولية حول محور فى مستويه بحيث تكون قاعدة المثلث موازية للمحور وأقرب اليه من رأسه وبحيث تكون خُمُوءة الحركة مساوية لتحول القاعدة . فالجسم المتولد عن هذه الحركة يتكون حينئذ من اسطوانته وسطحين لولبيين محوريين مائلين . أما البريمة المستطيلة فخط زوالها مستطيل (أو مربع) ضلعان من أضلاعه موازيان للمحور (الواقع فى مستوى المستطيل) وبه لدان بذلك اسطوانتين متحدثى المحور والضلعان الآخران عموديان على المحور ويولد كل منهما سطحاً لولياً محورياً عمودياً .

الباب السادس

السطوح المسطحة

الفصل الاول

تعريف ومبادئ اساسية

بند ١٢٢ : تعريف

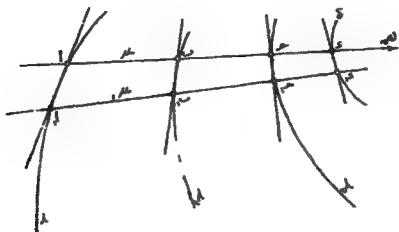
يطلق اسم سطح مسطح على كل سطح يمكن اعتباره متولداً عن حركة خط مستقيم (راسم).

والقانون العام لحركة الراسم يعطى عادة على صورة ثلاثة خطوط (أو سطوح) ثابتة يلزم الراسم دوماً بالاتكاه عليها (شكل ١١٦) ويسمى كل خط من هذه الخطوط التي يجوز أن تكون منحنيات مستوية أو فراغية أو خطوطاً مستقيمة — بالربيل (بند ٤٥).

فإذا علمت الادلة الثلاثة α, β, γ وأريد الحصول على راسم مثل μ نختار على أحد الادلة وليكن β نقطة مثل α ونعتبرها رأساً مشتركاً لمخروطين أحدهما دليله β والآخر دليله α فهذان المخروطان يتقاطعان في عدة مستقيمت يصلح أى واحد منها أن يكون الراسم μ للسطح لانه يقطع (أو يتكىه على) جميع الادلة الثلاثة المعلومة.

وإذا مد من أية نقطة في الفراغ مستقيمت موازية لرواسم سطح مسطح فالمخروط العام الناشئ يطلق عليه اسم مخروط التوجيه وهو متلا في حالة السطح اللولبي المائل مخروط دائرى قائم. وإذا كانت رواسم السطح موازية جميعاً لمستو

واحد (كما هو الحال في السطح اللولبي العمودي مثلا) فان هذا المخروط يؤول الى مستو يطلق عليه اسم مستوى التوجيه .



(شكل ١١٦)

ولنأخذ الآن السطوح اللولبية المذكورة في (بند ١١٨) كشال على السطوح المسطرة فنشرح فيما يلي الادلة الثلاثة لكل منها .
فالسطح المحورى العمودى أدلته هي :

اولا - المحور

ثانياً - المستقيم الذى فى اللانهاية الذى يحدده وضع أى مستو عمودى على المحور (مستوى التوجيه)

ثالثاً - أى منحنى لولبى يؤخذ حينما اتفق باعتباره مسارا لاحدى نقط الراسم .

والسطح المحورى المائل أدلته هي :

اولا - المحور

ثانياً - منحنى تقاطع مخروط التوجيه مع المستوى الذى فى اللانهاية (وهذا

المنحنى هو مقطع مخروطى فى اللانهاية) .

ثالثاً - أى منحنى لولبى يؤخذ حينما تفق باعتباره مسارا لاحدى نقط

الراسم .

وفي حالة السطوح اللولبية المفرغة (حيث يكون الراسم غير متقاطع مع المحور) تحل الاسطوانة المرسوم عليها اللولب الحلقي محل المحور ويلزم الراسم بان يمس دوماً هذه الاسطوانة متكئاً على اللولب الحلقي الذي يمكن اعتباره في هذه الحالة أحد أدلة السطح المفرغ أما الليلان الباقيان فتلهمما في حالة السطوح المحورية . وفي حالة السطح اللولبي القابل للاستواء (بند ١١٣) وهو أحد السطوح المفرغة المائلة كما قدمنا — لا يتكئ الراسم على اللولب الحلقي فقط وإنما يمس أيضاً في نقط التقاطع .

وإذا اخترنا ثلاثة مستقيمت من مجموعة واحدة مثل $\rho_{1,2}$ $\rho_{2,3}$ $\rho_{3,4}$ على سطح زائدى دوراني (بند ١٠٥) واقترضنا ثبوتها فانه يمكن اعتبارها أدلة ثلاثة لهذا السطح كما يمكن اعتبار السطح حيقئ متولداً عن حركة الراسم μ (من المجموعة الاخرى) بحيث يتكئ دوماً على هذه الادلة الثلاثة .

بند ١٢٣ : تقسيم السطوح المسطرة الى قابلة للاستواء ومعوجة

تقسم السطوح المسطرة كما قدمنا في (بند ٤٥) الى قسمين رئيسيين :—
(١) سطوح قابلة للاستواء مثل السطح اللولبي الممين في (بند ١١٣) والسطح المخروطي والسطح الاسطوانى الخ .

(٢) سطوح مسطرة معوجة (غير قابلة للاستواء) مثل السطوح اللولبية المذكورة في (بند ١١٨) ومثل السطح الزائدى الدوراني ذو الطية الخ .

ويمكن تركيز الفرق بين هذين القسمين فيما يأتى :

اولا — أى وضعين متتاليين للراسم في السطوح القابلة للاستواء هما مستقيمان متقاطعان (يمر بهما مستو واحد) بينما هما غير متقاطعين في السطوح المعوجة .

وتنقسم السطوح المسطرة كذلك الى جبرية وغير جبرية على حسب ما اذا كانت الادلة منحنيات جبرية أو غير جبرية ويمكن البرهنة تحليلياً على أنه اذا كانت الادلة الثلاثة لسطح مسطر هي منحنيات جبرية من الدرجات $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$ أي أن كل مستقيم في الفراغ يقطعه في هذا العدد من النقط (حقيقة أو تخيلية) كما يمكن البرهنة على أن رتبة السطح الجبرى المسطر تساوى دائماً درجته أى أن عدد المستويات المماسه للسطح والمارة بكل مستقيم في الفراغ هو في الحالة السابقة $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100)$ أيضاً (حقيقة أو تخيلة) .

وأهم السطوح الجبرية المسطرة هي تلك التي من الدرجة (واثنية)
ففي هذه الحالة تكون أظلة كل منها ثلاثة مستقيمت غير متقاطعة (المستقيم هو منحني
من الدرجة الأولى) .

الفصل الثانى

السطوح القابلة للاستواء

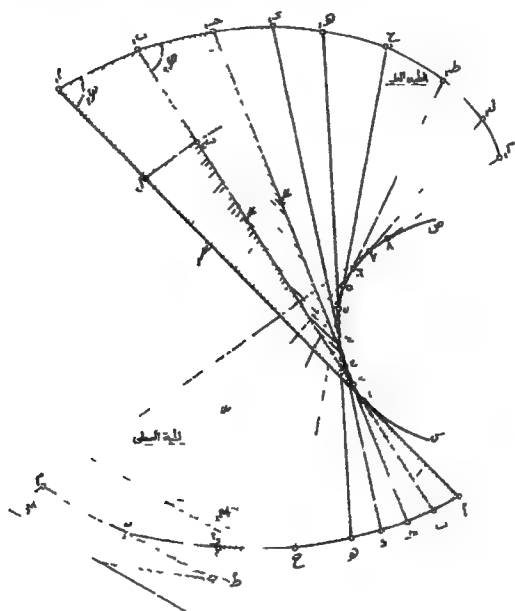
بئر ١٢٤ : تعاريف

يسمى سطحاً قابلاً للاستواء كل سطح (مسطر) يمكن بسطه أو تطبيقه أو تسويته على مستو بدون كسر أو شد. فمثلاً إذا لففنا (بدون ثنى أو كسر) مستوياً على هيئة سطح حيثما اتفق كان هذا السطح قابلاً للاستواء. وقد ذكرنا فيما تقدم (بند ٤٥) أن كل سطح مسطر فيه كل وضعين متتالين من أوضاع الراسم هما مستقيمان متقاطعان — يكون قابلاً للاستواء وبنين الآن كيف يكون بسط مثل هذا السطح ممكناً وكذا بعض خواصه الأساسية.

بئر ١٢٥ : صنع المربع

لنفرض في (شكل ١١٧) أن s من s منحن فراغى حيثما اتفق وأن $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ هي مماسات هذا المنحنى في نقطه المتتالية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... فالسطح المتولد عن هذه المماسات المتتالية هو سطح قابل للاستواء لأن كل مماسين متتالين يتقاطعان حيثئذ في نقطة التماس على المنحنى الفراغى ويحصران بينهما لذلك عنصراً مستوياً مثل ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ... وكل عنصرين متجاورين من هذه العناصر يتقاطعان في المماس المشترك بينهما للمنحنى s من s بحيث يمكن تطبيق أحدهما على الآخر حول هذا المماس. فإذا طبقنا في الشكل العنصر المستوى ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١ على المستوى المجاور ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١ حول المماس ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١ ثم طبقنا المستوى الأخير على المستوى

ح ح_١ و ح_٢ حول ح ح_١ وهكذا لأمكن في النهاية بسط السطح كله على مستو واحد بدون كسر أو شذ أو تمزق وبحيث تتوافر الشروط الآتية :—



(شكل ١١٧)

أولاً : "رؤس" والمنحنيات الواقعة على "سطح" نبني أصولها وأبعادها محفوظة ولا تتغير يبسط "سطح".

ثانياً : إذا كان $ح_١$ ح_٢ ... منحنيًا حينًا اتفزع على "سطح" (حيث $ح_١$ $ح_٢$... هي نقاط تقاطع هذا المنحني مع "رؤس" أمثاله " $ح_١$ " $ح_٢$ " ...)

وكانت φ هي الزاوية المحصورة بين الراس μ وملتس المنحنى في α أى الزاوية α ، وبالمثل φ هي الزاوية المحصورة بين الراس μ وملتس المنحنى في β ... الخ فالزوايا $\varphi, \varphi, \varphi, \varphi, \varphi$... تبقى كذلك محفوظة ولا تتغير ببسط السطح .

ثالثاً : أما الزوايا المحصورة بين كل اثنين من المماسات المتجاورة لاي منحن مرسوم على السطح (غير المنحنى s من s نفسه) أى الزوايا $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$... فانها تتغير ببسط السطح . ومعنى هذا أن نصف قطر الانحناء لاي منحن مرسوم على السطح (ماعدا المنحنى s من s) في إحدى نقطه يختلف عن نصف قطر الانحناء لآل هذا المنحنى في النقطة المناظرة (والمقصود بمآل المنحنى α, β, γ ... مثلاً هو المنحنى α, β, γ ... الذى يرؤل اليه المنحنى الاصلى بعد بسط السطح على مستوما) وسنبرهن في (بند ١٢٨) على أن هناك علاقة تربط نصفى قطرى الانحناء في هذه الحالة .

يؤخذ مما تقدم أنه السطح الذى يتولد عن مركز المماس لمنحن فراغى ^(١) ميمما نفسه يكون سطحاً قابلاً للمستواء .

وبالعكس لما كان كل سطح مسطح قابلاً للمستواء لا بد أن يتكوّن من مثل العناصر المستوية المشار اليها آنفاً فان رواسم هذا السطح يجب أن تغلف منحنياً فراغياً يسمى ضلع الرجوع أو حرف الرجوع ^(٢) للسطح (المنحنى s من s هو ضلع الرجوع في شكل ١١٧) . وهذا معناه أن الشرط اللازم والكافى لقابلية

(١) اذا كان المنحنى مستوياً فالسطح الناتج يكون نفس المستوى المرسوم فيه المنحنى .

(٢) سمى كذلك لان منحنى تقاطع السطح مع أى مستوي يلاقى ضلع الرجوع في نقطة مثل s — يكون دائماً منحنياً فيه القطة s نقطة رجوع .

سطح مسطر للاستواء هو تقاطع الاوضاع المتتالية لراسمه مثنى مثنى في ققط منحن فراغى (ضلع الرجوع) بحيث يمكن اعتبار السطح المقابل لمستواء دائما انه سطح مماس لمنحن فراغى هو ضلع الرجوع لهذا السطح .

ويجب أن يلاحظ أنه ولو أن كل سطح قابل للاستواء له ضلع رجوع هو كما قدمنا غلاف الاوضاع المتتالية لراسم السطح إلا أنه ككل سطح آخر يمكن أن يتولد بعدة طرق غير الطريقة المذكورة آنفا وهي تحرك المماس لمنحن فراغى . فمثلا لو اعتبرنا المنحنيين الفراغيين α و β ... μ ، α ب γ ، β ح δ ... كدليلين ثابتين للسطح (شكل ١١٧) وجعلنا النقطة α رأسا لمخروط دليله المنحنى α ب γ ، β ح δ ... وكان μ راسم تماس هذا المخروط مع المستوى المماس (للمخروط) الذى يمر بالمستقيم α ب (أى المماس للمنحنى α ب ح ... فى α) وكان أيضا μ راسم تماس المخروط الذى رأسه β ودليله β ح δ ... مع المستوى المماس الذى يمر بالمستقيم β ح (أى المماس للمنحنى β ح ... فى β) فن الواضح أن μ لا بد أن يكونا مستقيمين متقاطعين ويكون السطح إذن الذى يتولد عن الرواسم μ ، μ ، μ ، μ ، μ ، μ ... سطحا قابلا للاستواء .

بند ١٢٦ : السطح المقابل لمستواء كمنوف منفرج

يؤخذ من (شكل ١١٧) ان المستوى المماس للسطح فى إحدى نقطه يمس بطول الراسم المار بالنقطة . وذلك لان المستوى المماس فى النقطة α مثلا الواقعة على الراسم μ يتعين بهذا الراسم وبالمماس α ب γ فى α لمنحن حيثما اتفق مرسوم على السطح ومار بالنقطة α ولكن لما كانت α ب γ نقطتين متتاليتين من ققط المنحنى المذكور وجب أن يكون المستقيم α ب γ (الذى هو لذلك نفس المماس فى α) واقعا بتمامه فى المستوى المار بالراسمين المتتاليين μ ، μ . فهذا المستوى هو إذن نفس المستوى المماس للسطح فى النقطة α وكذا فى أية نقطة أخرى على الراسم μ أى أنه يمس السطح بطول الراسم μ . ومن حيث إن μ ، μ ، μ ، μ ، μ ، μ هما أيضا تماسان متتاليان لضلع الرجوع α ب γ ح δ ... ومتقاطعان

في النقطة « ١ »، لذلك كان المستوى المار بها هو في نفس الوقت المستوى الملاصق لصلع الرجوع في النقطة « ١ ».

وإذا رسمنا منحنيًا M على سطح منحن حيثما اتفق مثل السطح S وعينا المستويات المماس للسطح في نقط متجاورة على المنحنى M فن الواضح أنه إذا قطع أحد هذه المستويات المستويين السابق واللاحق لمنحني المستقيمين M_1, M_2 كان هذان المستقيمان متقاطعين. فلذا فرضنا أن نقط التماس على المنحنى M اقتربت قريبا لانهايتي بعضها من بعض بحيث يمكن اعتبارها نقطًا متتالية على المنحنى فانه يمكن اعتبار المستقيمتين M_1, M_2 ... أوضاعًا متتالية لرسم سطح جديد لا بد أن يكون قابلاً للاستواء ويقال عندئذ إن المستوى المماس ينزل على المنحنى M بحيث يكونه ماساً للسطح S في جميع أوضاعه فيغلف بهذه الحركة سطحاً قابلاً للاستواء.

بند ١٢٧ : تمهيد

يؤخذ مما تقدم :

أولاً — الشرط اللازم والكافي لقابلية سطح مسطر للاستواء هو تقاطع الأوضاع المتتالية لرسم السطح مثنى مثنى في نقط منحن فراغى يسمى صلع الرجوع للسطح. المخروط والاسطوانة هما حالتان خاصتان حيث تمر أوضاع الراسم جميعاً بنقطة واحدة على بعد نهائى في الحالة الأولى ولانهايتى في الحالة الثانية ويمكن اعتبار هذه النقطة نفسها صلع الرجوع لكل من السطحين.

ثانياً — إذا بسطنا سطحاً قابلاً للاستواء فان أطوال الرواسم والمنحنيات على السطح لا تتغير بهذه العملية. وكذلك تبقى مقادير الزوايا المحصورة بين الرواسم وأى منحن على السطح في نقط التقاطع ومقادير الزوايا المحصورة بين أى راسمين متتالين — محفوظة. وعندما يتم بسط السطح على مستو تقول

الرواسم الى تماسات لمنحن مستو هو مآل ضلع الرجوع وبالنظر الى أن الزاوية المحصورة بين أى راسمين متالين لا تتغير بالسط كما قدمنا أى أنها تساوى الزاوية المحصورة بين مآليهما (اللذين هما تماسان متالين لمآل ضلع الرجوع) فينتج من ذلك أن الانحناء الاول ^(١) لضلع الرجوع يبقى كذلك ثابتاً ولا يتغير بيسط السطح فنصف قطر الانحناء فى أية نقطة على مآل ضلع الرجوع يساوى نصف قطر الانحناء فى النقطة المناظرة على ضلع الرجوع نفسه .

ثالثاً — أما أى منحن آخر على السطح غير ضلع الرجوع فانه يؤول بعد البسط الى منحن مستو (قد يكون خطاً مستقيماً) يكون انحناؤه فى أية نقطة من نقطه مغايراً للانحناء الاول للمنحنى الاصلى فى النقطة المناظرة .

رابعاً — كل سطح قابل للاستواء له ضلع رجوع بحيث يمكن اعتباره (أى السطح) دائماً سطحاً تماساً لضلع الرجوع فرواسم السطح ومستوياته المماسية هى على التوالي تماسات لضلع الرجوع ومستوياته الملاصقة فى نقطه المختلفة .

خامساً — السطح القابل للاستواء هو — وكثيراً ما يعبر هذا تعريفاً — عنوف مستو يتحرك بدرجة واحدة من درجات الوطوء أى يتحرك بحيث يكون له وضع معين عند كل نقطة يمر بها من نقط الفراغ ^(٢) . مثال ذلك المستوى الملاصق لمنحن

(١) أما الانحناء الثانى الذى يرتبط بالزاوية الزوجية المحصورة بين المستويين الملاصقين فى نقطتين متاليتين (بند ٣٧) فهذا يؤول دائماً الى الصفر .

(٢) يتحرك المستوى فى الفراغ بثلاث درجات من درجات الاطلاق . فلكى يتحدد وضع مستو ما يجب أن نقتد ، حركته بثلاثة قيود (أو شروط) مختلفة كأن يتطلب منه أن يمر بثلاث نقط أو يمر بثلاث سطوح منحنية (غير قابلة للاستواء) أو يمر بنقطتين ويمس أحد هذه السطوح الى آخره . فإذا كانت حركة المستوى مقيدة بقيد واحد كأن يتطلب منه أن يمر بنقطة واحدة فى الفراغ أو أن يمر سطحاً واحداً (ويلاحظ أن هذا السطح يجب أن يكون غير قابل للاستواء لانه اذا اشتراطنا أن يمر المستوى سطحاً قابلاً للاستواء فلما كان التماس يتم فى هذه الحالة بطول مستقيم راسم كان معنى هذا الشرط كما يؤخذ من التعريف هو تقييد حركة المستوى بقيدين لا بقيد واحد — فانه يبقى له فى هذه الحالة درجتان من درجات الاطلاق يتحرك بهما . أما اذا تقيدت الحركة بقيدين فان المستوى يتحرك عندئذ بدرجة واحدة من درجات الاطلاق .

فراغى في نقطه المختلفه وكذا المستوى المماس لمنحن فراغى بحيث يكون ذا ميل معلوم على مستو ثابت (انظر مثلا شكل ١٤٧) وكذا المستوى العمودى على منحن فراغى (أى المرسوم من نقطه المختلفه عمودياً على مماساته في هذه النقط) أو المستوى الذى يمس سطحاً منحنياً حيثما اتفق في نقط منحن مرسوم على السطح وكذا المستوى المماس المشترك لسطحين منحنيين σ, σ' (غير قابلين للاستواء) الى آخره . ففى كل حالة من الحالات السابقة يتحرك المستوى بدرجة واحدة من درجات الاطلاق ويغلف بهذه الحركة سطحاً قابلاً للاستواء ويطلق على السطح في الحالة الاخيرة اسم السطح القابل لمستواء المشترك للسطحين المنحنيين σ, σ' .

بند ١٢٨ : قانونه كاسمونه

اذا رمزنا الى نصف قطر الانحناء لمنحن مرسوم على سطح قابل للاستواء في نقطة مثل L بالرمز ρ ، والى نصف قطر الانحناء لـ M هذا المنحنى بعد بسط السطح في النقطة L بالرمز ρ' ، ورمزنا الى الزاوية الزوجية التى يصنعها المستوى الملاصق Σ للمنحنى مع المستوى المماس M للسطح في النقطة L بالرمز ω فان

$$\rho' = \rho \sin \omega$$

ولابيات ذلك نفرض ثلاث نقط متجاورة مثل M, L, ρ على المنحنى ρ حـ ... المرسوم على سطح قابل للاستواء (شكل ١١٧) ونفرض أن المستوى المماس M للسطح عند النقطة ρ والمجاور للمستوى المماس M عند النقطة L — نفرض أن هذا المستوى M قد دار حول الراس ρ الى أن انطبق على المستوى M فالنقطة ρ تقول بعد التطبيق الى نقطة مثل ρ' يمكن اعتبارها (لصغر القوس ρ) بالتقريب المسقط العمودى للنقطة ρ على

المستوى M . ويؤخذ من هذا أن ρ ρ هما نصف قطرى الدائرتين اللتين تمر أولاهما بالنقط الثلاث المتجاورة ρ ρ ρ وتمر الثانية بالنقط ρ ρ ρ . ولما كانت النقط الأخيرة هي المساقط العمودية للنقط ρ ρ ρ على المستوى M كان ρ ρ بناء على نظرية بلاقيس (بند ٣٩) مرتبطين بالعلاقة

$$\rho = \frac{\rho \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

حيث ω هي الزاوية المشار إليها آنفا (لان مستوى الإسقاط في هذه الحالة هو نفس المستوى المماس M) وحيث α هي زاوية ميل المماس في ρ للمنحنى ρ ρ ... على المستوى M ففي هذه الحالة $\alpha = 0$ صفرأ وإذن $\cos \alpha = 1$ فبالتعويض ينتج أن

$$\rho = \frac{\rho}{\sin \omega}$$

وهذه هي العلاقة المعروفة باسم قانون كاتلان ^(١) .

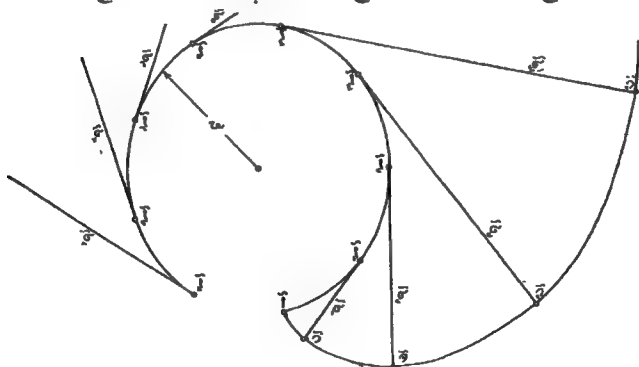
فإذا كانت $\omega = 0$ صفر كان $\rho = \rho$ وهذا لا يحدث الا في نقط ضلع المرجع . وإذا كانت $\omega = 90^\circ$ فإن $\rho = \infty$ ومعنى ذلك أن النقطة المناظرة على مآل المنحنى بعد بسط السطح تكون في هذه الحالة نقطة انقلاب على هذا المآل . فإذا كان هذا صحيحا لجميع نقط منحن مرسوم على سطح قابل للاستواء أى اذا كان المستوى المماس في كل نقطة من هذه النقط عموديا على المستوى المماس للسطح فيها كان مآل هذا المنحنى خطاً مستقيماً وسمى المنحنى كما قدمنا نمياً مقتررو على السطح (مثل المنحنى اللولبي على سطح اسطوانة دورانية) .

بند ١٢٩ : بسط السطوح القابلة لهبوط

نفرض أن المطلوب بسط السطح اللولبي القابل للاستواء (بند ١١٣ شكل ١١٢) على مستوى الورقة فضلع الرجوع لهذا السطح وهو المنحنى اللولبي ١ ١ ١ ١ ... يؤول بعد البسط الى دائرة نصف قطرها

$$\frac{r}{\alpha} = r' = r''$$

(حيث r' هو نصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها ضلع الرجوع) وحيث $\alpha = \frac{2\pi}{\theta}$ (ظا ١) وذلك لان انحناء ضلع الرجوع لا يتغير ببسط السطح كما قدمنا ولما كان هذا الضلع هو منحنى لولبي ثابت الانحناء في جميع نقطه



(شكل ١١٨)

حيث نصف قطر الانحناء في أية نقطة من هذه النقط هو $r' = \frac{r}{\alpha}$

(بند ١١٢) فان ما ل ضلع الرجوع يكون منحنيًا مستويًا ثابت الانحناء كذلك

في جميع قطعه أى دائرة نصف قطرها ρ . فإذا رسمنا هذه الدائرة في (شكل ١١٨) وافترضنا عليها نقطة حيثما اتفق $\tilde{\alpha}$ واعتبرناها مال النقطة α في (شكل ١١٢) فإنه للحصول على المال $\tilde{\alpha}$ للنقطة α يجب أن يكون طول القوس $\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}$ في (شكل ١١٨) مساويا لطول جزء المنحنى اللولبي المحدد بالنقطتين α و α في (شكل ١١٢) أى أن

$$\text{القوس } \tilde{\alpha}\tilde{\alpha} = \frac{\text{القوس } \alpha\alpha'}{\alpha} = \text{هـ} \cdot \text{هـ}'$$

حيث $\text{هـ} \cdot \text{هـ}'$ في (شكل ١١٢) هو الطول الحقيقي للجزء المحصور بين النقطة α والمستوى Φ من المماس $\alpha\alpha'$ للمنحنى اللولبي ويتبين صحة هذا بسهولة من المثلث $\text{هـ} \cdot \alpha \cdot \text{هـ}'$ الذى فيه $\alpha \cdot \text{هـ}' = \text{القوس } \alpha\alpha'$.

وبالمثل يمكن تعيين المالا $\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3 \dots \tilde{\alpha}_n$ في (شكل ١١٨) لنقط المنحنى اللولبي في خطوة واحدة . ويلاحظ أن $\tilde{\alpha}_1$ لا تنطبق على $\tilde{\alpha}$ لأن محيط الدائرة في (شكل ١١٨) هو $2\pi\rho = \frac{2\pi\rho}{\alpha}$ بينما طول القوس

$$\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_n \text{ يجب أن يساوى فقط } \frac{\text{القوس } \alpha\alpha'}{\alpha} \text{ أى يساوى } \frac{2\pi\rho}{\alpha} \text{ (راجع شكل ١١٢).}$$

والمماسات $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_4, \dots$ للدائرة في النقط $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \dots$ (شكل ١١٨) هى مالاات رؤاس السطح : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ (شكل ١١٢). فإذا أريد رسم المال $\tilde{\alpha}$ في $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \dots$ للمنحنى $\alpha\alpha'$ الذى هو المقطع العمودى للسطح بالمستوى Φ في (شكل ١١٢) وجب أن يكون الطول

\tilde{A}_1 في (شكل ١١٨) مساويا للطول الحقيقي للجزء المحصور بين النقطة A_1
 والمستوى Φ من الراسم A_1 أى أن
 البعد $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 = H' =$ القوس $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2$
 وبالمثل البعد $\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 =$ القوس $\tilde{A}_2 \tilde{A}_3$ وهكذا
 وينتج من هذا أن المائل $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4 \dots$ هو باسط النائرة المار
 بالنقطة \tilde{A}_1 .

الفصل الثالث

السطوح المعوجة على وجه العموم

نبر ١٣٠ : نظرية شالز

قد مرنا في (بند ١٢٣) أن السطوح المعوجة هي سطوح مسطرة فيها أى وضعين متاليين للرسم هما مستقيمان غير متقاطعين بحيث يستحيل تسوية مثل هذا السطح على مستو. أو بعبارة أخرى يسمى سطحاً معوجاً أو أعرجاً كل سطح مسطح غير قابل لمستواء .

ولقد بينا أيضاً أنه إذا تحركت نقطة على راسم سطح معوج فالمستوى المماس له فيها يدور حول الراسم ويمكن وضع العلاقة التي تربط حركة النقطة على الراسم بدوران المستوى المماس حوله وهي العلاقة المعروفة باسم نظرية شالز ^(١) على الصورة الآتية :—

$$(A B \Gamma \Delta \dots) = (a b c d \dots)$$

أى أن العلاقة بين صف النقط على راسم سطح معوج وبين حزمة المستويات المماسية له في هذه النقط والمارة جميعاً بهذا الراسم هي علاقة ائتلافية إسقاطية أو بعبارة أخرى :

النسبة المضاعفة لـ ا ب ج د على راسم سطح معوج تساوى النسبة المضاعفة لحزمة المستويات A B C D المماسية للسطح في تلك النقط .

البرهان : لنفرض في (شكل ١١٦) أن a, b, c, d ألفة ثلاثة لسطح معوج وأن Δ منحني حيثما اتفق مرسوم على السطح ونفرض أيضاً أن الراسم Γ

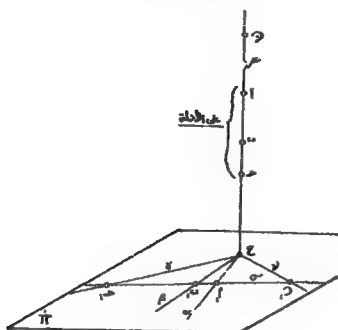
يقطع المنحنيات الأربعة μ, μ, μ, μ في النقطة α ب μ ح μ و على التوالي . فإذا كان μ وضعاً مجاوراً للرسم يلاقى المنحنيات الأربعة السالفة الذكر في النقطة α ب μ ح μ و μ فإن المستوى (α, μ) — الذى يحتوى المستقيم القاطع $\alpha\mu$ — يؤول إلى المستوى المماس A للسطح في النقطة α عند ما يقترب μ قريباً لانهائياً من μ (وتقترب بالتالى النقطة α عن طريق μ من النقطة α) . وفي هذه الحالة تؤول بالمثل المستويات (α, μ) (α, μ) (α, μ) إلى المستويات المماسية B Γ Δ في القطع α ب μ ح μ . ولما كانت النسبة المضاعفة للمستويات الأربعة (α, μ) (α, μ) (α, μ) (α, μ) تساوى على الدوام النسبة المضاعفة للنقط الأربع α ب μ ح μ و أيما كان الوضع الذى يتخذه μ على السطح (بند ٥٣ ص) فإنه ينتج في حالة الوضع النهائى أن :

$$(\alpha, \mu) = (\alpha, \mu) = (\alpha, \mu) = (\alpha, \mu) \text{ وهو المطلوب .}$$

ويسمى المستوى المماس للسطح في نقطة في اللانهاية على راسم ما مستوياً تقريباً كما قدمنا . وجميع المستويات التقريبية تكون متوازية وموازية لمستوى التوجيه إذا كان للسطح مستوى توجيه كما هو الحال في السطح اللولبي العمودى . أما إذا لم يكن للسطح مستوى توجيه وأريد تعيين المستوى التقريبى K للسطح في النقطة التى في اللانهاية على راسم ما مثل μ فالتا نعين أولاً الراسم α لنحروط التوجيه للسطح (بند ١٢٢) الموازى إلى μ فيكون K موازياً حيثئذ للمستوى المماس للنحروط بطول α .

ولاستخدام نظرية شالز في تعيين المستوى المماس N لسطح معوج في نقطة مثل α على الراسم μ (شكل ١١٩) نعين أولاً المستويات المماسية A B Γ للسطح في ثلاث نقط على الراسم مثل α ب μ ح (ولتكن للسهولة فقط

تقاطع الراس μ مع الالة الثلاثة المعلومة للسطح) ثم نختار مستويًا ما مثل Π يقطع $A \in B \in \Gamma$ في المستقيمت $\alpha \in \beta \in \gamma$ التي يجب أن تمر جميعاً بالنقطة ϵ التي هي نقطة تقابل الراس μ مع Π . فإذا افترضنا في المستوى Π



(شكل ١١٩)

مستقيماً حيثما اتفق σ يلاقى حزمة المستقيمت $\alpha \in \beta \in \gamma$ في النقط α, β, γ فإن العلاقة الاتلافية بين صفى النقط على الحاملين $\mu \in \sigma$ تتحدد حيثئذ بمعلومية الأزواج الثلاثة α, β, γ ب α, β, γ من النقط المتناظرة. فإذا كانت

δ هي النقطة على الصف π المناظرة للنقطة المعلومة ϵ على الصف μ بحيث يجعل $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 2, 3, 4)$ ^(١) ورمزنا إلى المستقيم ϵ بالرمز ν فإن المستوى المماس N يكون هو المستوى المار بالرأس μ وبالمستقيم ν .

وبالعكس يمكن بالطريقة السابقة تعيين نقطة تماس السطح مع أى مستو مار بالرأس μ مثل المستوى N لأنه إذا كان ν هو خط تقاطع N مع المستوى

(١) أنظر لذلك (بند ٨٣) مع ملاحظة أنه يمكن إسقاط صفى النقط سالفى الذكر على مستو جديد أو على المستوى Π نفسه فنحصل بذلك على صفين مؤتلفين مرسومين في هذا المستوى وفي هذه الحالة يستحسن للسهولة أن يكون اختيار المستقيم σ بحيث يجعل الصفين الآخرين في المستوى منظورين (فوق كونهما مؤتلفين) إن أمكن (أنظر بند ١٣٢).

II وقابل σ المستقيمت $\alpha \beta \gamma$ في النقط α, β, γ ، حيث α, β, γ ، فان النقطة δ (على الصف μ) التي تجعل $(\alpha \beta \gamma) = (\alpha \beta \delta)$ تكون نقطة التماس المطلوبة .

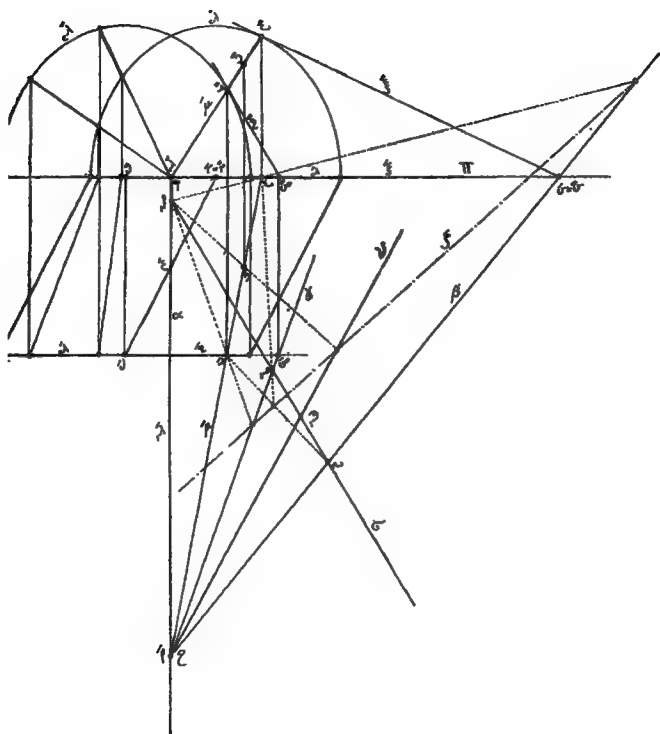
نبر ١٣١ : مثال

يمثل (شكل ١٢٠) سطحاً معوجاً أدلته هي α, β, γ ، حيث α, β, γ ، هو مستقيم عمودي على المستوى الرأسى وحيث α, β, γ نصفاً دائرتين يقع كل منهما في مستو مواز للمستوى الرأسى ويلاحظ أن المستقيم μ الذي يصل مركزي الدائرتين واقع في المستوى الاقصى II الذي يمر بالمستقيم α, β وأن المستقيمين يتلاقيان في نقطة ϵ هي منتصف البعد μ ل .

فالحصول على راسم مائل μ يمر بالدليل α, β مستويا ونفرض أن هذا المستوى يقطع α, β, γ في النقطتين α, β على التوالي فيكون بذلك μ هو المستقيم الذي يصل α, β ويلاقى α, β في النقطة α . فإذا كانت δ إحدى نقط الراسم μ وأريد تعيين المستوى المماس N للسطح فيها فانه يمكن تلخيص خطوات العمل باختصار كما يلي :

اولاً - نعين المستويات المماسه $A \alpha B \beta \gamma$ للسطح في النقط α, β, γ والمستوى A يتعين بالرأس μ وبالدليل α نفسه والمستوى B يتعين بالرأس μ وبالمماس β للدليل α في β والمستوى I يتعين بالرأس μ وبالمماس γ للدليل α في γ .

ثانياً - نتخار المستوى الاقصى II (المر بالدليل α, β) ليقطع المستويات السابقة في المستقيمت $\alpha \beta \gamma$ التي تكون حزمة رأسها ϵ (حيث $\epsilon \equiv \alpha$) هي نقطة تقاطع μ مع II .



(شكل ١٢٠)

ثالثاً — نرسم في المستوى II مستقيحيهما اتفق σ يقطع حزمة المستقيمات السالفة الذكر في النقط α, β, γ على التوالي .

رابعاً — وبذا يكون المستقيمان μ, ν حاملين لصفين مؤتلفين من النقط في المستوى II وقد تحدث العلاقة الاشتقاقية بينهما بالازواج الثلاثة α, β, γ على μ, ν, σ من النقط المتناظرة . ثم نجد كما يينا في (بند ٨٣) النقط α, β, γ على الحامل σ المناظرة الى α, β, γ على الحامل μ (حيث σ هي المسقط الاقصى للنقطة المعروفة σ) بحيث يكون $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha', \beta', \gamma')$ ^(١) ونصل α, β, γ فيكون هو خط التقاطع ν للمستوى N مع II وبذلك يتعين المستوى المطلوب N .

بشر ١٣٢ : مثال آخر

إذا علم سطح لولبي محوري مائل (شكل ١٢١) بالمحور μ والراسم ν وبالمنحنى اللولبي ρ لاحدى نقط الراسم (وقد افترضنا هذا المنحنى معلوماً بالنقطتين α, β الواقعتين عليه واستغنياً بذلك عن رسمه) وعلت أيضاً النقطة σ على الراسم ν فالمطلوب :

اولاً — تعيين المستوى المماس N للسطح في النقطة σ
ثانياً — تعيين النقطة μ (الواقعة على μ) من نقط المحيط الحقيقي للسطح بالنسبة للمستوى الرأسى .

(١) فترسم لتلك محور المنظورية γ الذى يصل نقطة تقاطع المستقيمين α, β بنقطة تقاطع المستقيمين α', β' على μ, ν فالمستقيمان α, β على μ يجب أن يتلاقيا كذلك على المحور γ وبذا تتعين σ .

الادلة الثلاثة لهذا السطح هي (بند ١٢٢) :

(١) المنحنى اللولبي μ

(٢) المحور μ

(٣) منحنى تقاطع مخروط التوجيه مع المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء
وسنرمز الى هذا المنحنى بالرمز μ .

فاذا كانت نقطة تقاطع الراسم μ مع هذا الادلة على التوالى $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ حيث γ هي النقطة التى فى اللانهاية على الراسم (فان المستوى المماس A للسطح فى النقطة α يتعين بهذا الراسم وبالمماس μ للمنحنى اللولبي μ فى α ويتعين المستوى المماس B فى النقطة β بالراسم μ وبالمحور μ نفسه . اما المستوى المماس Γ فى النقطة γ فهو مستو تقربى ويوازى كما قدمنا فى (بند ١٣٠) المستوى المماس لمخروط التوجيه بطول الراسم (راسم المخروط) الموازى الى راسم السطح μ فاذا اخترنا النقطة δ نفسها رأساً لمخروط التوجيه كان المستوى Γ هو المستوى المماس للمخروط بطول الراسم المعلوم μ (الذى يمكن اعتباره فى هذه الحالة راسماً للمخروط كما هو راسم السطح) .

ولنفرض الآن أن المستوى الاقصى Π المار بالنقطة δ يقطع المستويات المماسية A, B, Γ فى المستقيبات $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (١) التى تمر جميعاً بنقطة تقاطع μ مع Π فتكون هذه النقطة لذلك هى الرأس ϵ للحزمة التى تكونها تلك المستقيبات أى أن $\epsilon \equiv \text{مر}$. فاذا كان σ مستقيماً حيثما اتفق يمر بالنقطة δ

(١) يلاحظ أن النقطة δ على ϵ تعين بجعل α من مسلوياً لطول القوس α ه' وبذلك يتعين α . كما يلاحظ أن المستوى Π يقطع مخروط التوجيه فى دائرة مركزها δ ونصف قطرها δ فيكون γ هو مماس هذه الدائرة فى δ .

فانه يقطع الحزمة في النقط α, β, γ التي تكون صفاً مؤتلفاً مع صف النقط α', β', γ' الواقعة على الحامل μ' ولما كانت نقطة تقاطع الحاملين μ, μ' σ مناظرة لنفسها (حيث $\beta' \equiv \beta$) لذا كان الصفان منظورين (فوق كونهما مؤتلفين) بحيث تمر المستقيمتان التي تصل أزواج النقط المتناظرة على الصفيين بنقطة واحدة هي مركز المنظورية ϕ (نقطة تقاطع المستقيمين $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$).

فاذا كانت ϕ' المسقط الاقصى للنقطة المعلومة ϕ المطلوب تعيين المستوى المماس للسطح فيها ووصل ϕ ليقطع σ في ϕ (المناظرة الى ϕ') كان المستقيم σ هو خط التقاطع ν للمستوى N مع Π وبذا يكون N هو المستوى المار بالمستقيمين μ, ν وهذا هو المطلوب أولاً.

ولا يجد المطلوب ثانياً نمر بالراسم μ المستوى M المسقط له رأسياً (أي المستوى العمودي على المستوى الرأسى) فهذا المستوى يمس السطح في نقطة المحيط الحقيقى (بالنسبة للمستوى الرأسى) الواقعة على الراسم μ . فاذا فرضنا أن M يتقاطع مع Π في المستقيم δ (حيث δ هو خط التناظر نفسه المرسوم من النقطة σ) وتقاطع δ, σ في μ فان النقطة المطلوبة μ يجب تعيينها على الراسم μ بحيث يكون $(\alpha\beta\gamma\sigma) = (\alpha'\beta'\gamma'\mu)$ ويكون مسقطها الاقصى μ' على الحامل μ' هو النقطة التي تجل $(\alpha'\beta'\gamma'\mu') = (\alpha\beta\gamma\mu)$ ولما كان الصفان $\alpha'\beta'\gamma'\sigma'$... $\alpha\beta\gamma\sigma$ منظورين فان μ' تكون نقطة تقاطع المستقيم ϕ مع μ' وهكذا تتعين النقطة المطلوبة μ بمسقطها الاقصى μ' ومسقطها الرأسى μ' الذي هو نقطة تماس μ مع المحيط الظاهرى للسطح على المستوى الرأسى.

بدر ١٣٣ : كيفية رسم الظل للسطوح المعوجة

لايجاد خط الظل لسطح معوج نمر برواسم السطح مستويات موازية لاتجاه الاضائة (أو مارة بالنقطة المضئية في حالة الاضائة المركزية) ثم نعين فقط تماس هذه المستويات مع السطح كما بينا في المثال السابق فيكون خط الظل هو المحل الهندسى لهذه النقط .

ويلاحظ أنه بينما يكون خط الظل في حالة السطوح المعوجة منحنياً على وجه العموم فهو في حالة السطوح القابلة للاستواء يتكوّن من رواسم السطح التي يكون المستوى المماس له بطول كل منها موازياً لاتجاه الاضائة (أو ماراً بالنقطة المضئية) . ويقال مثل هذا أيضاً عن الظل الساقط في حالى السطوح المعوجة والقابلة للاستواء (١) .

(١) كذلك المحيطات الحقيقية والظاهرية : فالمحيط الظاهري (بالنسبة للمستوى الرأسى) للسطح المعوج المين في (شكل ١١٤) يتكوّن من المنحنيات التي أشرنا اليها في (بند ١٢٠) بينما هو في حالة السطح اللولبي القابل للاستواء مثلاً (شكل ١١٢) يتكوّن من جملة المستقيمات $٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥" ٢٥"$ وهي مساطر وواسم السطح التي يكون المستوى المماس له بطول كل منها عمودياً على المستوى الرأسى كذلك المحيط الظاهري لسطح مخروطى أو أسطوانى (من الرتبة الثانية) بالنسبة الى مستو ما يكون عبارة عن مستقيمين متقاطعين أو متوازيين على التوالي .

الفصل الرابع

السطوح المسطرة من الدرجة الثانية

بند ١٣٤ : السطح الزائدى العام ذو الطية الواحدة

هذا السطح يمكن الحصول عليه كسطح مؤتلف امتلافاً متوازياً فى الفراغ مع السطح الزائدى الدورانى ذو الطية (بند ١٠٥) . ويعرف الامتلاف المتوازى فى الفراغ كما يلى :-

يقال لائى مجموعتين فراغيتين لائهما مؤتلفاتهما متوافاً متوازياً اذا تناظرتا نقطهما ومستقيماهما بحيث تقع النقط المتناظرة على مستقيما متوازية وموازية لاتجاه ثابت يعرف باتجاه التوافق . وبحيث تتلاقى المستقيما المتناظرة فى مستو ثابت يسمى بمستوى التوافق المتورى . ويؤخذ هذا التعريف أن كل مستو فى إحدى المجموعتين يناظره فى المجموعة الاخرى مستو أيضاً وأن المستويين المتناظرين يتقاطعان فى مستقيم واقع فى مستوى الامتلاف .

فاذا اختير أحد مستويات الزوال فى السطح الزائدى الدورانى مستوياً للامتلاف واختير اتجاه الامتلاف عمودياً على هذا المستوى فان دوائر العرض فى (شكل ١١١) تقوول الى قطاعات ناقصة . وعلى الخصوص تقوول دائرة الحلق فى السطح الدورانى الى قطع ناقص مغلقة (١) فى السطح الزائدى العام .
وينتج عن هذا الامتلاف بقاء بعض الخواص الهندسية محفوظة من السطحين :

(١) فاذا تحرك هذا القطع الناقص موازياً لنفسه ومكتناً على خطى الزوال المارين بمحوريه الاكبر والاصغر باعتبارهما منحنين (قطعين زائدين) ثابتين فانه يولد بذلك السطح الزائدى العام .

فالسطح الزائدى العام يمكن اعتباره — كالسطح الدورانى — متولداً عن مستقيم راسم يترك متكادراً على نموتة مستقيمت غير متقاطعة (ألة) . كذلك توجد على السطح مجموعته مختلفاته من الرواسم ويلاحظ أن جميع الرواسم في مجموعة واحدة هي مستقيمت غير متقاطعة في حين أن أى راسم في إحدى المجموعتين يقابل جميع رواسم المجموعة الأخرى وهكذا يمتحى الفرق بين الرواسم والألة .

والسطح الزائدى العام هو مثل السطح الدورانى سطح معوج من الدرجة (والرتبة) الثانية (١) .

وبتعيين المستوى المماس للسطح في أية نقطة عليه بالراسمين المارين بها والمستوى المار بأى راسمين متوازيين (من مجموعتين مختلفتين) يمس السطح في نقطة على بعد لا نهائى ويكون بذلك مستوياً تقريباً فإذا تقاطعت ثلاثة من هذه المستويات في نقطة كانت هذه النقطة مركز السطح .

وإذا علمت ثلاثة مستقيمت غير متقاطعة a, b, c و m, n, p واعتبرت ألة لسطح زائدى عام فهناك طريقتان لتعيين رواسم السطح :

الطريقة الأولى : نختار عدة نقط مثل $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$... على أحد الألة وليكن a فالمستوى A المار بالنقطة a وبالليل m, n يتقاطع حيثن مع المستوى A المار بالنقطة a نفسها وبالليل m, n في مستقيم mn يمكن اعتباره راسماً للسطح وبالمثل إذا رمزنا إلى المستويات المارة بالنقط $b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$...

(١) الواقع أن أى مستقيم في الفراغ لا يمكن أن يقطع مثل هذا السطح في أكثر من نقطتين لانه لو فرض أن مستقيماً قاطع السطح في ثلاث نقط ورسوم من هذه النقط ثلاثة مستقيمت (غير متقاطعة) على السطح فإن المستقيم الممتك على هذه المستقيمت الثلاثة باعتبارها ألة لابد أن يقع بتمامه على السطح .

وبالدليل λ بالرموز B, Γ, Δ, \dots والى المستويات المارة بنفس النقط وبالدليل λ بالرموز B, Γ, Δ, \dots على التوالى — فإن خطوط تقاطع أزواج المستويات B, Γ, Δ, \dots تكون رواسم جديدة للسطح .

ولما كانت حزمة المستويات المارة بالمستقيم الحامل λ مؤتلفة مع حزمة المستويات المارة بالحامل λ لأن

$$(A, B, \Gamma, \Delta) = (A, B, \Gamma, \Delta) = (A, B, \Gamma, \Delta)$$

ولما كان الحاملان λ, μ يمكن اعتبارهما أى مستقيمين غير متقاطعين مرسومين على السطح وكانت خطوط تقاطع أزواج المستويات المتناظرة هي كما قدمنا رواسم للسطح لذلك يمكننا القول بأن :

خطوط تقاطع أزواج المستويات المتناظرة فى حزمتين مؤتلفتين من المستويات هاتين هما مستقيمان غير متقاطعين هي رواسم لسطح زائدى عام ذو طبقة واحدة ^(١) .
وؤخذ عما تقدم أن أى مستو Σ يقطع السطح الزائدى فى مقطع مخروطى لاتنا اذا اخترنا أى راثنين من مجموعة واحدة حاملين لحزمتى المستويات اللتين يمران بهما وبرواسم المجموعة الاخرى فان Σ يقطع هاتين الحزمتين فى حزمتين مؤتلفتين من المستقيمتين وتكون نقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة فى هاتين الحزمتين نقطاً على منحنى تقاطع السطح مع المستوى Σ ويجب لذلك أن يكون هذا المنحنى مقطعاً مخروطياً .

الطريقة الثانية : نمر باحد الادلة الثلاثة المعلومة وليكن λ عدة مستويات $A, B, \Gamma, \Delta, \dots$ فتقاطع هذه المستويات مع λ فى النقط

(١) اذا تقاطع الحاملان لحزمتين مؤتلفتين من المستويات أنشأ سطح مخروطى من الدرجة الثانية .

$\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p \epsilon_p \dots$ وتتقاطع مع α_p في النقطة $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p \epsilon_p \dots$ وبذلك تكون المستقيمت $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p \epsilon_p \dots$ التي تصل أزواج هذه النقاط المتناظرة رؤوس السطح الزائدى . وبما أن

$$(\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p) = (\Delta \Gamma B A) = (\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p)$$

فينتج من ذلك أن صفى النقطة على $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p$ مؤتلفان .

ولما كان من الممكن اعتبار $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p$ أى راسمين من مجموعة واحدة على السطح فإنه يتضح مما تقدم أنه قطت تماماً مع رؤوس السطح من المجموعة الأخرى تكوره عليهما صفين مؤتلفين من النقطة . كما يتضح أيضاً أن :

المستقيمت التي تصل أزواج النقاط المتناظرة من صفين مؤتلفين هاتين هما مستقيمتان غير متقاطعتين هي رؤوس لسطح زائدى عام ذى طية واحدة ^(١) .

فإذا كان $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p$ مسقطى المستقيمتين غير المتقاطعتين $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p$ على مستو ما مثل Π فإن $\alpha_p \beta_p \gamma_p \delta_p$ يكونان في هذه الحالة حاملين لصفين مؤتلفين من النقاط في المستوى Π والمستقيمت التي تصل أزواج النقاط المتناظرة في هذين الصفين تغلف لذلك مقطعاً مخروطياً يكون هو المحيط الظاهرى للسطح على المستوى Π .

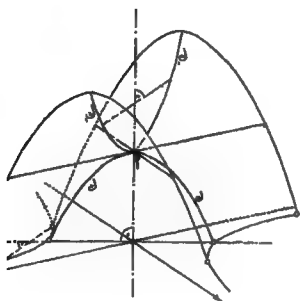
بند ١٣٥ : السطح المائى الزائدى

هذا السطح حالة خاصة من السطح الزائدى العام ذى الطية ويتولد عن مستقيم يتحرك متكئاً على مستقيمت ثلاثة (أدلة) أحدها مستقيم فى اللانهاية أو بعبارة أخرى يتولد عن مستقيم راسم α يتحرك متكئاً على مستقيمتين غير

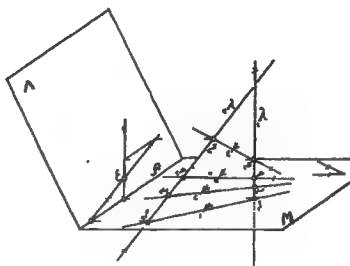
(١) اذا تقاطع الحاملان أى أمكن أن يمر بهما مستو واحد نشأ مقطع مخروطى .

مقاطعين ρ, λ, μ بحيث يكون في جميع أوضاعه موازيا لمستوى ثابت M يسمى مستوى الترميم أو المستوى الرئيل (شكل ١١٢٢) .
ونلخص فيما يلي بعض النظريات الهامة المتعلقة بهذا السطح :

(١) توجد على السطح مجموعتان مختلفتان من الرواسم نرمز لهما بالرمزين ρ, λ, μ . ويلاحظ هنا أيضا أن أى راسمين من مجموعة واحدة مثل ρ, μ



(٥)



(شكل ١٢٢)

(١)

(شكل ١١٢٢) لا يمكن أن يتقاطعا (والا كان الليلان ρ, λ, μ واقعين في مستوى واحد) في حين أن أى راسم من إحدى المجموعتين يقطع جميع روااسم المجموعة الأخرى .

(٢) جميع نقط هذا السطح نقط زائدية^(١) ويمر بكل نقطة من هذه النقط راسمان (من مجموعتين مختلفتين) يعينان المستوى المماس للسطح فيها .

(١) ولهذا السبب سمى بالسطح المكافئ الزائدى تميزأله من السطح المكافئ الناقص (بند ١٣٧) الذى جميع قطعه ناقصة .

(٣) أى مستو مار براسم معين من إحدى المجموعتين يقطع السطح فى راسم آخر من المجموعة الأخرى وتكون نقطة تقاطع الراسمين هى نقطة تماس المستوى مع السطح .

(٤) ينتج من النظرية السابقة أن المستوى الذى فى اللانهاية باعتباره مستويا مارا بالراسم الذى فى اللانهاية فى مستوى التوجيه M — لابد أن يقطع السطح فى راسم آخر فى اللانهاية من المجموعة μ . ومعنى هذا أن للسطح المائى الزائدى مستوى نرميه أحدهما المستوى المعلوم M وتوازيه رواسم المجموعة μ والآخر مستو Δ توازيه رواسم المجموعة λ ويمكن الحصول عليه برسم مستقيمين موازيين الى λ, μ, ν من أية نقطة فى الفراغ مثل ع (شكل ١١٢٢) .

(٥) أى مستقيم فى الفراغ لا يمكن أن يقابل السطح فى أكثر من نقطتين والا كان واقعا بتمامه على السطح أى أن السطح المكافئ الزائدى هو سطح من الدرجة الثانية .

(٦) اذا مر مستويا بحد الرواسم ووازى مستوى التوجيه الذى يوازيه هذا الراسم فانه لا يقطع السطح الا فى هذا الراسم (ويكون الراسم الآخر هو المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى التوجيه) ويعتبر مثل هذا المستوى مستويا تماسا للسطح فى نقطة فى اللانهاية أى مستويا تقريبا .

(٧) اذا علم مستو Σ (غير مواز لخط تقاطع مستويي التوجيه) فانه يمكن دائما ايجاد راسمين اثنين كل فى مجموعة يكونان موازيين للمستوى Σ (اذا تقاطع Σ مع أحد مستويي التوجيه M فى مستقيم مثل α كان راسم المجموعة μ الموازى الى Σ هو المستقيم المرسوم موازيا الى α ليقابل مستقيمين غير متقاطعين λ, μ هما راسمان حيثما اتفق من المجموعة λ . ويقال مثل هذا عن كيفية الحصول على الراسم الثانى من المجموعة λ الموازى للمستوى المعلوم Σ)

وتكون نقطة تقاطع الراسمين هي نقطة تماس المستوى المماس للسطح الموازى الى المستوى Σ (١) .

(٨) فإذا كان المستوى Σ السالف الذكر عمودياً على المستقيم o في (شكل ١٢٢ ١) الذى هو خط تقاطع مستويي التوجيه $\Lambda \propto M$ كانت نقطة تماس المستوى المماس الموازى الى Σ في هذه الحالة هي الرأس 1 للسطح ويكون المستقيم المرسوم من 1 موازياً الى o هو محور السطح . وترك للقارىء إثبات ذلك (٢) مع ملاحظة أن المستوى الذى في اللانهاية للفضاء هو نفسه مستوى تماس للسطح نقطة تماسه هي النقطة التي في اللانهاية على المستقيم o لان هذا المستوى يمر براسمين للسطح هما المستقيمان اللذان في اللانهاية في المستويين $\Lambda \propto M$.

(٩) منحنى تقاطع السطح مع أى مستو لا يمر بالمحور ولا يوازيه هو قطع زائد لانه يمكن ايجاد راسمين في هذه الحالة (كل في مجموعة) يوازيان المستوى القاطع وبذا يكون المقطع منحنياً من الدرجة الثانية له نقطتان في اللانهاية أى قطعاً زائداً .

(١٠) أما اذا مر المستوى القاطع بالمحور أو كان موازياً له (وموازياً بالتالى الى المستقيم o) فانه يقطع السطح حينئذ في قطع مكافئ إذ لا يكون لمنحنى

(١) يلاحظ أن المستوى المماس في هذه الحالة هو مستو مار بمستقيم المستوى Σ الذى في اللانهاية فهو لذلك أحد المستويين المماسين للذين يمكن رسمهما للسطح (باعتباره من الرتبة الثانية) مارين بهذا المستقيم أما المستوى المماس الثانى فهو نفس المستوى الذى في اللانهاية للفضاء .

(٢) راجع لذلك بعض ما ذكرناه من خواص للقطع المكافئ في (بند ٧٤) مثلاً فان هناك نوعاً من « التشابه » بين هذا المنحنى الذى يمر بالمستقيم الذى في اللانهاية وبين السطح المكافئ الذى يمر بالمستوى الذى في اللانهاية للفضاء .

التقاطع في هذه الحالة سوى نقطة واحدة في اللانهاية (هي النقطة التي في اللانهاية على المحور).

(١١) حيث إن الرواسم μ, μ, μ, \dots يمكن الحصول عليها بقطع الدليلين μ, μ بعدة مستويات موازية الى المستوى M (وهذه هي الطريقة الثانية المذكورة في بند ١٣٤ حيث يمكن اعتبار تلك المستويات المتوازية مارة جميعاً بالدليل μ الذى هو المستقيم الذى فى اللاتمامية فى المستوى M) فينتج من ذلك (شكل ١٢٢ ١) أن

$$\dots = \frac{121}{22} = \frac{11}{2}$$

مكافئان متحدا المحور والرأس وواقعان في مستويين متعامدين بحيث يكون تغيرهما
 لجهتين مختلفتين فاذا افترضنا ثبوت \mathbf{K} وأن \mathbf{K} يتحرك موازياً لنفسه ومتكئاً
 على \mathbf{K} فان \mathbf{K} يولد بهذه الحركة سطحاً مكافئاً زائدياً . كذلك يمكن اعتبار
 السطح متولداً عن قطع زائد (واقع في مستو عمودى على محور القطع المكافئ)
 يتحرك موازياً لنفسه ومتكئاً على القطع المكافئ الثابت \mathbf{K} بحيث يكون مركزه
 واقعاً دائماً على المحور وبحيث تكون الاوضاع المختلفة للخطين التقريبين موازية
 لاتجاهين ثابتين فعند وصول القطع الزائد الى النقطة ١ (وهى رأس السطح)
 ينحل الى مستقيمين واقعين بتامهما على السطح وموازيين للاتجاهين الثابتين
 وبعد ذلك يؤول اتجاه المحور القاطع للقطع الزائد المتحرك الى اتجاه للمحور
 المرافق وبالعكس أى أن القطع الزائد الراسم للسطح يتحرك بعد مغادرته للنقطة ١ متكئاً
 على القطع المكافئ \mathbf{K} .

الباب السابع

سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة

الفصل الاول

السطح الناقص والسطح المكافئ الناقص والسطح الزائدي ذو الطيتين

بند ١٣٦ : السطح الناقص

معلوم أنه اذا دار قطع ناقص حول أحد محوريه فإنه يولد ما يسمى بالسطح الناقص الدوراني وعلى حسب ما كانت حركة الدوران حول المحور الاصغر أو الاكبر يقال للسطح إنه مبطط أو مستطيل على التوالي .

فاذا علم سطح ناقص دوراني واقترضنا اتصلاً متوازيًا في الفراغ معلوماً باحد مستويات الزوال Z كمستو للاختلاف وبزوج من النقط المتناظرة يصلها مستقيم (محدد لاتجاه الاختلاف) عمودي على Z فالتا نحصل على سطح جديد مقفل من الدرجة الثانية (كالسطح الدوراني) مقاطعه العمودية قطاعات ناقصة (بدلاً من دوائر) وله ثلاثة محاور مختلفة الطول : $و$ و $ص$ و $ع$ (شكل ١٢٣) ويطلق عليه اسم السطح الناقص (العام) أو السطح الناقص ذي المحاور الثموية . ولما كان هذا السطح ليست له نقطاً في اللامهية لذا كانت مقاضعه المستوية

كلها قطاعات ناقصة (أو دوائر) وبين هذه المقاطع توجد ثلاثة قطاعات ناقصة رئيسية هي التي يمكن الحصول عليها بقطع " سطح بمستويات مدرة بمر كيزه و عمودية على محاوره الثلاثة ويمكن اعتبار السطح الناقص — بصرف "نقطة عن مكان الحصول عليه كسطح مؤلف اتصلاً متوازيًا مع السطح الناقص "دوراني" . متولداً

عن تحرك أحد تلك القطاعات الناقصة الرئيسية بالتوازي لنفسه متكئاً على القطعين الباقيين وفي هذه الحالة يمكن اعتبار السطح الناقص الدوراني حالة خاصة من السطح ذي المحاور الثلاثة وذلك اذا تساوى اثنان من هذه المحاور كما يمكن اعتبار الكرة سطحاً ناقصاً محاوره الثلاثة متساوية .

بند ١٢٧ : السطح الملافئ الناقص

اذا دار قطع مكافئ حول محوره نشأ سطح ملافئ دوراني . فاذا افترضنا امتلاقاً متوازياً في الفراغ واخترنا أحد مستويات الزوال Z لهذا السطح مستوياً لهذا الامتلاف والاتجاه العمودي على Z اتجاهاً له فالتناقص على سطح جديد من الدرجة الثانية مقاطعه العمودية على المحور قطاعات ناقصة (بدلاً من دوائر) ويطلق عليه اسم السطح الملافئ الناقص .

وهذا السطح أيضاً يمكن اعتباره قائماً بذاته فيعرف حيثئذ بأنه السطح المتولد عن تحرك قطع ناقص أو مكافئ ^(١) بكيفية خاصة يمكن استنتاجها بسهولة من الكروكي الذي يمثل السطح في (شكل ١٢٤) وفي هذه الحالة يكون السطح المكافئ الدوراني حالة خاصة منه وذلك اذا جعلنا البعدين u و v متساويين .

والمقاطع المستوية للسطح المكافئ الناقص إما أن تكون قطاعات مكافئة أو ناقصة (أو دوائر) .

(١) يلاحظ في حالة اعتبار السطح متولداً عن حركة القطع المكافئ u و v متلاً بالتوازي لنفسه ومتكئاً على القطع المكافئ الثابت u و v — أن يكون تغييرا القطعين لجهة واحدة وذلك بخلاف الحال في السطح المكافئ الزائدي (بند ١٣٥) .

بند ١٣٨ : السطح الزائرى ذو الطيتين

إذا دار قطع زائد حول محور القاطع فإنه يولد بذلك سطحاً زائرياً دورانياً ذا طيتين كما يولد الخيطان التقريبان بدورانهما حول هذا المحور مخروطاً دورانياً يطلق عليه اسم المخروط التقربى للسطح . فإذا افترضنا امتداداً متوازياً فى الفراغ واخترنا أحد مستويات الزوال Z لهذا السطح مستوياً للاختلاف والاتجاه العمودى على Z اتجاهاً له فالتنا نحصل على سطح جديد من الدرجة الثانية يطلق عليه اسم السطح الزائرى ذو الطيتين فيه المقاطع العمودية على المحور قطعاً ناقصة (بدلاً من دوائر) والمخروط التقربى سطح مخروطى عام من الدرجة الثانية (بدلاً من مخروط دورانى) .

ويمكن تعريف هذا السطح إذا أريد اعتباره قائماً بذاته بأنه السطح المتولد عن تحرك قطع ناقص أو زائد بكيفية خاصة يمكن استنتاجها بسهولة من الكروى الذى يمثل السطح فى (شكل ١٢٥) وفى هذه الحالة يكون السطح الزائدى الدورانى ذو الطيتين حالة خاصة منه وذلك إذا جعلنا البعدين u و v متساويين .

والمقطع المستوى لهذا السطح يكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما إذا كان المستوى الموازى للمستوى القاطع والمار بمرکز السطح قاطعاً المخروط التقربى فى راسين مختلفين أو ماساً له أو غير قاطع له على التوالى .

الفصل الثاني

السطوح المؤتلفة مركزياً مع الكرة

بشر ١٣٩ : تعاريف ونظريات عامة

يقال لمجموعتين فراغيتين (يتألف كل منهما من نقط ومستقيمتين ومستويات)
أنهما مؤتلفتان مركزياً إذا تناظرت نقطهما ومستقيمتاهما بحيث تمر المستقيمتان
الواصلتان بين أزواج النقط المتناظرة جميعاً بنقطة ثابتة في الفراغ تعرف بمركز
التناظر. ويثبت تلاقى المستقيمتين المتناظرتين في مستو ثابت يسمى مستو
التناظر المركزي. ويؤخذ من هذا التعريف أن كل مستو في إحدى المجموعتين
ينظره مستو جديد في المجموعة الأخرى بحيث يتقاطع المستويان المتناظران في
مستقيم واقع في مستو الالتلاف. فإذا كان أحد هذين المستويين هو المستو
الذي في اللانهاية للفضاء باعتباره مرسوماً في إحدى المجموعتين كان المستو
المتناظر له في المجموعة الأخرى (وهو مستو مواز لمستوى الالتلاف وعلى بعد
محدد منه) هو المحل الهندسي لجميع نقط هذه المجموعة التي تناظرها في المجموعة
الأولى نقط في اللانهاية ويؤخذ من هذا أنه يوجد مستويان (متوازيان وموازيان
لمستوى الالتلاف) في المجموعتين يناظر كل منهما المستو الذي في اللانهاية
ويطلق عليهما اسم المستويين المحددين للالتلاف المركزي في الفراغ (قارن
الالتلاف المركزي بين شكلين مستويين) . ويتعين الالتلاف إذا علم المركز
ومستوى الالتلاف وزوج واحد من النقط المتناظرة أو من المستويات المتناظرة .
ولنفرض الآن كرة κ وائتلاًفاً مركزياً معلوماً بالمركز σ ومستوى
الالتلاف π وبالمستوى المحدد X المرسوم في مجموعة الكرة مناظراً للمستوى
الذي في اللانهاية للفضاء باعتباره مرسوماً في مجموعة "سطح γ " المؤتلف مركزياً

مع الكرة فمن الواضح أن السطح Σ لا بد أن يكون حيثئذ كالكرة سطحاً من الدرجة (وكذا الرتبة) الثانية لأن كل مستقيم في الفراغ لا يمكن أن يلاقي هذا السطح في أكثر من نقطتين اثنتين (هما النقطتان المناظرتان لنقطتي تقاطع المستقيم المناظر للمستقيم المعلوم مع الكرة) وكذلك إذا تقاطع مستو Σ مع الكرة Σ في دائرة σ فإن المستوى Σ المناظر له لا بد أن يقطع السطح Σ في منح مؤلف مركزياً مع σ أى في مقطع مخروطى σ فلذا فرضنا أن σ رأس المخروط الدوراني الذي يمر الكرة في الدائرة σ فإن σ يكون رأساً للمخروط من الدرجة (والرتبة) الثانية يمر Σ في المقطع المخروطى σ . ويطلق على النقطة σ والمستوى Σ اسم قطب ومستوى القطبي بالنسبة الى الكرة كما يطلق على σ اسم قطب ومستوى القطبي بالنسبة الى السطح Σ .

ونذكر باختصار فيما يلي بالإشارة الى ما تقدم بعض النظريات والخواص المتعلقة بالسطوح المؤلفة مركزياً مع الكرة ^(١) : —

(١) لما كانت الكرة جميعاً قطعاً ناقصية لذا كانت تقط السطوح المؤلفة معها مركزياً ناقصية كذلك بحيث أن المستوى المماس في أية نقطة لا يقطع السطح ولا يشترك معه إلا في نقطة التماس وذلك بخلاف سطوح الدرجة الثانية المسطرة (راجع البنود ١٠٥ ١٣٤ ١٣٥) التي جميع قطعها زائدية ^(٢) .

(٢) السطوح المؤلفة مركزياً مع الكرة هي نفس سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة التي عرفناها في الفصل السابق . وعلى حسب ما اذا كان المستوى المحدد X غير قاطع للكرة Σ أو ماساً لها أو قاطعاً لها (في دائرة حقيقية) يكون

(١) يلاحظ أن النظريات ٣ ٤ ٥ ٦ ٨ تصدق على سطوح الدرجة الثانية بوجه عام بمعنى ذلك السطوح المسطرة التي أشرنا إليها في البنود ١٠٥ ١٣٤ ١٣٥ .
(٢) سطوح الدرجة الثانية التي قطعها مكافئة هي السطوح المخروطية والاسطوانية .

السطح 'x' المؤتلف معها مركزياً سطحاً ناقصاً أو مكافئاً ناقصاً أو زائدياً
ذا طيتين على التوالى .

(٣) اذا رسم من النقطة 'س' (رأس المخروط المماس للسطح 'x') مستقيماً يلاقى
مستويها القطبي 'Σ' فى النقطة 'ص' ويقطع السطح 'x' فى النقطتين 'أ' و 'ب' فان
 $(س' ص' أ' ب') = ١ -$

أى أن هذه النقط الأربع تكون صفات توافقياً .

(٤) المحل الهندسى للنقطة 'ص' التى ترافق 'س' توافقياً بالنسبة للنقطتين 'أ' و 'ب'
وهما نقطتي تقاطع 'x' مع أى مستقيم مار بالنقطة 'ص' هو المستوى القطبي
'Σ' للنقطة 'س' بالنسبة للسطح 'x' .

(٥) اذا علم سطح من الدرجة الثانية تحددت مجموعة قطبية فى الفراغ بحيث أن كل
نقطة يكون لها مستو قطبي بالنسبة للسطح كما أن كل مستو يكون له قطب واحد
بالنسبة لهذا السطح ويلاحظ أن قطب المستوى المماس هو نقطة التماس نفسها .
(٦) مركز سطح من الدرجة الثانية هو قطب المستوى الذى فى اللانهاية
للفضاء بالنسبة للسطح كما أن المستوى القطبي لاية نقطة فى اللانهاية هو مستو يمر
بمركز السطح ويسمى أحياناً بالمستوى القطرى .

(٧) اذا كانت و هى قطب المستوى X السالف الذكر بالنسبة للكرة x
كانت النقطة و' (المنظرة الى و) هى مركز السطح 'x' .

(٨) المخروط المماس لاي سطح من الدرجة الثانية من نقطة خارجية مثل ل
س السطح فى منح من الدرجة الثانية (هو مقطع السطح بالمستوى القطبي A
لنقطة ل بالنسبة للسطح) ولذا كان خط الظل والظل الساقط على مستو (فى
حالى الاضاءة المركزية والمتوازية) وكذلك المحيط الحقيقى والمحيط الظاهرى
(فى حالى الاسقاط المركزى والمتوازى) مقطوعاً مخروطياً .

ولكى نعطي للقارئ فكرة عن كيفية استنباط بعض خواص سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة باعتبارها مؤتلفة مركزياً مع الكرة نفرض أننا أمرنا بمركز الالتلاف M ومركز الكرة K مستوياً عمودياً على مستوى الالتلاف Σ فإن هذا المستوى العمودي يكون مستوى تماثل بالنسبة للكرة والسطح Σ' المؤتلف معها مركزياً فإذا فرضنا في (شكل ٧٨) أن هذا المستوى (الذي يمثله سطح الورقة) يقطع الكرة في الدائرة العظمى الميئة كما يقطع مستوى الالتلاف Σ والمستوى المحدد X في المستقيمين E و Q على التوالي فإن القطع المكافئ المؤتلف مركزياً مع الدائرة يكون حينئذ قطعاً رئيسياً للسطح Σ' الذي يجب أن يكون في هذه الحالة سطحاً مكافئاً ناقصاً (لأن الكرة تمس X). وأى وتر للدائرة في الشكل يمثل حينئذ مقطعاً مستوياً للكرة يناظره مقطع مستوٍ للسطح Σ' فإذا فرضنا أن المستقيم Q في (شكل ٧٨) يمثل مستوياً P في مجموعة الكرة ماراً بالنقطة K وقاطعاً لها في دائرة فإن المستقيم Q يمثل حينئذ مستوياً P في مجموعة السطح Σ' موازياً لمحوره وقاطعاً له في قطع مكافئ. في حين أن أى مستوٍ آخر Σ غير مار بالنقطة K يقطع الكرة في دائرة يكون المنحنى المؤتلف معها مركزياً (وهو مقطع السطح Σ' بالمستوى Σ') قطعاً ناقصاً ويجوز أن يكون أيضاً دائرة وذلك مثلاً في حالة ما إذا كان Σ موازياً إلى مستوى الالتلاف Σ .

الباب الثامن

الاسقاط الرقى

الفصل الاول

كلية عامة وتعاريف

بشر ١٤٠ : لوسعمال الرقى لوسقاط الرقى

تبحث هذه الطريقة الجديدة للاسقاط في تمثيل السطوح والاجسام بواسطة مسقط عمودي واحد إذ كما أن النقطة في الفراغ تتحدد اذا علم مسقطها العموديان على مستويين متعامدين كما هو الحال في طريقة مونتج التي اقتصرنا على استعمالها للآن — فهي تتحدد أيضاً كما قدمنا في (بند ١) اذا علم بجانب مسقطها العمودي على مستوي واحد بعدها عن هذا المستوى ^(١) .

وتستخدم طريقة الاسقاط الرقى ^(٢) على وجه الخصوص في خراط المساحة لتمثيل سطح الارض بارتفاعاته وانخفاضاته وبيان ما يمكن تخطيطه عليه من جسور وطرق وأنهار وترع كما سيأتي بيانه في الباب التاسع تطبيقاً للقسم النظري الذي أفردنا له هذا الباب .

(١) يظهر لأول وهلة أن هذه الطريقة لابد أن تكون أقل تعقيداً من طريقة مونتج إلا أن العناية التي تقتضيها كتابة الأرقام المختلفة على مسانيد المقطوعه وضوح الأشكال المعقدة بطريقة الاسقاط الرقى يجعل استعمال هذه الطريقة في المسوحات الهندسية قاصراً في الغالب على خراط المساحة وحدها .

(٢) يرجع استخدام هذه الطريقة في الخرائط "بحرية" إلى "م. د. ب. ب. ب." وأول كتاب تناول طريقة الاسقاط الرقى بالبحث هو كتاب "م. د. ب. ب. ب." في باريس عام ١٨٢٣ .

بئر ١٤١ : تعاريف

يسمى مستوى الاسقاط الذى يؤخذ عادة أفقياً بمستوى المقارنة أو المستوى

الرقمى وسنرمزله بالرمز II .

ويسمى بعد النقطة أو ارتفاعها عن مستوى المقارنة II بالرقم أو الارتفاع

ويطلق عليه أحياناً أيضاً اسم المنسوب اذا فرضنا أن مستوى المقارنة يمثل سطح

البحر . ويكون الرقم موجباً أو سالباً على حسب ما اذا كانت النقطة فوق أو

تحت المستوى الرقمى .

الفصل الثانى

تمثيل النقطة والمستقيم والمستوى

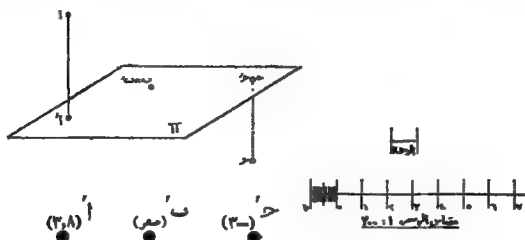
بسر ١٤٢ : تمثيل النقطة — الوحدة ومقياس الرسم

تمثل النقطة فى هذه الخريطة بمسطرها المرقوم على مستوى المقارنة II أى مسقطها العمودى مصحوباً برقها أو ارتفاعها عن II وهذا الرقم يكتب عادة بين قوسين بجانب المسقط فالنقطة ١ مثلاً التى مسقطها المرقوم ١ (٣,٨) فى (شكل ١٢٦) هى النقطة الواقعة على العمود المقام من ١ على II (الذى تمثله ورقة الرسم) وعلى بعد منه يساوى ٣,٨ من الوحدات . والوحدة التى لا بد من معرفتها لكي يتحدد وضع النقطة فى الفراغ هى بعد معين يمثل وحدة الاطوال فى الطبيعة على حسب مقياس رسم معين . ومعنى هذا أن الوحدة على ورقة الرسم تتوقف على شيئين :

اولاً — نوع الوحدة المستعملة للقياس فى الطبيعة (المتر أو الياردة أو ...)
ثانياً — مقياس الرسم للخريطة (١ : ١٠٠ أو ١ : ٢٥٠٠ أو ...)
فاذا كانت وحدة الاطوال فى الطبيعة هى المتر مثلاً وكان مقياس الرسم ١ : ٢٠٠ فإن الوحدة على الخريطة تساوى فى هذه الحالة ٠,٥ سم^(١) . ولما كان

(١) هذا فى المسائل العملية والخرائط أما فى المسائل النظرية التى تترك وحدة الاطوال ومقياس الرسم فيها بنير تحديد فيكون البعد الذى يمثل الوحدة اختيارياً ويجب أن يفترضه الانسان (قبل أن يبدأ بالرسم) بحيث يكون فقط متناسباً مع أبعاد ورقة الرسم المطلوب حل المسألة عليها كما يجب أن يحتفظ به أثناء حل المسألة بأكملها .

قياس الابعاد والاطوال على الخريطة يستلزم تكرار استعمال الوحدة ونظراً لما يسيه القياس بهذه الوحدة الصغيرة من التعب وعدم الدقة فقد جرت العادة في



(شكل ١٢٦)

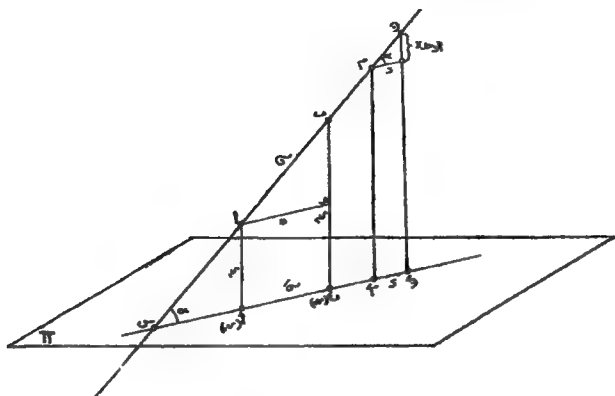
مثل هذه الاحوال باستخدام مقياس رسم كالذين في (شكل ١٢٦) يكون طوله متناسباً مع أبعاد الخريطة ويسمح في الوقت نفسه بقياس الاجزاء العشرية من الوحدة.

بند ١٤٣ : تمثيل الخط المستقيم

يتعين المستقيم بمعلومية المسقطين المرقومين لنقطتين من نقطه مثل $أ(١,٢)$ و $ب(٣,٤)$ حيث $١,٢$ هما رقما النقطتين $أ$ و $ب$ على التوالي ^(١). وتسمى النقطة $س$ لتقاطع المستقيم مع II بالوتر. واذا فرضنا في (شكل ١٢٧) أن $م$ و $هـ$ نقطتان مأخوذتان على المستقيم $هـ$ بحيث يكون الفرق بين

(١) يطلق أحياناً على طول المسقط $أ' ب'$ اسم البعد $د$ الاقوى ، للنقطتين $أ$ و $ب$ الواقعتين على المستقيم $هـ$ كما يطلق على البعد $د$ الذي يساوي الفرق بين ارتفاعيهما عن II اسم $د$ البعد الرأسى ، لهاتين النقطتين (شكل ١٢٧).

رقمها أو ارتفاعها عن Π مساوياً الوحدة فان المسقط الاقوى $م'$ $د'$ للبعد $م$ $د$ يسمى معدل المستقيم $و$.



(شكل ١٢٧)

فإذا رمزنا للمعدل بالرمز $و$ وإلى ميل المستقيم $و$ على المستوى Π بالرمز $م$ وزاوية الميل بالرمز α كان

$$م = \text{ظا } \alpha = \frac{1}{و}$$

ومعنى هذا أن المعدل والميل لمستقيم ما هما عكسهما أى أن كلا منهما مقلوب الآخر. فإذا قيل مثلاً إن ميل المستقيم هو $٣ : ٢$ (وهو الاصطلاح الفنى للدلالة على الميل) كان معنى ذلك أن

$$\text{الميل } م = \text{ظا } \alpha = \frac{٣}{٢} \text{ وأن المعدل } و = \frac{٢}{٣} = ١,٥ \text{ وحدة.}$$

ونقلت نظر القارئ المبتدئ إلى أن المعدل $و$ لا يمت إلى الوحدة إلا بصفة

الميل إذ ينما الوحدة هي بعد يحتفظ به ثابتاً لجميع عناصر المجموعة التي يراد تمثيلها في مسألة معينة نجد أن المعدل لا يمتد في هذه المجموعة يختلف باختلاف ميله فهو بعد متغير ويتراوح بين الصفر (إذا كان المستقيم عمودياً على Π) وبين ∞ (إذا كان المستقيم موازياً الى Π) فالمعدل لا يساوى الوحدة إلا إذا كان ميل المستقيم يساوى ١ أى إذا كانت الزاوية α تساوى 45° .

بند ١٤٤ : ترميز الخط المستقيم — مقياس الميل

يطلق اسم ترميز الخط المستقيم على عملية تعيين مساقط النقط الواقعة على المستقيم والتي أرقامها أعداد صحيحة من الوحدة أى مساقط النقط التي ارتفاعاتها عن Π هي ١ ٢ ٣ ٤ ... ويسمى حينئذ هذا المسقط المدرج بمقياس ميل المستقيم . وقد جرت العادة على تمثيل المستقيم في الإسقاط الرقى بمقياس ميله لأن هذه الطريقة أسهل وأوضح من تمثيله بالمسقطين المرقومين لنقطتين من نقطه .

بند ١٤٥ : ملاحظات

- ١ بين (شكل ١٢٨) مستقيماً σ معلوماً بالمسقطين المرقومين σ' (٢ ، ٦)
- ٢ (٨ ، ١) لنقطتين σ ب من نقطه والمطلوب :
 أولاً — إيجاد أثره σ على مستوى المقارنة Π
 ثانياً — إيجاد زاوية ميله α على المستوى Π
 ثالثاً — تعيين الطول الحقيقي للبعد σ
- ٣ رابعاً — إذا علم المسقط σ' لنقطة من نقطه مثل σ فالمطلوب إيجاد رقمها وبالعكس إذا علم رقم نقطة عليه فالمطلوب تعيين مسقطها على σ'
- ٤ خامساً — إيجاد المعدل وتدرج المستقيم

وبالعكس اذا فرضنا أنه يراد تعيين المسقط σ لنقطة مثل σ على المستقيم بحيث يكون رقها ϵ, η مثلاً فاننا نرمس مستقيماً موازياً للمسقط σ بحيث يبعد عنه في الاتجاه الموجب بعداً يساوي ϵ, η من الوحدات فهذا الموازي يلاقى حيثئذ الموقع $[\sigma]$ للمستقيم في الموقع $[\sigma]$ للنقطة المطلوبة ويكون مسقطها σ هو نقطة تقاطع σ مع العمود النازل من $[\sigma]$ على σ .

ولتدريج المستقيم نعين بالطريقة المذكورة آنفاً مساقط النقط التي أرقامها $١, ٢, ٣, ٤, \dots$ فيتم تدريج المستقيم ويكفي لذلك تعيين مسقطي نقطتين متتاليتين يكون رقاهما عددين صحيحين مثل ϵ, η لان البعد بين المسقطين يحدد في هذه الحالة المعدل الثابت ϵ, η للمستقيم فيمكن حيثئذ قياسه على σ مرات متعددة الى يمين النقطة σ للحصول على النقط $١, ٢, ٣, ٤, \dots$ ثم الى يسار النقطة ϵ للحصول على النقط $٣, ٢, ١, \dots$

بند ١٤٦ : تمثيل المستوى

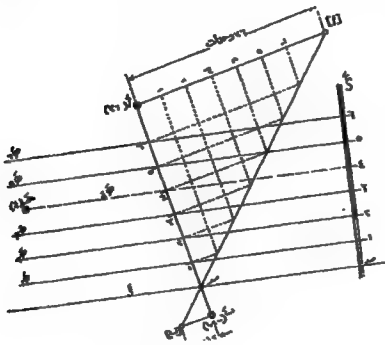
يتعين المستوى كما قدمنا في (بند σ) اذا علم منه ثلاث نقط أو نقطة وخط مستقيم أو مستقيمان متقاطعان أو متوازيان.

ويسمى خط تقاطع المستوى مع مستوى المقارنة بأثر المستوى ويرمز له عادة بالرمز Π كما تسمى المستقيمتان الموازيتان لهذا الاثر والموازية بالتالي لمستوى المقارنة اقصيات المستوى وهي خطوط تقاطع المستوى المعلوم مع مستويات أقصية (موازية الى Π). وكل أقصى من هذه الاقصيات هو المحل الهندسي لجميع نقط المستوى التي أرقامها متساوية ومساوية لارتفاع هذا الاقصى عن Π وتختار عادة الاقصيات التي ارتفاعاتها أعداد صحيحة مثل $\epsilon, \eta, \theta, \dots$ لتمثيل المستوى حيث يكفي اثنان منها لهذا الغرض.

١٤٧ : مسألة أساسية

إذا علمت (شكل ١٣٠) ثلاث نقط $أ(٧, ٦)$ ، $ب(١٠, ٢)$ ، $ح(٤)$ فال المطلوب إيجاد مقياس ميل المستوى المار بها .

لذلك نصل $أ ب$ وندرجه كما سبق شرحه في (بند ١٤٥) ثم نصل $ح$ (وهي مسقط النقطة الثالثة $ح$ التي رقبها ٤) بالنقطة ٤ على $أ ب$ وذلك بالمستقيم المتقطع الممين بالشكل فيكون هو المسقط ٤ لآقى المستوى الذى ارتفاعه ٤ ثم نرسم من



(شكل ١٣٠)

نقط التدرج الأخرى على $أ ب$ مستقيمت موازية إلى ٤ ونرسم مستقيما حيثما اتفق عموديا على هذه المستقيمت فيقابلها في نقط أرقامها صفر ١ ٢ ٣ ٤ ...

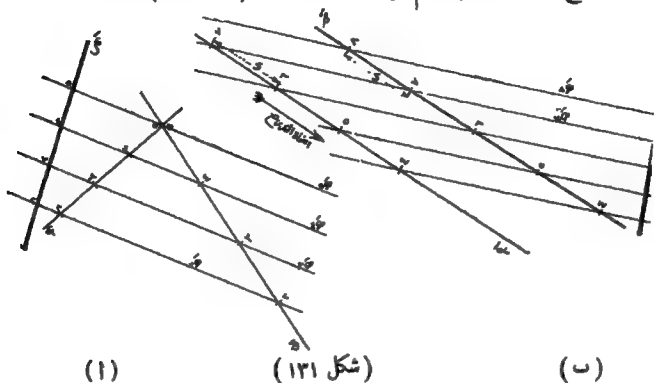
و يكون هذا المستقيم المدرج هو مقياس

الميل المطلوب ٤ للمستوى وقد رسمناه لهذا السبب مزدوجا .

وإذا كان رقم النقطة $ح$ ليس صحيحا كأن كان $٢,٨$ مثلا فيعين أولا مسقط النقطة الواقعة على المستقيم $أ ب$ والتي رقبها $٢,٨$ (بند ١٤٥) ثم نصلها بالمسقط $ح$ فيكون الواصل هو مسقط الآقى الذى ارتفاعه $٢,٨$ ثم نرسم الآقيت الأخرى ومقياس الميل كما تقدم .

وإذا علم المستوى بمستقيم ونقطة فانه يمكن إيجاد مقياس ميله بنفس الطريقة

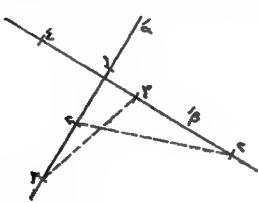
السابقة. أما اذا كان المستوى متعينا بمستقيمين متقاطعين أو متوازيين α و β معلوم كل منها بمقياس ميله كان تعيين الاقنيات وبالتالي مقياس ميل المستوى بسيطا جداً لأن مساط الاقنيات تكون في هذه الحالة المستقيمت التي تصل أزواج النقط المتساوية الرقم على مسقطي المستقيمين (شكل ١٣١).



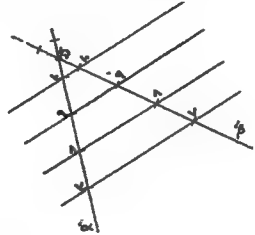
بشر ١٤٨ : المستقيمت المتقاطعة والمتوازية

يؤخذ من (شكل ١٣١ ١) أن الشرط اللازم والافي لانه يكونه مستقيمه α و β معلوماه بمقياسي ميلهما متقاطعين هو توازي المستقيمت الواصلة بين النقط المتناظرة (زوات الارقام المتساوية) على المسقطين .
فالمستقيمان الميئان في (شكل ١٣٢ ١) متقاطعان بينما المستقيمان الميئان في (شكل ١٣٢ ب) غير متقاطعين أى لا يمكن أن يمر بهما مستو واحد .
وهناك طريقة أخرى لمعرفة ما اذا كان مستقيمان معلومان متقاطعين أو غير متقاطعين : فنفرض لذلك أن α' هي نقطة تقاطع مسقطي المستقيمين ثم نجد

رقم النقطة α التي مسقطها β' باعتبارها إحدى نقط المستقيم الاول ثم نجد رقمها باعتبارها واقعة على المستقيم الثاني (بند ١٤٥) فإذا تساوى الرقم كان المستقيمان متقاطعين وإلا فهما غير متقاطعين . وتستعمل هذه الطريقة في حالة ما اذا كان كل من المستقيمين معلوماً بنقطتين من نقطه أما اذا كان المستقيمان معلومين بمقياسي ميلهما كما في (شكل ١٣٢) فلا شك أن الطريقة الاولى أسهل .



(ب)



(شكل ١٣٢)

(١)

وننتج من (شكل ١٣١ ب) أنه اذا علم مستقيمان بمقياس الميل لكل منهما فإن الشرط اللازم واللافي لانه يكون المستقيمان متوازيين هو اعطاه جعل أمر مقياسي الميل ينطبق على الآخر بمجرد تحريك مركزه انتقاله بالتوازي لنفسه وبعبارة أوضح يكون المستقيمان متوازيين اذا توافرت الشروط الثلاثة الآتية معاً :

اولاً — أن يكون مسقطا المستقيمين متوازيين

ثانياً — أن يكون المعدلان على المسقطين متساويين

ثالثاً — أن يكون اتجاه التدرج واحداً لكل من المستقيمين

ففي (شكل ١٣١ ب) يميل كل من المستقيمين على مستوى المقارنة في اتجاه السهم وعليهما التدرج في كل من المستقيمين تنازلي في هذا الاتجاه فالمستقيمان لهذا

السبب ولتوافر الشرطان الاولان أيضا متوازيان . أما اذا كان التدرج تنازليا بالنسبة لاحد المستقيمين وتصاعدياً بالنسبة للآخر كان المستقيمان غير متوازيين . حتى ولو توافر الشرطان الباقيان .

ملحوظة

يمثل المستوى على الأغلب في الاسقاط الرقى بمقياس الميل فاذا قيل المعلوم مستو فمعنى ذلك أن مقياس الميل هو المعلوم واذا كان المطلوب تعيين مسو فيكون المقصود بذلك إيجاد مقياس ميل هذا المستوى .

الفصل الثالث

مسائل الوضع

بشر ١٤٩ : المسألة الأولى

(١) اذا علم مستو A بمقياس ميله 'ع' وعلم المسقط غير المدرج 'هـ'

لمستقيم واقع فيه فالمطلوب
تدريج 'هـ' .

نقط التدريج المطلوبة

٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ... المينة

في (شكل ١٣٣) هي نقط

تقاطع المسقط المعلوم

'هـ' مع المستقيمات

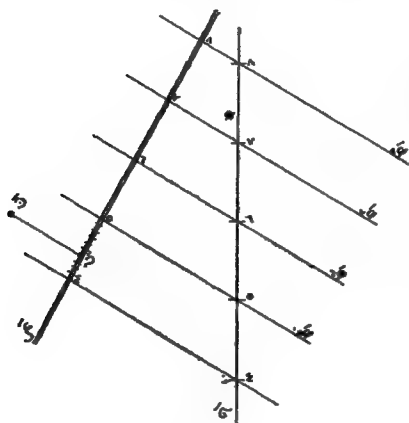
المرسومة من النقط

٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ...

عمودية على 'ع' لان

هذه المستقيمات هي

مساقط أقيات المستوى .



(شكل ١٣٣)

(ب) اذا علم المسقط غير المرقوم 'د' لنقطة 'هـ' واقعة في المستوى A السالف

لذكر فالمطلوب تعيين رقم النقطة 'د' .

لذلك نزل من 'د' عموداً على 'ع' فيقابل في 'هـ' فيكون هذا العمود مسقط

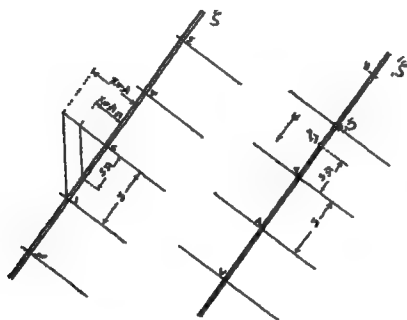
أقوى المستوى المار بالنقطة 'د' وتكون إذن النقطة 'د' التي مسقطها 'هـ' على نفس

منسوب النقطة 'د' . فلذا عينا رقم النقطة 'د' وذلك إما بقراءته مباشرة على

مقياس الميل α' أو بتطبيق المستوى المسقط للمستقيم α نى الميل الاعظم على Π (بند ١٤٥) كان هو نفس الرقم المطلوب للنقطة ω (وهذا الرقم فى شكل ١٣٣ هو ϵ و ϵ من الوحدات).

١٥٠ : المآزى :

إذا علم مستوي بمقياس ميله α' والمسقط المرقوم ω (١٠٠) لنقطة ω خارجة عنه فال المطلوب تعيين مقياس الميل α' للمستوى المار بالنقطة ω موازياً للمستوى المعلوم .



(شكل ١٣٤)

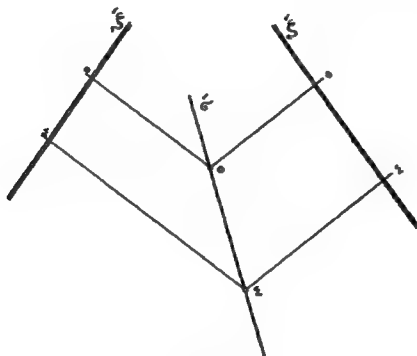
لذلك نرسم من ω مستقيماً α' موازياً للمستقيم α نى الميل الاعظم α نرسم بناء على ما سبق ذكره فى (بند ١٤٨) من ω (١٠٠) المستقيم α' موازياً الى α (شكل ١٣٤) ثم ندرجه بحيث يكون المعدلان على المسقطين متساويين واتجاههما لتدرج لهما واحداً فيكون α' هو المسقط المدرج للمستقيم α أى مقياس الميل للمستوى المطلوب .

وبلاحظ أنه اذا كان رقم النقطة المعلومة ليس عدداً صحيحاً مثلاً ٩,٦ فانتا

نبدأ برسم ϵ_1' كما سبق ثم نعين عليه النقطة التي رقبها عدداً صحيحاً وتسبق أو تلي مباشرة النقطة المعلومة وذلك بأن نقيس على ϵ_1' في اتجاه السهم مثلاً ابتداء من النقطة ٩,٦ بعداً يساوى ٦,٠ و حيث ω هو معدل مقياس الميل المعلوم ϵ_1' فنحصل بذلك على النقطة التي رقبها ٩ ثم نجد النقط ٨,٠ ١٠,٠ ... فيتم بذلك تدريج ϵ_1' .

١٥١ : المسألة الثالثة

المطلوب تعيين خط تقاطع مستويين معلومين بمقاييس ميلهما ϵ_1' و ϵ_2' .
لذلك نصل في المسقط قطق تقاطع أزواج الاقنيات المتساوية المنسوب في المستويين بالمستقيم σ' فيكون σ' هو المسقط المدرج أى مقياس الميل لخط التقاطع المطلوب (شكل ١٣٥).



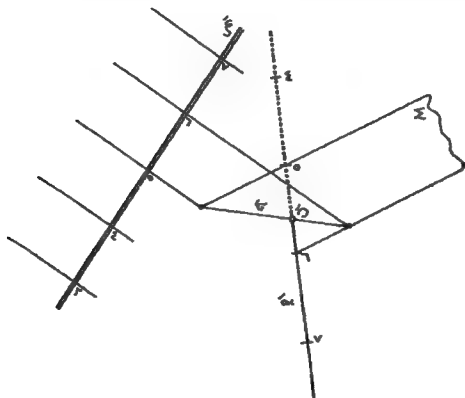
(شكل ١٣٥)

فاذا كان مقياسا الميل ϵ_1' و ϵ_2' متوازيين (وكان المستقيمان ϵ_1' و ϵ_2' نفساهما غير متوازيين في الفراغ) فإن خط تقاطع المستويين يكون أحياناً وللحصول على نقطة من نقطه نفرض مستوياً ثالثاً حيثما اتفق ثم نعين خطي

تقاطعها مع المستويين العلويين فتكون نقطة تقاطع هذين الخطين هي النقطة المطلوبة (١).

بند ١٥٢ : المسألة الرابعة

إذا علم مقياس الميل لكل من مستوي A ومستقيم α فالمطلوب تعيين المسقط المرقوم لنقطة تقاطعها σ .



(شكل ١٣٦)

لذلك نمر بالمستقيم α مستويًا مساعدًا Σ يؤخذ حيثما اتفق ثم نجد خط تقاطع المستويين A و Σ فإذا رمزنا لخط التقاطع بالرمز σ وتقاطع المستقيمان α و σ في النقطة σ كانت هي النقطة المطلوبة.

(١) توجد طريقة أسهل وأسرع للحصول على إحدى نقط خط التقاطع في هذه الحالة : فنفرض لذلك أن نقط التدرج على مقياس الميل α' هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ وعلى مقياس الميل σ' هي $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ ثم نصل $\alpha_1 \sigma_1, \alpha_2 \sigma_2, \alpha_3 \sigma_3, \dots$ فتقاطع هذه المستقيمت في نقطة على خط التقاطع . وترك إثبات صحة هذه الطريقة للقارىء .

ولتطبيق هذا الحل إسقاطياً في (شكل ١٣٦) نرسم من أى نقطتين مثل ٦٩٥ من نقط التدرج على المسقط α' للمستقيم المعلوم — مستقيمين متوازيين ونعتبرهما مسقطي الاقبيين ٦٩٥ في المستوى المساعد Σ ويكون المسقط σ' لخط تقاطع المستويين Σ و A هو المستقيم الذى يصل فى المسقط نقطة تقاطع الاقبيين ٥ بنقطة تقاطع الاقبيين ٦ في المستويين . وتكون النقطة σ' لتقاطع α' و σ هى مسقط النقطة المطلوبة σ التى يمكن حينئذ تعيين رقبها إما باعتبارها إحدى نقط المستقيم α أو إحدى نقط المستوى A وهذا الرقم فى (شكل ١٣٦) هو ٥,٦ من الوحدات .

الفصل الرابع

مسائل القياس

نبر ١٥٣ : المسألة الأولى

إذا علم مستو A ونقطة E فالمطلوب إيجاد العمود المرسوم من النقطة E على المستوى A وبالعكس إذا علم مستقيم ونقطة فالمطلوب تعيين المستوى المار بالنقطة عمودياً على المستقيم.

قبل أن نبدأ بحل هذه المسألة نشرح فيما يلي الشرط اللازم والكافي لتعاقد مستقيمين في الفراغ إذا توازى (أو انطبق) مسقطاهما :

لذلك نفرض في

(شكل ١٣٧) أن $\alpha \neq \beta$

المسقطان التوازيان

للمستقيمين غير المتقاطعين

$\alpha \neq \beta$ وأن α و β هما

المعدلان على $\alpha \neq \beta$ على

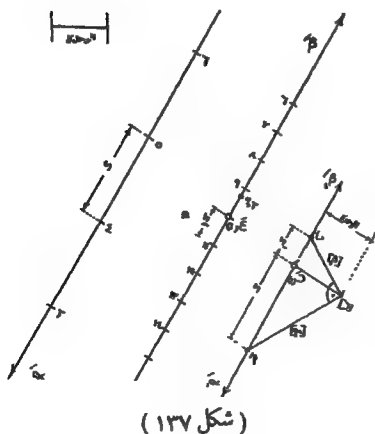
التوالي . فإذا افترضنا نقطة

في الفراغ مثل δ ورسمنا

منها مستقيمين α, β

يوازيان $\alpha \neq \beta$ على التوالي

فإن $\alpha \neq \beta$ يعينان في هذه



(شكل ١٣٧)

الحالة مستويًا وعمودياً على Π ويتعين هذا المستوى بأنه δ وهو المستقيم المرسوم من δ موازياً إلى α أو β وبتطبيق هذا المستوى على Π نحصل على المثلث $[\delta] \alpha' \beta'$

المبين بالشكل (حيث α, β هما α, β على Π لانتا فرضنا رقم β مساويا للوحدة) وتكون الزاوية المحصورة بين ضلعيه $[\alpha]$ $[\beta]$ (الذين هما موقعا المستقيمين α, β) هي المقدار الحقيقي للزاوية المحصورة بين α, β وكذا بين α, β فلكي تكون هذه الزاوية قائمة يجب أن يكون

$$1 - \alpha \beta = 0$$

وهذا هو الشرط اللازم والكافي لتعاقد المستقيمين α, β اللذين مسقطاهما متوازيان ^(١). ومعنى هذا الشرط :

أولا — أن المعدلين α, β عدلان متعاكسان

ثانيا — أن اتجاه تدريج أحد المستقيمين مضاد لاتجاه الآخر .

وبالعكس اذا توافر هذان الشرطان في مستقيمين متوازيين α, β كان

α, β المسقطين المدرجين أو مقياسي الميل لمستقيمين α, β متعامدين في الفراغ .

واذا كان أحد المعدلين معلوماً أمكن إيجاد المعدل الآخر . فلذا فرضنا في (شكل

١٣٧) أن مستقيما α معلوم بمسقطه المدرج α' (أى أن المعدل α معلوم) ورسمنا من المسقط المرقوم ع' (١٠) نقطة مثل ع مستقيما β يوازي α' ثم درجنا β في الاتجاه المضاد لتدريج α' بحيث يكون المعدل β على β' هو مقلوب المعدل α كان β هو المسقط المدرج أو مقياس الميل لمستقيم β مار بالنقطة ع ومتعاقد مع المستقيم α .

فلذا اعتبرنا α' في (شكل ١٣٧) مقياس ميل لمستو معلوم مثل A (ويجب لذلك تصويره مرسوما مزدوجا في الشكل) فإن المستقيم β السالف الذكر يكون

(١) يمكن كتابة هذا الشرط على الصورة $1 - \alpha \beta = 0$ (حيث α, β هما ميلا للمستقيمين α, β) وهي الصورة التي تستعمل عادة في الهندسة التحليلية .

في هذه الحالة هو العمود النازل من ع على المستوى A واذا كان α' مسقطاً لمستقيم معلوم α كان β' مقياس ميل المستوى المار بالنقطة ع عمودياً على المستقيم α (ويكون β هو المستقيم ذو الميل الاعظم المار بالنقطة ع في هذا المستوى) وبذا نكون قد اتينا من حل المسألة الاولى بجزئها ^(١).

بند ١٥٤ : المسألة الثانية

المطلوب تطبيق مستو معلوم A على المستوى الرقى II أو على أحد المستويات الموازية له .

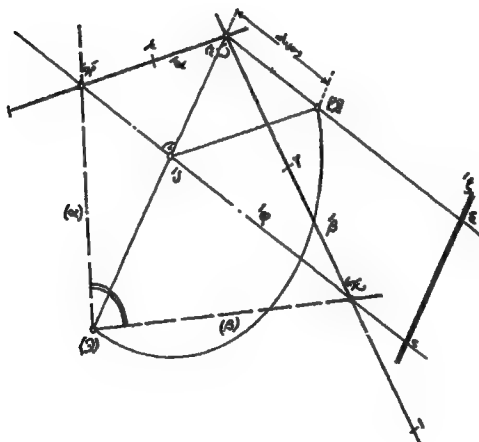
لا تختلف هذه المسألة عن المسألة المشابهة في طريقة مونتج للاسقاط (بند ١٧) ولذا سنكتفى بحل مثال يبين الخطوات الرئيسية في عملية التطبيق في الاسقاط الرقى : اذا علم مستقيمان α و β متقاطعان في د فال المطلوب إيجاد المقدار الحقيقي للزاوية المحصورة بينهما . فهذه الزاوية يمكن الحصول عليها بتطبيق المستوى A المتعين بالمستقيمين المعلومين (شكل ١٣٨) حتى يصير موازياً (أو منطبقاً) على المستوى الرقى II .

لذلك نختار مستويًا مناسباً Φ موازياً إلى II ونطبق المستوى A عليه (وقد اخترنا في الشكل المستوى الذي منسوبه ٢) حيث محور الانطباق هو الاقوى φ الذي

(١) اذا فرضنا أن رقم النقطة ع في (شكل ١٣٧) ليس عدداً صحيحاً مثلاً ٩,٣ فإنا نبدأ كما تقدم بتعيين γ وذلك برسم مثلث قائم الزاوية مثل [د] ' ا ' ب ' (وقد جرت العادة تسهلاً للعمل بأن يرسم هذا المثلث بحيث تنطبق النقطتان ' ا ' و γ ' على نقطتين من قوس تدريج α') ثم نقيس على β' ابتداء من ٩,٣ إما ٣,٩ و γ في اتجاه السهم أو ٧,٥ و γ في الجهة الاخرى لنحصل على النقطة التي رقبها ٩ أو النقطة التي رقبها ١٠ على التوالي ثم نكمل تدريج β' كما تقدم .

منسوبه يساوى منسوب المستوى Φ (فى شكل ١٣٨ Φ هو المستقيم الذى يصل
 نقطتى التدرج $\alpha' \beta'$ على $\alpha' \beta'$) . فلذا أنزلنا من β' عموداً على Φ
 ليقابله فى α' وقسنا على هذا العمود ابتداء من α' البعد $\alpha' \beta'$ = $[\beta']$
 وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه $\beta' \alpha'$ ووضعه الآخر ارتفاع النقطة

الوحدة



(شكل ١٣٨)

بند ١٥٥ : أمثلة تطبيقية

مثال ١ : المطلوب تعيين الزاوية الزوجية بين مستويين معلومين .
 معروف أن أى مستو عمودى على المستويين المعلومين (أى عمودى على خط تقاطعهما) يقطعهما فى مستقيمين يحصران بينهما زاوية مستوية مساوية للزاوية الزوجية المطلوبة . وعلى هذا يمكن تاختيص خطوات الحل الفراغى فيما يلى :

أولاً — نجد خط التقاطع σ للمستويين المعلومين $A \text{ و } B$.

ثانياً — نختار نقطة مثل ω على σ ونجد المستوى Σ الذى يمر بالنقطة ω عمودياً على σ فيكون Σ مستوياً عمودياً على المستويين المعلومين .

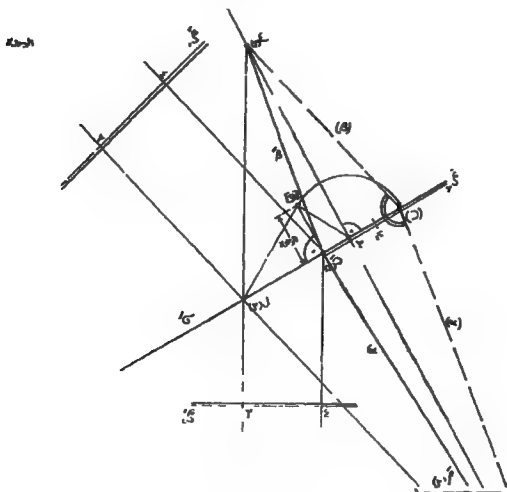
ثالثاً — نعين خطى تقاطع Σ مع $A \text{ و } B$ وسنرمز لها بالرمزين $\alpha \text{ و } \beta$ على التوالى .

رابعاً — نجد المقدار الحقيقى للزاوية المستوية بين $\alpha \text{ و } \beta$ وذلك بتطبيق المستوى Σ كما تقدم فى (بند ١٥٤) فيكون هو مقدار الزاوية الزوجية بين المستويين . ويجد القارىء هذه الخطوات محلولة إسقاطياً فى (شكل ١٣٩) فالمستويان $A \text{ و } B$ معلومان بمقياسى ميلهما $\alpha' \text{ و } \beta'$ وقد اكتبنا برسم الاقبيين $\alpha \text{ و } \beta$ فى كل منهما واقتصرنا كذلك على رسم الجزء ω (٤) لـ α' من المسقط σ' لخط التقاطع . فإذا كان α' هو مقياس ميل المستوى Σ المرسوم من النقطة ω (٤) عمودياً على σ (بند ١٥٣) وكانت α على هذا المقياس هى مسقط النقطة التى ارتفاعها α وحدات (١) فإن العمود المقام من α على α' يقابل العمود المقام على β' من النقطة α فى النقطة α' (٣) كما يقابل العمود المقام على β' من α فى النقطة β' (٣) فإذا وصلت النقطة ω (٤) بالنقطتين α' (٣) و β' (٣) حصلنا على المسطتين $\alpha \text{ و } \beta$

(١) للحصول على α قيس على العمود المقام من ω على σ' بعداً ω (٥) مساوياً للوحدة ثم فصل [ω] لـ α فالعمود المقام على هذا الواصل من النقطة [ω] يقابل α' (الذى افترضناه منطبقاً على σ') فى النقطة α .

الخطى تقاطع Σ مع المستويين A و B . ويتطابق المستوى Σ على المستوى
الافقى الذى منسوبه ٣ مثلاً نحصل على الموقنين (α) و (β) للمستقيمين
 α و β وبذا يكون المقدار الحقيقى للزاوية الزوجية المطلوبة هو الزاوية
' (د) ب' أو المكمل لها .

ملحوظة : أى مستويين متقاطعين يحصران بينهما فى الواقع زاويتين زوجيتين
مجموعهما 180° فإذا تكلمنا عن «الزاوية الزوجية» بين مستويين فأما نقصد بذلك مع



(شكل ١٣٩)

التجاوز إحدى هاتين الزاويتين وذلك كما تكلم مع التجاوز أيضاً عن «الزاوية المحصورة»
بين مستقيمين متقاطعين فى حين أنها يحصران بينهما زاويتين لازاوية واحدة .
والزاوية الزوجية بين مستويين يمكن قياسها أيضاً كما هو معلوم بالزاوية

المستوية المحصورة بين العمودين النازلين على المستويين من أية نقطة في الفراغ وهذه طريقة أخرى لتقدير الزاوية الزوجية ربما كانت في بعض الاحيان أبسط من الطريقة السابقة .

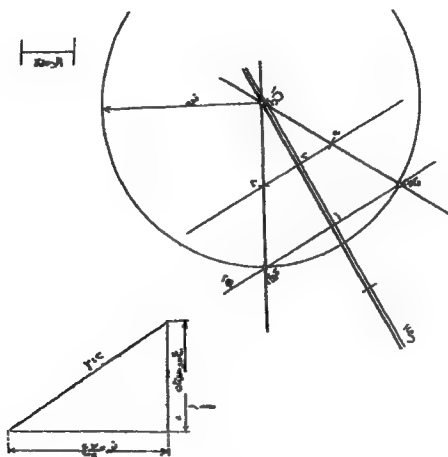
مثال ٢ : المطلوب تعيين اتجاهي المستقيمتين التي ميلها على المستوى الرقى II يساوى ٢ : ٣ مثلاً والواقعة في مستو A معلوم بمقياس ميله ٤ ' .

الحل الفراغى لهذا المثال يتلخص في اختيار نقطة ما مثل ρ في المستوى A واعتبارها رأساً لمخروط دائرى قائم محوره عمودى على II ويميل عليه بزاوية ظلها $\frac{2}{3}$ فيتقاطع حينئذ المستوى A مع هذا المخروط في راسمين يحددان الاتجاهين المطلوبين . وللحصول على هذين الراسمين نختار مستوياً أفقياً مناسباً Φ ليقطع المستوى A في أحد أقطابه φ ويقطع المخروط في دائرة نصف قطرها $\rho = \frac{3}{4} \epsilon$ (حيث ϵ ارتفاع المخروط) فلذا كانت ρ ب نقطة تقاطع φ مع هذه الدائرة كان الراسمان أو الاتجاهان المطلوبان هما المستقيمان ρ و ρ' .

ففى (شكل ١٤٠) النقطة ρ هي المسقط المرقوم للنقطة ρ في المستوى A وهي في الوقت نفسه مركز الدائرة التي نصف قطرها $\rho = \frac{3}{4} \times ٢ = ٣$ وحدات والتي تمثل قاعدة المخروط الذى رأسه ρ وزاوية قاعدته هي ظل $\frac{2}{3}$ وارتفاعه $\epsilon = ٣ - ١ = ٢$ وحدة (لان المستوى الاقوى Φ الذى اخترناه منسوبه ١) . فلذا كان φ مسقط اقوى المستوى A الذى منسوبه ١ وتقاطع φ مع هذه الدائرة في ρ و ρ' كان المستقيمان ρ و ρ' ب مسقطى الاتجاهين المطلوبين .

معمود : المستقيم φ إما أن يقطع قاعدة المخروط في نقطتين منفصلتين مثل ρ و ρ' كما هو الحال في (شكل ١٤٠) وفي هذه الحالة يكون للسألة حلان

(أى أنه يمكن من أية نقطة في المستوى A رسم مستقيمين واقعين بينهما في A بحيث يميل كل منهما على المستوى الرقى II بميل يساوى ٢ : ٣) أو يكون مماسا لهذه القاعدة وفي هذه الحالة لا يكون للسالة سوى حل واحد (حيث يكون



(شكل ١٤٠)

الاتجاه المطلوب هو اتجاه المستقيمت ذوات الميل الاعظم في المستوى A) واخيراً يجوز أن يكون φ غير قاطع لقاعدة المخروط وفي هذه الحالة يتعذر الحل . وهذه الحالات الثلاث يكون حدوثها على حسب ما اذا كان ميل $A \leq 2 : 3$ على التوالى .

مثال ٣ : المعلوم مستقيم α والمطلوب تعيين المستويين A و B المارين به واللذين يميل كل منهما على المستوى الرقى II بزوايا مقدارها θ .

الباب التاسع

السطوح الطبوغرافية

الفصل الاول

كلمة عامة وتعاريف

بند ١٥٦ : ماهية السطوح الطبوغرافية

قدمنا في (بند ٤٢) أن السطوح يمكن تقسيمها على وجه العموم الى قانونية وغير قانونية على حسب ما اذا كان يمكن أو لا يمكن اعتبارها متولدة عن خط معين يتحرك بحيث يكون خاضعاً أثناء الحركة لقانون معين . وقد رأينا في الابواب السابقة أمثلة كثيرة على النوع الاول فالسطوح الدورانية واللولية والمسطرة الخ كلها من النوع القانوني بحيث يكفي لكي يتحدد أى سطح منها أن يعلم المنحني الراسم وقانون حركته .

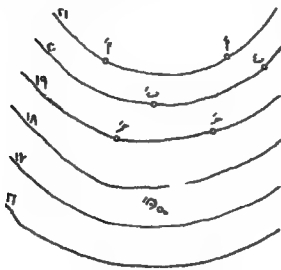
أما في السطوح غير القانونية فانه ينشأ عن عدم إمكان بيانها بحركة مثل ذلك المنحني الراسم ضرورة معرفة أكبر عدد ممكن من نقطها ومنحنياتها ليكون من المستطاع وصفها على وجه التقريب . وتعطى هذه المنحنيات عادة بمساقطها على صورة منحنيات بيانية مرسومة على الورقة ومحددة للسطح ولهذا السبب يطلق أحياناً على السطوح غير القانونية اسم سطوح بيانية .

ومن أهم الامثلة على هذا النوع من السطوح — سطح الارض بارتفاعاته وانخفاضاته وسهوله وودياته ويطلق عليه عادة اسم السطح الطبوغرافي نسبة الى

الطبوغرافيا وهو العلم الذى يبحث فى كيفية الحصول على النقط والمنحنيات المحددة لقطعة من الارض ورسمها بيانياً على الورقة .

بشر ١٥٧ : خطوط المنسوب

جرت العادة كما قدمنا فى (بند ١٤٠) على استخدام طريقة الاسقاط الرقى لتمثيل السطوح الطبوغرافية وفى هذه الحالة يكون المستوى الرقى (مستوى الورقة) ممثلاً لسطح البحر ومنسوبه صفر — كما جرت على اختيار منحنيات خاصة على السطح الطبوغرافى يطلق عليها اسم خطوط المنسوب أو منحنيات المنسوب أو خطوط الكنتور لتحديد السطح (شكل ١٤٢) . وتمثل هذه الخطوط منحنيات



(شكل ١٤٢)

مع السطح الطبوغرافى مع مستويات أفقية (موازية للمستوى الرقى) يرتفع كل منها عن الآخر بمقدار ثابت ع وكل خط من هذه الخطوط مثل الخط ٢١ فى الشكل هو المحل الهندسى لجميع النقط الواقعة على سطح قطعة الارض الميمنة والتي منسوب كل منها ٢١ وحدة (متراً) فوق سطح البحر (١) .

ويستطيع القارىء أن يكون لنفسه فكرة عن هذه الخطوط اذا لاحظ شاطئ نهر مثلاً بعد انحسار المياه عنه .

(١) اذا كانت إحدى النقط تحت سطح البحر فان منسوبها يكون سالباً على أنه اذا كانت قطعة الارض كلها أوطى من سطح البحر فيكتفى عادة حيثن بكتابة المناسيب كلها مجردة عن الاشارات السالبة .

بند ١٥٨ : الخرائط الطبوغرافية

تسمى الخريطة المحتوية على مجموعة من خطوط المنسوب المحددة لقطعة من الارض خريطة طبوغرافية لهذه القطعة أو خريطة كتور أو خريطة ذات مناسيب .
والذى يلاحظه الانسان اذالقى نظرة على خريطة طبوغرافية مثل الخريطة الميينة فى (شكل ١٤٢) أننا من الوجهة النظرية نجعل كل مايتعلق باجزاء سطح الارض الممثلة بالشرائط المحصورة بين كل خطين متتاليين من خطوط المنسوب بمعنى أن منسوب النقطة ϕ التى مسقطها ϕ' فى هذه الخريطة مجهول نظرياً ولكنه فى الواقع معلوم ويساوى بالتقريب $17,5$ كما سيأتى بيانه وذلك لاننا نفترض عادة أن السطح منتظم فى شكله الى حد ما وأن ليست هناك تغيرات فجائية كبيرة .
ويؤخذ مما تقدم أنه كلما كثرت خطوط المنسوب وصغرت بذلك تلك الشرائط التى لا يمكن الحكم عليها الا بوجه التقريب أو بمعنى آخر كلما صغر الارتفاع ع الذى أشرنا اليه فى (بند ١٥٧) بين كل مقطع أفقى وآخر — كلما كان تحديد السطح أدق على أن هذه الدقة تتوقف على نوع العمل المطلوب انشاؤه على قطعة الارض ويتراوح الفرق بين منسوبى أى خطين متتاليين من خطوط المنسوب عادة من ١ الى ٥٠ متراً .

بند ١٥٩ : عدم تقاطع خطوط المنسوب فى الخرائط العادية

لما كانت معظم أجزاء سطح الارض هى بحيث أن أى مستقيم رأسى يلاقى السطح فى نقطة واحدة فإنه ينشأ عن ذلك عدم إمكان تقاطع أى خطين مختلفين من خطوط المنسوب فى الخرائط العادية وإلا كان معنى ذلك أن المستقيم الرأسى المار بنقطة التقاطع يلاقى السطح فى نقطتين مختلفتين . على أن هذا لا يمنع من وجود نقط على سطح الارض يمكن أن يتقاطع عندها خط واحد من خطوط المنسوب مرة أو أكثر (مثل النقطة المعقودة فى شكل ٤٠) .

بند ١٦٠ : مهمة الهندسة الوصفية

إذا اريد عمل مشروع مثل انشاء طريق أو شريط سكة حديد على قطعة من الارض فان أول مايجب القيام بعمله هو مسح هذه القطعة برفع نقطها المختلفة أى نقلها من الطبيعة الى ورقة الرسم وذلك بواسطة الطرق المختلفة المستعملة فى المساحة وتوصيل النقط المتساوية المنسوب بعضها ببعض نحصل على خريطة طبوغرافية لقطعة الارض مبنياً عليها خطوط المنسوب .

وبعد الانتهاء من هذه العملية وتخطيط المشروع على الخريطة تستخدم نظريات الهندسة الوصفية فى تعيين ورسم منحنيات تقاطع سطوح الميل مع سطح الارض وكذا المقاطع العرضية والطولية مبنياً عليها مقادير الحفر والردم الى غير ذلك مما سنبينه فى الفصول التالية .

الفصل الثانى

بعض المسائل الاساسية

١٦١ : تقاطع السطح الطبوغرافى مع

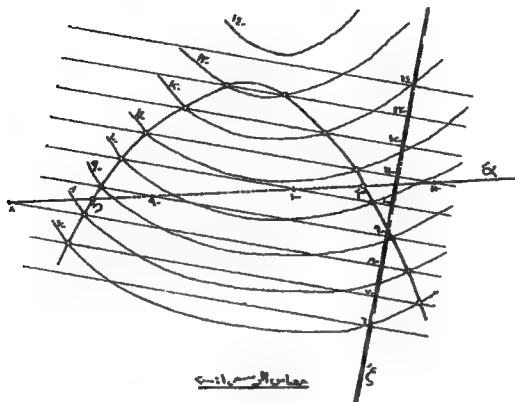
يبين (شكل ١٤٣ ١) خريطة طبوغرافية لقطعة من الارض ومقياس الميل
٥٧٠ ٥٨٠ ٥٩٠ ٥٩٠... مستقيمت عمودية على 'أ' فقطع كل مستقيم منها خط
المنسوب المتساوى معه فى الارتفاع فى نقطتين أو أكثر كان المنحنى الذى يصل
هذه النقط هو مسقط خط تقاطع سطح الارض مع المستوى المعلوم ويلاحظ
فى رسم هذا المنحنى أن يكون متصلاً ومتظماً بقدر الامكان وألا يكون به بروزاً
فجائياً. وإذا أريد إيجاد الشكل الحقيقى لخط التقاطع يطبق المستوى A على أحد
المستويات الاقضية الموازية الى II .

والمستوى Φ فى (شكل ١٤٣ ب) العمودى على II والذى يمثله الاثر
' Φ ' يسمى أحياناً «مستوى بروفيلى» ويقطع السطح الطبوغرافى فى منحن يطلق عليه
اسم المقطع الجانبي أو البروفيل . وإذا فرضنا أنه يراد إنشاء مشروع ما على قطعة
الارض الميئة بالشكل فان هذا المقطع الجانبي يسمى مقطعاً طويلاً أو عرضياً على
حسب ما اذا كان المستوى Φ ماراً بمحور المشروع (اذا فرضنا أن هذا المحور
خط مستقيم) أو عمودياً عليه (١) .

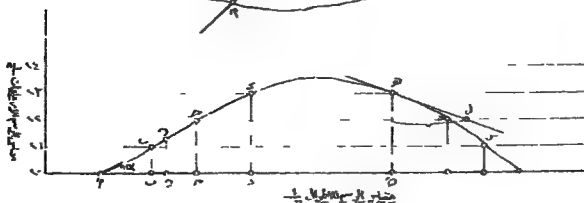
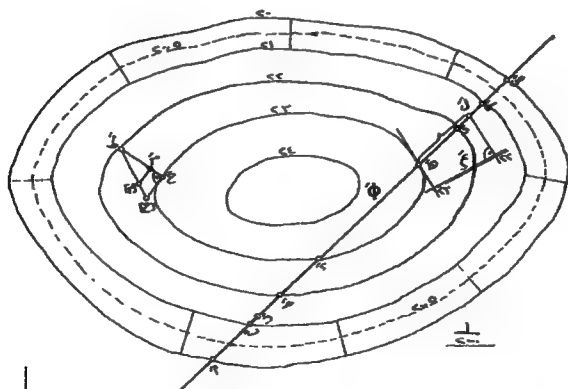
ولايجاد الشكل الحقيقى للمقطع الجانبي يلزم تطبيق المستوى القاطع Φ على أحد
المستويات الموازية الى II ويختار عادة هذا المستوى بحيث يكون منسوبه مساوياً

(١) اذا كان محور المشروع منحياً فان المقطع الطولى يطلق حيثنذ على منحنى
تقاطع السطح الطبوغرافى مع الاسطوانة التى رواستها رأسية ودليها المحور المنحنى .

الباب التاسع : السطوح الطبوغرافية



(شكل ١١٤٣)



على الاقل لمنسوب أوطى نقطة على المقطع (وهذا المنسوب هو ٢٠ في شكل ١٤٣ ب) . ويحسن منعاً لتراحم الخطوط إجراء عملية التطبيق في هذه الحالة بعيداً عن الخريطة الطبوغرافية وذلك بنقل المستقيم ' ا ' ب ' ... ' س ' من ' كما هو الى الفضاء المتسع من ورقة الرسم وإقامة أعمدة على هذا المستقيم من النقط ب ' ح ' ... ∞ ... فاذا قيس على هذه الاعمدة البعد ب ' ب مساوياً الى زيادة ارتفاع النقطة ب عن المنسوب ٢٠ أى مساوياً الى مترواحد والبعد ح ' ح مساوياً الى ٢ متر وهكذا فان المنحنى ' ا ' ب ' ح ' ز ' ه ' و ' س ' من ' يمثل حينئذ الشكل الحقيقي للمقطع . ونظراً الى أن مقياس الرسم في الخرائط الطبوغرافية يؤخذ عادة صغيراً (فهو في شكل ١٤٣ ب مثلاً يساوى ١ : ٢٠٠٠) بحيث يكون من الصعب بيان الارتفاعات ب ' ب ح ' ح ' ... يمثل هذا المقياس لانها تكون في هذه الحالة صغيرة صغراً لا يسمح بتميز شكل المقطع — لذلك جرت العادة للتغلب على هذه الصعوبة بتغيير مقياس الرسم للارتفاعات وتكبيره ١٠ أضعاف أو ٢٠ ضعفاً عن مقياس الرسم للخريطة . ففى (شكل ١٤٣ ب) فرضنا أن مقياس الرسم للخريطة التالى للاطوال ' ا ' ب ' ح ' ... هو ١ : ٢٠٠٠ في حين أن مقياس الرسم للارتفاعات هو ١ : ٢٠٠ .

ويلاحظ أنه لازوايا الميل ولا الاطوال ب ' ب ح ' ... على المنحنى تظهر في مثل هذا الشكل المكبر على حقيقتها ولكن لما كان هذا الشكل مؤثلاً مع الشكل الحقيقى للمقطع (الذى يمكن الحصول عليه بجعل مقياس الرسم للارتفاعات مساوياً لمقياس الرسم للاطوال) اثلاً متوازياً حيث محور الالتاف هو المستقيم ' ا ' من ' (بند ١٢) لنا كانت المساحة الحقيقية مساوية لمساحة المقطع المكبر مقسومة على النسبة بين مقياسى الرسم للارتفاعات وللأطوال (نسبة الالتاف) وهذه النسبة تساوى ١٠ في (شكل ١٤٣ ب) .

بشر ١٦٢ : تعيين منسوب نقطة على السطح اذا علم مسقطها

نفرض في (شكل ١٤٣) أن 'م' مسقط نقطة مثل 'د' من نقط السطح الطبوغرافي يراد تعيين منسوبها . لذلك نرسم مستقيماً ما مثل 'د' يمر بالمسقط 'د' ونعتبره أثراً لمستوى مثل 'د' عمودي على II ثم نعين كما تقدم المقطع الجانبي للسطح الطبوغرافي بالمستوى 'د' فإذا كانت النقطة 'د' موضع المسقط على المستقيم 'م' في وضعه الجديد وأقنا منها عموداً يقابل المنحنى 'أ' ب ح و... في 'د' كان منسوب 'د' يساوي منسوب 'أ' زائداً الارتفاع الحقيقي 'د' (وهذا الارتفاع في الشكل يساوي ١,٣ متراً فيكون منسوب 'د' هو ٢١,٣ تقريباً) .
وفي كثير من الحالات يكفي بتقدير منسوب النقطة المعلوم مسقطها بالنظر أو بالطريقة الآتية وهي أبسط من السابقة وإن كانت أقل دقة :

نفرض أن 'م' مسقط النقطة فنرسم مستقيماً 'ح' ط' يمر بهذا المسقط بحيث يقابل خطي المنسوب المحيطين به في 'ح' م' ط' على زاويتين قائمتين بالتقريب (شكل ١٤٣) ثم نقيس على العمود المقام من 'ح' على 'ط' البعد 'ح' [ع] ليمثل بمقياس الرسم للارتفاعات متراً واحداً (هو الفرق بين منسوبي ح م' ط) وفصل [ح] ط' بمستقيم يمكن اعتباره على وجه التقريب الشكل الحقيقي لمنحنى تقاطع هذا الجزء الصغير من السطح الطبوغرافي مع مستوى البروفيل الذي يمثلها الاثر 'ح' ط' . وبذا يكون منسوب النقطة م' مساوياً لمنسوب النقطة ط زائداً الارتفاع الحقيقي 'م' [ع] (وهذا المنسوب هو ٢٢,٧ تقريباً في الشكل) .
ويؤخذ من تشابه المثلثات في هذه الحالة أن

$$\frac{\text{ط}'\text{م}'}{\text{ط}'\text{ح}'} = \frac{\text{ط}'\text{م}'}{\text{ح}'\text{ط}'} = [\text{ع}] \times \frac{\text{ط}'\text{م}'}{\text{ح}'\text{ط}'} = [\text{ع}] \text{م}'$$

حيث ط' م' ح' نقطتنا تقاطع خطي المنسوب ٢٢ م' ٢٣ مع أي مستقيم آخر مار بالمسقط 'م' ويكون التساوي الأخير أقرب إلى الصحة كلما صغر المنحنيان ط' م' ح' . ويمكن اعتبارهما بالتقريب مستقيمين متوازيين .

فاذا أمكن استخدام مسطرة مدرجة توضع على 'م' بحيث يمون ط' ح' مساو ١ سم مثلاً فان ط' م' يعطينا مباشرة في هذه الحالة زيادة منسوب النقطة م على منسوب النقطة ط' (ويجب أن يساوى لذلك ٠,٨ سم).

بند ١٦٣ : استكمال خطوط المنسوب

اذا علمت خريطة طبوغرافية فالتا نغنى بعملية الاستكمال هذه إنشاء خطوط منسوب جديدة ورسمها بين خطوط المنسوب القديمة المعلومة . وتتلخص هذه العملية في تعيين مساقط عدة نقط معلومة مناسبة في اذن عكس العملية المذكورة في البند السابق . فلانشاء خط الكتور ٢٠,٥ المين في (شكل ١٤٣ ب) بخطوط متقطعة نرسم عدة مستقيمت تكون بقدر الامكان عمودية على خطي المنسوب ٢٠ و ٢١ ثم نصفها في نقط يمكن اعتبارها مساقطاً للنقط على السطح مناسبة كلها بالتقريب ٢٠,٥ ويكون اذن خط المنسوب ٢٠,٥ هو المنحني الذي يصل تلك النقط في المسقط .

بند ١٦٤ : نقط تقاطع خط مستقيم مع سطح طبوغرافي

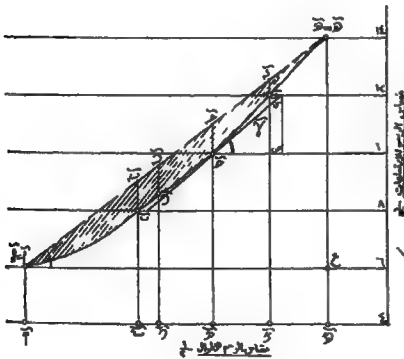
اذا أمرنا بالمستقيم المعلوم مستوياً حيثما اتفق يقطع السطح في منحني فان نقط تقاطع هذا المنحني مع المستقيم تكون النقط المطلوبة .
فلنفرض في (شكل ١٤٣ ا) أن 'α' مقياس الميل للمستقيم مثل α يراد تعيين نقط تقاطعه مع السطح فاذا رسمنا من نقط التدرج على 'α' مستقيمت متوازية في أى اتجاه فانه يمكن اعتبارها مساقط لاهيات مستو A مار بالمستقيم α (ويكون مقياس الميل α لهذا المستوى هو أى مستقيم عمودى على تلك المستقيمت) فاذا رسمنا في المسقط منحني تقاطع هذا المستوى مع السطح الطبوغرافي كما تقدم في (بند ١٦١) وتقاطع α مع هذا المنحني في م' م' كانتا نقطتان مسقطي نقطتين م' م' من نقط تقاطع المستقيم « مع السطح .

الفصل الثالث

الخطوط المنحنية على سطح طبوغرافى

بند ١٦٥ : المنحنيات المستوية والمنحنيات الفراغية

المنحنى المئين فى (شكل ١٤٣) هو كما قلنا خط تقاطع المستوى A مع السطح الطبوغرافى فهو واقع بتمامه فى المستوى A أى منحنى مستو مرسوم على السطح .
ويكفى لتمثيل مثل هذا المنحنى أن يعلم مسقطه والمستوى المرسوم فيه إذ أن منسوب أية نقطة واقعة على المنحنى يمكن تعيينه فى هذه الحالة بدقة باعتبارها إحدى نقط المستوى (بند ١٤٩) .



(ب)

(شكل ١٤٤)

(١)

أما إذا رسم منحنى حيثما اتفق a ب h و h ... على السطح فإنه يكون على وجه العموم منحنيًا فراغياً وفى هذه الحالة يمكن تعيين منسوب أية نقطة من نقطه باعتبارها واقعة على السطح الطبوغرافى المعلوم (بند ١٦٢) . فإذا كان

أ' ب' ح' و' ه' فى (شكل ١١٤٤) مسقط مثل هذا المنحنى وعلم السطح الطبوغرافى بخطوط المنسوب ١٠٠٩ ١٠٠٨ ١٠٠٧ ١٠٠٦ ١٠٠٥ ١٠٠٤ ١٠٠٣ ١٠٠٢ ١٠٠١ ١٠٠٠ ٩٩٩ ٩٩٨ ٩٩٧ ٩٩٦ ٩٩٥ ٩٩٤ ٩٩٣ ٩٩٢ ٩٩١ ٩٩٠ ٩٨٩ ٩٨٨ ٩٨٧ ٩٨٦ ٩٨٥ ٩٨٤ ٩٨٣ ٩٨٢ ٩٨١ ٩٨٠ ٩٧٩ ٩٧٨ ٩٧٧ ٩٧٦ ٩٧٥ ٩٧٤ ٩٧٣ ٩٧٢ ٩٧١ ٩٧٠ ٩٦٩ ٩٦٨ ٩٦٧ ٩٦٦ ٩٦٥ ٩٦٤ ٩٦٣ ٩٦٢ ٩٦١ ٩٦٠ ٩٥٩ ٩٥٨ ٩٥٧ ٩٥٦ ٩٥٥ ٩٥٤ ٩٥٣ ٩٥٢ ٩٥١ ٩٥٠ ٩٤٩ ٩٤٨ ٩٤٧ ٩٤٦ ٩٤٥ ٩٤٤ ٩٤٣ ٩٤٢ ٩٤١ ٩٤٠ ٩٣٩ ٩٣٨ ٩٣٧ ٩٣٦ ٩٣٥ ٩٣٤ ٩٣٣ ٩٣٢ ٩٣١ ٩٣٠ ٩٢٩ ٩٢٨ ٩٢٧ ٩٢٦ ٩٢٥ ٩٢٤ ٩٢٣ ٩٢٢ ٩٢١ ٩٢٠ ٩١٩ ٩١٨ ٩١٧ ٩١٦ ٩١٥ ٩١٤ ٩١٣ ٩١٢ ٩١١ ٩١٠ ٩٠٩ ٩٠٨ ٩٠٧ ٩٠٦ ٩٠٥ ٩٠٤ ٩٠٣ ٩٠٢ ٩٠١ ٩٠٠ ٨٩٩ ٨٩٨ ٨٩٧ ٨٩٦ ٨٩٥ ٨٩٤ ٨٩٣ ٨٩٢ ٨٩١ ٨٩٠ ٨٨٩ ٨٨٨ ٨٨٧ ٨٨٦ ٨٨٥ ٨٨٤ ٨٨٣ ٨٨٢ ٨٨١ ٨٨٠ ٨٧٩ ٨٧٨ ٨٧٧ ٨٧٦ ٨٧٥ ٨٧٤ ٨٧٣ ٨٧٢ ٨٧١ ٨٧٠ ٨٦٩ ٨٦٨ ٨٦٧ ٨٦٦ ٨٦٥ ٨٦٤ ٨٦٣ ٨٦٢ ٨٦١ ٨٦٠ ٨٥٩ ٨٥٨ ٨٥٧ ٨٥٦ ٨٥٥ ٨٥٤ ٨٥٣ ٨٥٢ ٨٥١ ٨٥٠ ٨٤٩ ٨٤٨ ٨٤٧ ٨٤٦ ٨٤٥ ٨٤٤ ٨٤٣ ٨٤٢ ٨٤١ ٨٤٠ ٨٣٩ ٨٣٨ ٨٣٧ ٨٣٦ ٨٣٥ ٨٣٤ ٨٣٣ ٨٣٢ ٨٣١ ٨٣٠ ٨٢٩ ٨٢٨ ٨٢٧ ٨٢٦ ٨٢٥ ٨٢٤ ٨٢٣ ٨٢٢ ٨٢١ ٨٢٠ ٨١٩ ٨١٨ ٨١٧ ٨١٦ ٨١٥ ٨١٤ ٨١٣ ٨١٢ ٨١١ ٨١٠ ٨٠٩ ٨٠٨ ٨٠٧ ٨٠٦ ٨٠٥ ٨٠٤ ٨٠٣ ٨٠٢ ٨٠١ ٨٠٠ ٧٩٩ ٧٩٨ ٧٩٧ ٧٩٦ ٧٩٥ ٧٩٤ ٧٩٣ ٧٩٢ ٧٩١ ٧٩٠ ٧٨٩ ٧٨٨ ٧٨٧ ٧٨٦ ٧٨٥ ٧٨٤ ٧٨٣ ٧٨٢ ٧٨١ ٧٨٠ ٧٧٩ ٧٧٨ ٧٧٧ ٧٧٦ ٧٧٥ ٧٧٤ ٧٧٣ ٧٧٢ ٧٧١ ٧٧٠ ٧٦٩ ٧٦٨ ٧٦٧ ٧٦٦ ٧٦٥ ٧٦٤ ٧٦٣ ٧٦٢ ٧٦١ ٧٦٠ ٧٥٩ ٧٥٨ ٧٥٧ ٧٥٦ ٧٥٥ ٧٥٤ ٧٥٣ ٧٥٢ ٧٥١ ٧٥٠ ٧٤٩ ٧٤٨ ٧٤٧ ٧٤٦ ٧٤٥ ٧٤٤ ٧٤٣ ٧٤٢ ٧٤١ ٧٤٠ ٧٣٩ ٧٣٨ ٧٣٧ ٧٣٦ ٧٣٥ ٧٣٤ ٧٣٣ ٧٣٢ ٧٣١ ٧٣٠ ٧٢٩ ٧٢٨ ٧٢٧ ٧٢٦ ٧٢٥ ٧٢٤ ٧٢٣ ٧٢٢ ٧٢١ ٧٢٠ ٧١٩ ٧١٨ ٧١٧ ٧١٦ ٧١٥ ٧١٤ ٧١٣ ٧١٢ ٧١١ ٧١٠ ٧٠٩ ٧٠٨ ٧٠٧ ٧٠٦ ٧٠٥ ٧٠٤ ٧٠٣ ٧٠٢ ٧٠١ ٧٠٠ ٦٩٩ ٦٩٨ ٦٩٧ ٦٩٦ ٦٩٥ ٦٩٤ ٦٩٣ ٦٩٢ ٦٩١ ٦٩٠ ٦٨٩ ٦٨٨ ٦٨٧ ٦٨٦ ٦٨٥ ٦٨٤ ٦٨٣ ٦٨٢ ٦٨١ ٦٨٠ ٦٧٩ ٦٧٨ ٦٧٧ ٦٧٦ ٦٧٥ ٦٧٤ ٦٧٣ ٦٧٢ ٦٧١ ٦٧٠ ٦٦٩ ٦٦٨ ٦٦٧ ٦٦٦ ٦٦٥ ٦٦٤ ٦٦٣ ٦٦٢ ٦٦١ ٦٦٠ ٦٥٩ ٦٥٨ ٦٥٧ ٦٥٦ ٦٥٥ ٦٥٤ ٦٥٣ ٦٥٢ ٦٥١ ٦٥٠ ٦٤٩ ٦٤٨ ٦٤٧ ٦٤٦ ٦٤٥ ٦٤٤ ٦٤٣ ٦٤٢ ٦٤١ ٦٤٠ ٦٣٩ ٦٣٨ ٦٣٧ ٦٣٦ ٦٣٥ ٦٣٤ ٦٣٣ ٦٣٢ ٦٣١ ٦٣٠ ٦٢٩ ٦٢٨ ٦٢٧ ٦٢٦ ٦٢٥ ٦٢٤ ٦٢٣ ٦٢٢ ٦٢١ ٦٢٠ ٦١٩ ٦١٨ ٦١٧ ٦١٦ ٦١٥ ٦١٤ ٦١٣ ٦١٢ ٦١١ ٦١٠ ٦٠٩ ٦٠٨ ٦٠٧ ٦٠٦ ٦٠٥ ٦٠٤ ٦٠٣ ٦٠٢ ٦٠١ ٦٠٠ ٥٩٩ ٥٩٨ ٥٩٧ ٥٩٦ ٥٩٥ ٥٩٤ ٥٩٣ ٥٩٢ ٥٩١ ٥٩٠ ٥٨٩ ٥٨٨ ٥٨٧ ٥٨٦ ٥٨٥ ٥٨٤ ٥٨٣ ٥٨٢ ٥٨١ ٥٨٠ ٥٧٩ ٥٧٨ ٥٧٧ ٥٧٦ ٥٧٥ ٥٧٤ ٥٧٣ ٥٧٢ ٥٧١ ٥٧٠ ٥٦٩ ٥٦٨ ٥٦٧ ٥٦٦ ٥٦٥ ٥٦٤ ٥٦٣ ٥٦٢ ٥٦١ ٥٦٠ ٥٥٩ ٥٥٨ ٥٥٧ ٥٥٦ ٥٥٥ ٥٥٤ ٥٥٣ ٥٥٢ ٥٥١ ٥٥٠ ٥٤٩ ٥٤٨ ٥٤٧ ٥٤٦ ٥٤٥ ٥٤٤ ٥٤٣ ٥٤٢ ٥٤١ ٥٤٠ ٥٣٩ ٥٣٨ ٥٣٧ ٥٣٦ ٥٣٥ ٥٣٤ ٥٣٣ ٥٣٢ ٥٣١ ٥٣٠ ٥٢٩ ٥٢٨ ٥٢٧ ٥٢٦ ٥٢٥ ٥٢٤ ٥٢٣ ٥٢٢ ٥٢١ ٥٢٠ ٥١٩ ٥١٨ ٥١٧ ٥١٦ ٥١٥ ٥١٤ ٥١٣ ٥١٢ ٥١١ ٥١٠ ٥٠٩ ٥٠٨ ٥٠٧ ٥٠٦ ٥٠٥ ٥٠٤ ٥٠٣ ٥٠٢ ٥٠١ ٥٠٠ ٤٩٩ ٤٩٨ ٤٩٧ ٤٩٦ ٤٩٥ ٤٩٤ ٤٩٣ ٤٩٢ ٤٩١ ٤٩٠ ٤٨٩ ٤٨٨ ٤٨٧ ٤٨٦ ٤٨٥ ٤٨٤ ٤٨٣ ٤٨٢ ٤٨١ ٤٨٠ ٤٧٩ ٤٧٨ ٤٧٧ ٤٧٦ ٤٧٥ ٤٧٤ ٤٧٣ ٤٧٢ ٤٧١ ٤٧٠ ٤٦٩ ٤٦٨ ٤٦٧ ٤٦٦ ٤٦٥ ٤٦٤ ٤٦٣ ٤٦٢ ٤٦١ ٤٦٠ ٤٥٩ ٤٥٨ ٤٥٧ ٤٥٦ ٤٥٥ ٤٥٤ ٤٥٣ ٤٥٢ ٤٥١ ٤٥٠ ٤٤٩ ٤٤٨ ٤٤٧ ٤٤٦ ٤٤٥ ٤٤٤ ٤٤٣ ٤٤٢ ٤٤١ ٤٤٠ ٤٣٩ ٤٣٨ ٤٣٧ ٤٣٦ ٤٣٥ ٤٣٤ ٤٣٣ ٤٣٢ ٤٣١ ٤٣٠ ٤٢٩ ٤٢٨ ٤٢٧ ٤٢٦ ٤٢٥ ٤٢٤ ٤٢٣ ٤٢٢ ٤٢١ ٤٢٠ ٤١٩ ٤١٨ ٤١٧ ٤١٦ ٤١٥ ٤١٤ ٤١٣ ٤١٢ ٤١١ ٤١٠ ٤٠٩ ٤٠٨ ٤٠٧ ٤٠٦ ٤٠٥ ٤٠٤ ٤٠٣ ٤٠٢ ٤٠١ ٤٠٠ ٣٩٩ ٣٩٨ ٣٩٧ ٣٩٦ ٣٩٥ ٣٩٤ ٣٩٣ ٣٩٢ ٣٩١ ٣٩٠ ٣٨٩ ٣٨٨ ٣٨٧ ٣٨٦ ٣٨٥ ٣٨٤ ٣٨٣ ٣٨٢ ٣٨١ ٣٨٠ ٣٧٩ ٣٧٨ ٣٧٧ ٣٧٦ ٣٧٥ ٣٧٤ ٣٧٣ ٣٧٢ ٣٧١ ٣٧٠ ٣٦٩ ٣٦٨ ٣٦٧ ٣٦٦ ٣٦٥ ٣٦٤ ٣٦٣ ٣٦٢ ٣٦١ ٣٦٠ ٣٥٩ ٣٥٨ ٣٥٧ ٣٥٦ ٣٥٥ ٣٥٤ ٣٥٣ ٣٥٢ ٣٥١ ٣٥٠ ٣٤٩ ٣٤٨ ٣٤٧ ٣٤٦ ٣٤٥ ٣٤٤ ٣٤٣ ٣٤٢ ٣٤١ ٣٤٠ ٣٣٩ ٣٣٨ ٣٣٧ ٣٣٦ ٣٣٥ ٣٣٤ ٣٣٣ ٣٣٢ ٣٣١ ٣٣٠ ٣٢٩ ٣٢٨ ٣٢٧ ٣٢٦ ٣٢٥ ٣٢٤ ٣٢٣ ٣٢٢ ٣٢١ ٣٢٠ ٣١٩ ٣١٨ ٣١٧ ٣١٦ ٣١٥ ٣١٤ ٣١٣ ٣١٢ ٣١١ ٣١٠ ٣٠٩ ٣٠٨ ٣٠٧ ٣٠٦ ٣٠٥ ٣٠٤ ٣٠٣ ٣٠٢ ٣٠١ ٣٠٠ ٢٩٩ ٢٩٨ ٢٩٧ ٢٩٦ ٢٩٥ ٢٩٤ ٢٩٣ ٢٩٢ ٢٩١ ٢٩٠ ٢٨٩ ٢٨٨ ٢٨٧ ٢٨٦ ٢٨٥ ٢٨٤ ٢٨٣ ٢٨٢ ٢٨١ ٢٨٠ ٢٧٩ ٢٧٨ ٢٧٧ ٢٧٦ ٢٧٥ ٢٧٤ ٢٧٣ ٢٧٢ ٢٧١ ٢٧٠ ٢٦٩ ٢٦٨ ٢٦٧ ٢٦٦ ٢٦٥ ٢٦٤ ٢٦٣ ٢٦٢ ٢٦١ ٢٦٠ ٢٥٩ ٢٥٨ ٢٥٧ ٢٥٦ ٢٥٥ ٢٥٤ ٢٥٣ ٢٥٢ ٢٥١ ٢٥٠ ٢٤٩ ٢٤٨ ٢٤٧ ٢٤٦ ٢٤٥ ٢٤٤ ٢٤٣ ٢٤٢ ٢٤١ ٢٤٠ ٢٣٩ ٢٣٨ ٢٣٧ ٢٣٦ ٢٣٥ ٢٣٤ ٢٣٣ ٢٣٢ ٢٣١ ٢٣٠ ٢٢٩ ٢٢٨ ٢٢٧ ٢٢٦ ٢٢٥ ٢٢٤ ٢٢٣ ٢٢٢ ٢٢١ ٢٢٠ ٢١٩ ٢١٨ ٢١٧ ٢١٦ ٢١٥ ٢١٤ ٢١٣ ٢١٢ ٢١١ ٢١٠ ٢٠٩ ٢٠٨ ٢٠٧ ٢٠٦ ٢٠٥ ٢٠٤ ٢٠٣ ٢٠٢ ٢٠١ ٢٠٠ ١٩٩ ١٩٨ ١٩٧ ١٩٦ ١٩٥ ١٩٤ ١٩٣ ١٩٢ ١٩١ ١٩٠ ١٨٩ ١٨٨ ١٨٧ ١٨٦ ١٨٥ ١٨٤ ١٨٣ ١٨٢ ١٨١ ١٨٠ ١٧٩ ١٧٨ ١٧٧ ١٧٦ ١٧٥ ١٧٤ ١٧٣ ١٧٢ ١٧١ ١٧٠ ١٦٩ ١٦٨ ١٦٧ ١٦٦ ١٦٥ ١٦٤ ١٦٣ ١٦٢ ١٦١ ١٦٠ ١٥٩ ١٥٨ ١٥٧ ١٥٦ ١٥٥ ١٥٤ ١٥٣ ١٥٢ ١٥١ ١٥٠ ١٤٩ ١٤٨ ١٤٧ ١٤٦ ١٤٥ ١٤٤ ١٤٣ ١٤٢ ١٤١ ١٤٠ ١٣٩ ١٣٨ ١٣٧ ١٣٦ ١٣٥ ١٣٤ ١٣٣ ١٣٢ ١٣١ ١٣٠ ١٢٩ ١٢٨ ١٢٧ ١٢٦ ١٢٥ ١٢٤ ١٢٣ ١٢٢ ١٢١ ١٢٠ ١١٩ ١١٨ ١١٧ ١١٦ ١١٥ ١١٤ ١١٣ ١١٢ ١١١ ١١٠ ١٠٩ ١٠٨ ١٠٧ ١٠٦ ١٠٥ ١٠٤ ١٠٣ ١٠٢ ١٠١ ١٠٠ ٩٩ ٩٨ ٩٧ ٩٦ ٩٥ ٩٤ ٩٣ ٩٢ ٩١ ٩٠ ٨٩ ٨٨ ٨٧ ٨٦ ٨٥ ٨٤ ٨٣ ٨٢ ٨١ ٨٠ ٧٩ ٧٨ ٧٧ ٧٦ ٧٥ ٧٤ ٧٣ ٧٢ ٧١ ٧٠ ٦٩ ٦٨ ٦٧ ٦٦ ٦٥ ٦٤ ٦٣ ٦٢ ٦١ ٦٠ ٥٩ ٥٨ ٥٧ ٥٦ ٥٥ ٥٤ ٥٣ ٥٢ ٥١ ٥٠ ٤٩ ٤٨ ٤٧ ٤٦ ٤٥ ٤٤ ٤٣ ٤٢ ٤١ ٤٠ ٣٩ ٣٨ ٣٧ ٣٦ ٣٥ ٣٤ ٣٣ ٣٢ ٣١ ٣٠ ٢٩ ٢٨ ٢٧ ٢٦ ٢٥ ٢٤ ٢٣ ٢٢ ٢١ ٢٠ ١٩ ١٨ ١٧ ١٦ ١٥ ١٤ ١٣ ١٢ ١١ ١٠ ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ ٠

بند ١٦٦ : خط تقاطع سطح طبوغرافى مع اسطوانة رأسية الراسم

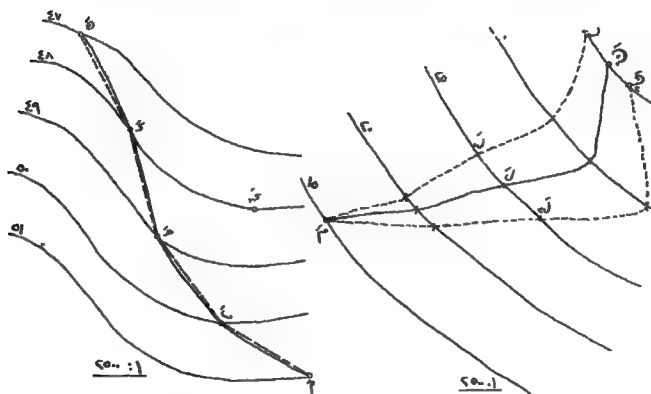
إذا فرضنا فى (شكل ١١٤٤) أن أ' ب' ح' و' ه' هو المسقط المشترك لمنحنى أ' ب' ح' و' ه' مرسوم على السطح ومنحن آخر أ' ب' ح' و' ه' (غير واقع على السطح) وأن هذا المنحنى الأخير يمثل محور شارع أو خط سكة حديد مطلوب إنشاؤه على قطعة الأرض الميئة فى الشكل وفرضنا أنه يراد رسم مقطع طولى للشروع فالمنحنى أ' ب' ح' و' ه' يمكن اعتباره منحنى تقاطع السطح الطبوغرافى مع الاسطوانة التى رواسمى رأسية ودليلها هذا المنحنى (أو المنحنى أ' ب' ح' و' ه'...) وفى هذه الحالة يكون المقصود برسم المقطع الطولى للشروع هو بسط هذه الاسطوانة ورسم مآلى المنحنيين المشار إليهما. فنرسم لذلك فى (شكل ١١٤٤ ب) مستقيماً ما ونفرض أنه يمثل المنسوب ٤ ثم نقيس عليه ابتداء من أية نقطة مثل أ' البعد أ' ب' مساوياً بالتقريب طول المنحنى أ' ب' فى (شكل ١١٤٤) ونقيس بالمثل البعد ب' ح' مساوياً طول المنحنى ب' ح' وهكذا فإذا قيس على الأعمدة المقامة على المستقيم أ' ب' ح' و' ه'... الارتقاعات أ' ب' ح' و' ه' متراً فإن المنحنى أ' ب' ح' و' ه' يمثل حينئذ المآل المطلوب (مكبراً ١٠ مرات) للمنحنى أ' ب' ح' و' ه' . وبالمثل يمكن رسم المآل أ' ب' ح' و' ه'... لمحور المشروع إذا علمت مناسيب النقاط أ' ب' ح' و' ه'...

على أن رسم هذا المآل الأخير يتوقف عادة على طبيعة وشكل سطح الأرض (التي يمكن الحكم عليها بواسطة المقطع $\alpha \sim \beta \sim \gamma \dots$) فإذا فرضناه في (شكل ١٤٤ ب) خطاً مستقيماً هو $\alpha \sim \beta$ — ومعنى هذا أننا نفرض أن محور المشروع هو منحني ثابت الميل على المستوى الاقنى يصل بين النقطتين α و β — فإنه يمكن بالعكس بواسطة هذا المآل تحديد مناسيب النقط α ب γ ب δ ب ϵ ... على المحور كما يمكن الحكم على كمية الردم أو الحفر اللازمة ومن هنا تبين أهمية هذه المقاطع الطولية في الشؤون الفنية .

بند ١٦٧ : المنحنيات ذوات الميل الثالث

إذا كان γ في (شكل ١٤٤ ا) هو مسقط المماس γ في النقطة γ للمنحنى $\alpha \sim \beta \sim \gamma \dots$ المرسوم على السطح وكانت ω هي الزاوية التي يميل بها هذا المماس على المستوى الاقنى فإن ميل المنحنى عند γ يقاس حينئذ بظل الزاوية ω ولما كانت هذه الزاوية لا تتغير ببسط الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى المذكور (بند ١٢٧) لذا كان من الممكن قياس هذا الميل من (شكل ١٤٣ ب) لانه يساوى الظل الحقيقي للزاوية ω أي يساوى $\frac{\sin \omega}{\cos \omega}$. ومن الواضح أن ميل المنحنى عند γ يختلف عنه على وجه العموم عند أية نقطة أخرى على المنحنى وهذا بخلاف المنحنى α ب γ ب δ ب ϵ ... الذي مسقطه α ب γ ب δ ب ϵ ... أيضاً والذي يؤول بعد بسط الاسطوانة الى الخط المستقيم $\alpha \sim \beta$ فإن هذا المنحنى — مثله في ذلك مثل المنحنى اللولبي — ثابت الميل في جميع نقطه على المستوى الاقنى (وهذا الميل الثابت يساوى الظل الحقيقي للزاوية ω ب γ ب δ ب ϵ) ويسمى مثل هذا المنحنى الفراغي منحنياً ذات ميل ثابت .

ولنفرض الآن (شكل ١٤٥) أنه يراد رسم منحني ميل ثابت معلوم وليكن ١/٥٠ أو ٢٪ (كما يطلق عليه اصطلاحاً في الشؤون الفنية) يبدأ عند النقطة ١ ويكون واقعاً على السطح الطبوغرافى المبين بالشكل . فتركز لذلك في ١' على خط المنسوب ٥١ ويفتحه تساوى ٢ سم (وتمثل ٥٠ متراً بمقياس الرسم) نقطع خط المنسوب ٥٠ في ب' ثم نركز في ب' ونفقس الفتحة نقطع خط المنسوب ٤٩ في ح' وهكذا ثم نصل هذه النقط بالخطوط المستقيمة



(١)

(شكل ١٤٥)

(ب)

١' ب' ٢' ح' ٣' د' ٤' هـ' فن حيث إن طول كل من هذه المستقيمت ثابت ويساوى في الرسم ٢ سم وفي الطبيعة ٥٠ متراً ومن حيث إن كلا منها هو مسقط جزء من مستقيم محدود بنقطتين الفرق بين منسوبيهما متراً واحداً فينتج من ذلك أن جميع المستقيمت الصغيرة ١ ب' ٢ ح' ٣ د' ٤ هـ' متساوية الميل على المستوى الاقى (وهذا الميل مقداره ٢٪). والخط المنكسر ١ ب' ح' د' هـ

وإن كان غير منطبق على السطح تماماً إلا أنه يؤول الى خط منحني منطبق على السطح إذا اعتبرنا اجزائه $١ ب$ $٢ ح$ $٣ د$ $٤ هـ$ صغيرة صغراً كافياً ويكون حينئذ الخط المنحني $١ ب ح د هـ$ منحنياً زائلياً ثابت أو منحنى ميل ثابت واقفاً على السطح الطبوغرافي ومبتدئاً عند النقطة ١ ^(١) . ولما كانت مثل هذه المنحنيات يمكن تدرجها كالخط المستقيم فإنه يكفي لتمثيل خط ميل ثابت أن يعلم مسقطه وميله أو مسقطه ومنسوب أى نقطتين من نقطه .

وكثيراً ما يعرض المهندس لمنحنيات الميل الثابت في تخطيط المشروعات والمسألة الآتية من الامثلة العملية المهمة على هذه المنحنيات :

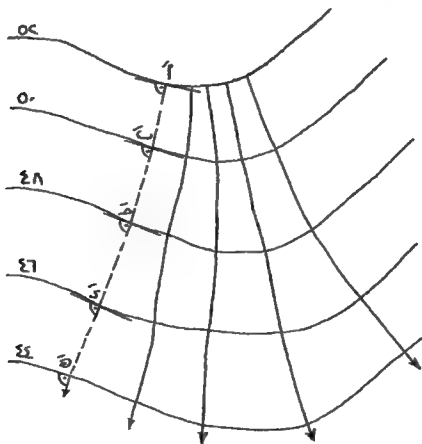
المطلوب رسم خط للميل الثابت الذى يصل نقطتين معلومتين مثل $٢ م$ $٣ هـ$ على سطح طبوغرافي .

حل هذه المسألة يتم عادة بطريقة التجربة المتكررة . فنفرض في (شكل ١٤٥ ب) أن $٢ م$ $٣ هـ$ الواقعتين على خطي المنسوب ١٥ ٣٥ هما مسقطا النقطتين $٢ م$ $٣ هـ$ على السطح الطبوغرافي المبين بالشكل . فإذا فتحنا البرجل فتحة تساوى بالتقريب $\frac{1}{4}$ المستقيم $٢ م$ $٣ هـ$ (لان الفرق بين منسوبي $٢ م$ $٣ هـ$ يساوى ٤ أمثال الفرق بين خطين متتاليين من خطوط المنسوب) وأجرينا العمل بالطريقة المشروحة في أول هذا البند حصلنا على خط الميل الثابت الذى مسقطه $٢ م$ $٣ هـ$ $٤ ل$ $٥ ن$ $٦ د$ $٧ ز$ $٨ ح$ $٩ ط$ $١٠ ق$ $١١ ك$ $١٢ ع$ $١٣ ف$ $١٤ ي$ $١٥ ر$ $١٦ س$ $١٧ ش$ $١٨ ص$ $١٩ ض$ $٢٠ ظ$ $٢١ ط$ $٢٢ ذ$ $٢٣ ر$ $٢٤ ز$ $٢٥ ح$ $٢٦ ط$ $٢٧ ق$ $٢٨ ك$ $٢٩ ع$ $٣٠ ف$ $٣١ ي$ $٣٢ ر$ $٣٣ س$ $٣٤ ش$ $٣٥ ص$ $٣٦ ض$ $٣٧ ظ$ $٣٨ ط$ $٣٩ ذ$ $٤٠ ر$ $٤١ ز$ $٤٢ ح$ $٤٣ ط$ $٤٤ ق$ $٤٥ ك$ $٤٦ ع$ $٤٧ ف$ $٤٨ ي$ $٤٩ ر$ $٥٠ س$ $٥١ ش$ $٥٢ ص$ $٥٣ ض$ $٥٤ ظ$ $٥٥ ط$ $٥٦ ذ$ $٥٧ ر$ $٥٨ ز$ $٥٩ ح$ $٦٠ ط$ $٦١ ق$ $٦٢ ك$ $٦٣ ع$ $٦٤ ف$ $٦٥ ي$ $٦٦ ر$ $٦٧ س$ $٦٨ ش$ $٦٩ ص$ $٧٠ ض$ $٧١ ظ$ $٧٢ ط$ $٧٣ ذ$ $٧٤ ر$ $٧٥ ز$ $٧٦ ح$ $٧٧ ط$ $٧٨ ق$ $٧٩ ك$ $٨٠ ع$ $٨١ ف$ $٨٢ ي$ $٨٣ ر$ $٨٤ س$ $٨٥ ش$ $٨٦ ص$ $٨٧ ض$ $٨٨ ظ$ $٨٩ ط$ $٩٠ ذ$ $٩١ ر$ $٩٢ ز$ $٩٣ ح$ $٩٤ ط$ $٩٥ ق$ $٩٦ ك$ $٩٧ ع$ $٩٨ ف$ $٩٩ ي$ $١٠٠ ر$ $١٠١ س$ $١٠٢ ش$ $١٠٣ ص$ $١٠٤ ض$ $١٠٥ ظ$ $١٠٦ ط$ $١٠٧ ذ$ $١٠٨ ر$ $١٠٩ ز$ $١١٠ ح$ $١١١ ط$ $١١٢ ق$ $١١٣ ك$ $١١٤ ع$ $١١٥ ف$ $١١٦ ي$ $١١٧ ر$ $١١٨ س$ $١١٩ ش$ $١٢٠ ص$ $١٢١ ض$ $١٢٢ ظ$ $١٢٣ ط$ $١٢٤ ذ$ $١٢٥ ر$ $١٢٦ ز$ $١٢٧ ح$ $١٢٨ ط$ $١٢٩ ق$ $١٣٠ ك$ $١٣١ ع$ $١٣٢ ف$ $١٣٣ ي$ $١٣٤ ر$ $١٣٥ س$ $١٣٦ ش$ $١٣٧ ص$ $١٣٨ ض$ $١٣٩ ظ$ $١٤٠ ط$ $١٤١ ذ$ $١٤٢ ر$ $١٤٣ ز$ $١٤٤ ح$ $١٤٥ ط$ $١٤٦ ق$ $١٤٧ ك$ $١٤٨ ع$ $١٤٩ ف$ $١٥٠ ي$ $١٥١ ر$ $١٥٢ س$ $١٥٣ ش$ $١٥٤ ص$ $١٥٥ ض$ $١٥٦ ظ$ $١٥٧ ط$ $١٥٨ ذ$ $١٥٩ ر$ $١٦٠ ز$ $١٦١ ح$ $١٦٢ ط$ $١٦٣ ق$ $١٦٤ ك$ $١٦٥ ع$ $١٦٦ ف$ $١٦٧ ي$ $١٦٨ ر$ $١٦٩ س$ $١٧٠ ش$ $١٧١ ص$ $١٧٢ ض$ $١٧٣ ظ$ $١٧٤ ط$ $١٧٥ ذ$ $١٧٦ ر$ $١٧٧ ز$ $١٧٨ ح$ $١٧٩ ط$ $١٨٠ ق$ $١٨١ ك$ $١٨٢ ع$ $١٨٣ ف$ $١٨٤ ي$ $١٨٥ ر$ $١٨٦ س$ $١٨٧ ش$ $١٨٨ ص$ $١٨٩ ض$ $١٩٠ ظ$ $١٩١ ط$ $١٩٢ ذ$ $١٩٣ ر$ $١٩٤ ز$ $١٩٥ ح$ $١٩٦ ط$ $١٩٧ ق$ $١٩٨ ك$ $١٩٩ ع$ $٢٠٠ ف$ $٢٠١ ي$ $٢٠٢ ر$ $٢٠٣ س$ $٢٠٤ ش$ $٢٠٥ ص$ $٢٠٦ ض$ $٢٠٧ ظ$ $٢٠٨ ط$ $٢٠٩ ذ$ $٢١٠ ر$ $٢١١ ز$ $٢١٢ ح$ $٢١٣ ط$ $٢١٤ ق$ $٢١٥ ك$ $٢١٦ ع$ $٢١٧ ف$ $٢١٨ ي$ $٢١٩ ر$ $٢٢٠ س$ $٢٢١ ش$ $٢٢٢ ص$ $٢٢٣ ض$ $٢٢٤ ظ$ $٢٢٥ ط$ $٢٢٦ ذ$ $٢٢٧ ر$ $٢٢٨ ز$ $٢٢٩ ح$ $٢٣٠ ط$ $٢٣١ ق$ $٢٣٢ ك$ $٢٣٣ ع$ $٢٣٤ ف$ $٢٣٥ ي$ $٢٣٦ ر$ $٢٣٧ س$ $٢٣٨ ش$ $٢٣٩ ص$ $٢٤٠ ض$ $٢٤١ ظ$ $٢٤٢ ط$ $٢٤٣ ذ$ $٢٤٤ ر$ $٢٤٥ ز$ $٢٤٦ ح$ $٢٤٧ ط$ $٢٤٨ ق$ $٢٤٩ ك$ $٢٥٠ ع$ $٢٥١ ف$ $٢٥٢ ي$ $٢٥٣ ر$ $٢٥٤ س$ $٢٥٥ ش$ $٢٥٦ ص$ $٢٥٧ ض$ $٢٥٨ ظ$ $٢٥٩ ط$ $٢٦٠ ذ$ $٢٦١ ر$ $٢٦٢ ز$ $٢٦٣ ح$ $٢٦٤ ط$ $٢٦٥ ق$ $٢٦٦ ك$ $٢٦٧ ع$ $٢٦٨ ف$ $٢٦٩ ي$ $٢٧٠ ر$ $٢٧١ س$ $٢٧٢ ش$ $٢٧٣ ص$ $٢٧٤ ض$ $٢٧٥ ظ$ $٢٧٦ ط$ $٢٧٧ ذ$ $٢٧٨ ر$ $٢٧٩ ز$ $٢٨٠ ح$ $٢٨١ ط$ $٢٨٢ ق$ $٢٨٣ ك$ $٢٨٤ ع$ $٢٨٥ ف$ $٢٨٦ ي$ $٢٨٧ ر$ $٢٨٨ س$ $٢٨٩ ش$ $٢٩٠ ص$ $٢٩١ ض$ $٢٩٢ ظ$ $٢٩٣ ط$ $٢٩٤ ذ$ $٢٩٥ ر$ $٢٩٦ ز$ $٢٩٧ ح$ $٢٩٨ ط$ $٢٩٩ ق$ $٣٠٠ ك$ $٣٠١ ع$ $٣٠٢ ف$ $٣٠٣ ي$ $٣٠٤ ر$ $٣٠٥ س$ $٣٠٦ ش$ $٣٠٧ ص$ $٣٠٨ ض$ $٣٠٩ ظ$ $٣١٠ ط$ $٣١١ ذ$ $٣١٢ ر$ $٣١٣ ز$ $٣١٤ ح$ $٣١٥ ط$ $٣١٦ ق$ $٣١٧ ك$ $٣١٨ ع$ $٣١٩ ف$ $٣٢٠ ي$ $٣٢١ ر$ $٣٢٢ س$ $٣٢٣ ش$ $٣٢٤ ص$ $٣٢٥ ض$ $٣٢٦ ظ$ $٣٢٧ ط$ $٣٢٨ ذ$ $٣٢٩ ر$ $٣٣٠ ز$ $٣٣١ ح$ $٣٣٢ ط$ $٣٣٣ ق$ $٣٣٤ ك$ $٣٣٥ ع$ $٣٣٦ ف$ $٣٣٧ ي$ $٣٣٨ ر$ $٣٣٩ س$ $٣٤٠ ش$ $٣٤١ ص$ $٣٤٢ ض$ $٣٤٣ ظ$ $٣٤٤ ط$ $٣٤٥ ذ$ $٣٤٦ ر$ $٣٤٧ ز$ $٣٤٨ ح$ $٣٤٩ ط$ $٣٥٠ ق$ $٣٥١ ك$ $٣٥٢ ع$ $٣٥٣ ف$ $٣٥٤ ي$ $٣٥٥ ر$ $٣٥٦ س$ $٣٥٧ ش$ $٣٥٨ ص$ $٣٥٩ ض$ $٣٦٠ ظ$ $٣٦١ ط$ $٣٦٢ ذ$ $٣٦٣ ر$ $٣٦٤ ز$ $٣٦٥ ح$ $٣٦٦ ط$ $٣٦٧ ق$ $٣٦٨ ك$ $٣٦٩ ع$ $٣٧٠ ف$ $٣٧١ ي$ $٣٧٢ ر$ $٣٧٣ س$ $٣٧٤ ش$ $٣٧٥ ص$ $٣٧٦ ض$ $٣٧٧ ظ$ $٣٧٨ ط$ $٣٧٩ ذ$ $٣٨٠ ر$ $٣٨١ ز$ $٣٨٢ ح$ $٣٨٣ ط$ $٣٨٤ ق$ $٣٨٥ ك$ $٣٨٦ ع$ $٣٨٧ ف$ $٣٨٨ ي$ $٣٨٩ ر$ $٣٩٠ س$ $٣٩١ ش$ $٣٩٢ ص$ $٣٩٣ ض$ $٣٩٤ ظ$ $٣٩٥ ط$ $٣٩٦ ذ$ $٣٩٧ ر$ $٣٩٨ ز$ $٣٩٩ ح$ $٤٠٠ ط$ $٤٠١ ق$ $٤٠٢ ك$ $٤٠٣ ع$ $٤٠٤ ف$ $٤٠٥ ي$ $٤٠٦ ر$ $٤٠٧ س$ $٤٠٨ ش$ $٤٠٩ ص$ $٤١٠ ض$ $٤١١ ظ$ $٤١٢ ط$ $٤١٣ ذ$ $٤١٤ ر$ $٤١٥ ز$ $٤١٦ ح$ $٤١٧ ط$ $٤١٨ ق$ $٤١٩ ك$ $٤٢٠ ع$ $٤٢١ ف$ $٤٢٢ ي$ $٤٢٣ ر$ $٤٢٤ س$ $٤٢٥ ش$ $٤٢٦ ص$ $٤٢٧ ض$ $٤٢٨ ظ$ $٤٢٩ ط$ $٤٣٠ ذ$ $٤٣١ ر$ $٤٣٢ ز$ $٤٣٣ ح$ $٤٣٤ ط$ $٤٣٥ ق$ $٤٣٦ ك$ $٤٣٧ ع$ $٤٣٨ ف$ $٤٣٩ ي$ $٤٤٠ ر$ $٤٤١ س$ $٤٤٢ ش$ $٤٤٣ ص$ $٤٤٤ ض$ $٤٤٥ ظ$ $٤٤٦ ط$ $٤٤٧ ذ$ $٤٤٨ ر$ $٤٤٩ ز$ $٤٥٠ ح$ $٤٥١ ط$ $٤٥٢ ق$ $٤٥٣ ك$ $٤٥٤ ع$ $٤٥٥ ف$ $٤٥٦ ي$ $٤٥٧ ر$ $٤٥٨ س$ $٤٥٩ ش$ $٤٦٠ ص$ $٤٦١ ض$ $٤٦٢ ظ$ $٤٦٣ ط$ $٤٦٤ ذ$ $٤٦٥ ر$ $٤٦٦ ز$ $٤٦٧ ح$ $٤٦٨ ط$ $٤٦٩ ق$ $٤٧٠ ك$ $٤٧١ ع$ $٤٧٢ ف$ $٤٧٣ ي$ $٤٧٤ ر$ $٤٧٥ س$ $٤٧٦ ش$ $٤٧٧ ص$ $٤٧٨ ض$ $٤٧٩ ظ$ $٤٨٠ ط$ $٤٨١ ذ$ $٤٨٢ ر$ $٤٨٣ ز$ $٤٨٤ ح$ $٤٨٥ ط$ $٤٨٦ ق$ $٤٨٧ ك$ $٤٨٨ ع$ $٤٨٩ ف$ $٤٩٠ ي$ $٤٩١ ر$ $٤٩٢ س$ $٤٩٣ ش$ $٤٩٤ ص$ $٤٩٥ ض$ $٤٩٦ ظ$ $٤٩٧ ط$ $٤٩٨ ذ$ $٤٩٩ ر$ $٥٠٠ ز$ $٥٠١ ح$ $٥٠٢ ط$ $٥٠٣ ق$ $٥٠٤ ك$ $٥٠٥ ع$ $٥٠٦ ف$ $٥٠٧ ي$ $٥٠٨ ر$ $٥٠٩ س$ $٥١٠ ش$ $٥١١ ص$ $٥١٢ ض$ $٥١٣ ظ$ $٥١٤ ط$ $٥١٥ ذ$ $٥١٦ ر$ $٥١٧ ز$ $٥١٨ ح$ $٥١٩ ط$ $٥٢٠ ق$ $٥٢١ ك$ $٥٢٢ ع$ $٥٢٣ ف$ $٥٢٤ ي$ $٥٢٥ ر$ $٥٢٦ س$ $٥٢٧ ش$ $٥٢٨ ص$ $٥٢٩ ض$ $٥٣٠ ظ$ $٥٣١ ط$ $٥٣٢ ذ$ $٥٣٣ ر$ $٥٣٤ ز$ $٥٣٥ ح$ $٥٣٦ ط$ $٥٣٧ ق$ $٥٣٨ ك$ $٥٣٩ ع$ $٥٤٠ ف$ $٥٤١ ي$ $٥٤٢ ر$ $٥٤٣ س$ $٥٤٤ ش$ $٥٤٥ ص$ $٥٤٦ ض$ $٥٤٧ ظ$ $٥٤٨ ط$ $٥٤٩ ذ$ $٥٥٠ ر$ $٥٥١ ز$ $٥٥٢ ح$ $٥٥٣ ط$ $٥٥٤ ق$ $٥٥٥ ك$ $٥٥٦ ع$ $٥٥٧ ف$ $٥٥٨ ي$ $٥٥٩ ر$ $٥٦٠ س$ $٥٦١ ش$ $٥٦٢ ص$ $٥٦٣ ض$ $٥٦٤ ظ$ $٥٦٥ ط$ $٥٦٦ ذ$ $٥٦٧ ر$ $٥٦٨ ز$ $٥٦٩ ح$ $٥٧٠ ط$ $٥٧١ ق$ $٥٧٢ ك$ $٥٧٣ ع$ $٥٧٤ ف$ $٥٧٥ ي$ $٥٧٦ ر$ $٥٧٧ س$ $٥٧٨ ش$ $٥٧٩ ص$ $٥٨٠ ض$ $٥٨١ ظ$ $٥٨٢ ط$ $٥٨٣ ذ$ $٥٨٤ ر$ $٥٨٥ ز$ $٥٨٦ ح$ $٥٨٧ ط$ $٥٨٨ ق$ $٥٨٩ ك$ $٥٩٠ ع$ $٥٩١ ف$ $٥٩٢ ي$ $٥٩٣ ر$ $٥٩٤ س$ $٥٩٥ ش$ $٥٩٦ ص$ $٥٩٧ ض$ $٥٩٨ ظ$ $٥٩٩ ط$ $٦٠٠ ذ$ $٦٠١ ر$ $٦٠٢ ز$ $٦٠٣ ح$ $٦٠٤ ط$ $٦٠٥ ق$ $٦٠٦ ك$ $٦٠٧ ع$ $٦٠٨ ف$ $٦٠٩ ي$ $٦١٠ ر$ $٦١١ س$ $٦١٢ ش$ $٦١٣ ص$ $٦١٤ ض$ $٦١٥ ظ$ $٦١٦ ط$ $٦١٧ ذ$ $٦١٨ ر$ $٦١٩ ز$ $٦٢٠ ح$ $٦٢١ ط$ $٦٢٢ ق$ $٦٢٣ ك$ $٦٢٤ ع$ $٦٢٥ ف$ $٦٢٦ ي$ $٦٢٧ ر$ $٦٢٨ س$ $٦٢٩ ش$ $٦٣٠ ص$ $٦٣١ ض$ $٦٣٢ ظ$ $٦٣٣ ط$ $٦٣٤ ذ$ $٦٣٥ ر$ $٦٣٦ ز$ $٦٣٧ ح$ $٦٣٨ ط$ $٦٣٩ ق$ $٦٤٠ ك$ $٦٤١ ع$ $٦٤٢ ف$ $٦٤٣ ي$ $٦٤٤ ر$ $٦٤٥ س$ $٦٤٦ ش$ $٦٤٧ ص$ $٦٤٨ ض$ $٦٤٩ ظ$ $٦٥٠ ط$ $٦٥١ ذ$ $٦٥٢ ر$ $٦٥٣ ز$ $٦٥٤ ح$ $٦٥٥ ط$ $٦٥٦ ق$ $٦٥٧ ك$ $٦٥٨ ع$ $٦٥٩ ف$ $٦٦٠ ي$ $٦٦١ ر$ $٦٦٢ س$ $٦٦٣ ش$ $٦٦٤ ص$ $٦٦٥ ض$ $٦٦٦ ظ$ $٦٦٧ ط$ $٦٦٨ ذ$ $٦٦٩ ر$ $٦٧٠ ز$ $٦٧١ ح$ $٦٧٢ ط$ $٦٧٣ ق$ $٦٧٤ ك$ $٦٧٥ ع$ $٦٧٦ ف$ $٦٧٧ ي$ $٦٧٨ ر$ $٦٧٩ س$ $٦٨٠ ش$ $٦٨١ ص$ $٦٨٢ ض$ $٦٨٣ ظ$ $٦٨٤ ط$ $٦٨٥ ذ$ $٦٨٦ ر$ $٦٨٧ ز$ $٦٨٨ ح$ $٦٨٩ ط$ $٦٩٠ ق$ $٦٩١ ك$ $٦٩٢ ع$ $٦٩٣ ف$ $٦٩٤ ي$ $٦٩٥ ر$ $٦٩٦ س$ $٦٩٧ ش$ $٦٩٨ ص$ $٦٩٩ ض$ $٧٠٠ ظ$ $٧٠١ ط$ $٧٠٢ ذ$ $٧٠٣ ر$ $٧٠٤ ز$ $٧٠٥ ح$ $٧٠٦ ط$ $٧٠٧ ق$ $٧٠٨ ك$ $٧٠٩ ع$ $٧١٠ ف$ $٧١١ ي$ $٧١٢ ر$ $٧١٣ س$ $٧١٤ ش$ $٧١٥ ص$ $٧١٦ ض$ $٧١٧ ظ$ $٧١٨ ط$ $٧١٩ ذ$ $٧٢٠ ر$ $٧٢١ ز$ $٧٢٢ ح$ $٧٢٣ ط$ $٧٢٤ ق$ $٧٢٥ ك$ $٧٢٦ ع$ $٧٢٧ ف$ $٧٢٨ ي$ $٧٢٩ ر$ $٧٣٠ س$ $٧٣١ ش$ $٧٣٢ ص$ $٧٣٣ ض$ $٧٣٤ ظ$ $٧٣٥ ط$ $٧٣٦ ذ$ $٧٣٧ ر$ $٧٣٨ ز$ $٧٣٩ ح$ $٧٤٠ ط$ $٧٤١ ق$ $٧٤٢ ك$ $٧٤٣ ع$ $٧٤٤ ف$ $٧٤٥ ي$ $٧٤٦ ر$ $٧٤٧ س$ $٧٤٨ ش$ $٧٤٩ ص$ $٧٥٠ ض$ $٧٥١ ظ$ $٧٥٢ ط$ $٧٥٣ ذ$ $٧٥٤ ر$ $٧٥٥ ز$ $٧٥٦ ح$ $٧٥٧ ط$ $٧٥٨ ق$ $٧٥٩ ك$ $٧٦٠ ع$ $٧٦١ ف$ $٧٦٢ ي$ $٧٦٣ ر$ $٧٦٤ س$ $٧٦٥ ش$ $٧٦٦ ص$ $٧٦٧ ض$ $٧٦٨ ظ$ $٧٦٩ ط$ $٧٧٠ ذ$ $٧٧١ ر$ $٧٧٢ ز$ $٧٧٣ ح$ $٧٧٤ ط$ $٧٧٥ ق$ $٧٧٦ ك$ $٧٧٧ ع$ $٧٧٨ ف$ $٧٧٩ ي$ $٧٨٠ ر$ $٧٨١ س$ $٧٨٢ ش$ $٧٨٣ ص$ $٧٨٤ ض$ $٧٨٥ ظ$ $٧٨٦ ط$ $٧٨٧ ذ$ $٧٨٨ ر$ $٧٨٩ ز$ $٧٩٠ ح$ $٧٩١ ط$ $٧٩٢ ق$ $٧٩٣ ك$ $٧٩٤ ع$ $٧٩٥ ف$ $٧٩٦ ي$ $٧٩٧ ر$ $٧٩٨ س$ $٧٩٩ ش$ $٨٠٠ ص$ $٨٠١ ض$ $٨٠٢ ظ$ $٨٠٣ ط$ $٨٠٤ ذ$ $٨٠٥ ر$ $٨٠٦ ز$ $٨٠٧ ح$ $٨٠٨ ط$ $٨٠٩ ق$ $٨١٠ ك$ $٨١١ ع$ $٨١٢ ف$ $٨١٣ ي$ $٨١٤ ر$ $٨١٥ س$ $٨١٦ ش$ $٨١٧ ص$ $٨١٨ ض$ $٨١٩ ظ$ $٨٢٠ ط$ $٨٢١ ذ$ $٨٢٢ ر$ $٨٢٣ ز$ $٨٢٤ ح$ $٨٢٥ ط$ $٨٢٦ ق$ $٨٢٧ ك$ $٨٢٨ ع$ $٨٢٩ ف$ $٨٣٠ ي$ $٨٣١ ر$ $٨٣٢ س$ $٨٣٣ ش$ $٨٣٤ ص$ $٨٣٥ ض$ $٨٣٦ ظ$ $٨٣٧ ط$ $٨٣٨ ذ$ $٨٣٩ ر$ $٨٤٠ ز$ $٨٤١ ح$ $٨٤٢ ط$ $٨٤٣ ق$ $٨٤٤ ك$ $٨٤٥ ع$ $٨٤٦ ف$ $٨٤٧ ي$ $٨٤٨ ر$ $٨٤٩ س$ $٨٥٠ ش$ $٨٥١ ص$ $٨٥٢ ض$ $٨٥٣ ظ$ $٨٥٤ ط$ $٨٥٥ ذ$ $٨٥٦ ر$ $٨٥٧ ز$ $٨٥٨ ح$ $٨٥٩ ط$ $٨٦٠ ق$ $٨٦١ ك$ $٨٦٢ ع$ $٨٦٣ ف$ $٨٦٤ ي$ $٨٦٥ ر$ $٨٦٦ س$ $٨٦٧ ش$ $٨٦٨ ص$ $٨٦٩ ض$ $٨٧٠ ظ$ $٨٧١ ط$ $٨٧٢ ذ$ $٨٧٣ ر$ $٨٧٤ ز$ $٨٧٥ ح$ $٨٧٦ ط$ $٨٧٧ ق$ $٨٧٨ ك$ $٨٧٩ ع$ $٨٨٠ ف$ $٨٨١ ي$ $٨٨٢ ر$ $٨٨٣ س$ $٨٨٤ ش$ $٨٨٥ ص$ $٨٨٦ ض$ $٨٨٧ ظ$ $٨٨٨ ط$ $٨٨٩ ذ$ $٨٩٠ ر$ $٨٩١ ز$ $٨٩٢ ح$ $٨٩٣ ط$ $٨٩٤ ق$ $٨٩٥ ك$ $٨٩٦ ع$ $٨٩٧ ف$ $٨٩٨ ي$ $٨٩٩ ر$ $٩٠٠ س$ $٩٠١ ش$ $٩٠٢ ص$ $٩٠٣ ض$ $٩٠٤ ظ$ $٩٠٥ ط$ $٩٠٦ ذ$ $٩٠٧ ر$ $٩٠٨ ز$ $٩٠٩ ح$ $٩١٠ ط$ $٩١١ ق$ $٩١٢ ك$ $٩١٣ ع$ $٩١٤ ف$ $٩١٥ ي$ $٩١٦ ر$ $٩١٧ س$

مرات نحصل على خط الميل الثابت الذى مسقطه م' ل' د' والذى يبدأ
النقطة م وينتهى بالنقطة د تقسها فيكون هو المنحنى المطلوب .

١٦٨ : المنحنيات زوايا الميل الاعظم

لنفرض فى (شكل ١٤٦) أن أ نقطة ما على خط المنسوب ٥٢ رسمنا
منها مستقيماً أ' ب' عمودياً على المماس المرسوم عندها لخط المنسوب ٥٢ نفسه —
ليقابل خط المنسوب التالى ٥٠ فى النقطة ب' ومن ب' أقننا العمودى



(شكل ١٤٦)

ب' ح' على المماس المرسوم عندها لخط المنسوب ٥٠ وهكذا . فإذا اعتبرنا أجزاء
الخط المنكسر أ' ب' ح' ... صغيرة جداً كافياً بحيث يمكن اعتبار المنحنى
أ' ب' ح' د' هـ مسقطاً لمنحنى أ ب ح د هـ واقع على السطح الطبوغرافى فإن هذا

المنحنى الأخير يسمى منحنياً ذا ميل أعظم ^(١) . ويؤخذ من هذه العملية أنه لا يمكن رسم أكثر من خط واحد ذي ميل أعظم على وجه العموم من أية نقطة «عادية» على السطح الطبوغرافى . على أن هذا لا يمنع من وجود نقط شاذة على السطح يمكن أن يمد منها أكثر من خط واحد ذي ميل أعظم بل عدد لا نهاية له من هذه الخطوط كما هو الحال إذا كانت النقطة نقطة عليا أو سفلى في هضبة أو وادى . وتمثل خطوط الميل الاعظم المرسومة من النقط المختلفة الى حد ما طرق سير المياه على السطح الطبوغرافى .

ولما كان المسقط 'ب' ح'... للخطذى الميل الاعظم المار بالنقطة ١ متعامداً بالعمل على خطوط المنسوب في نقط تقاطعه معها ولما كانت خطوط المنسوب تمثل منحنيات أفقية على السطح فينتج من ذلك أن الخطوط ذات الميل الاعظم على سطح طبوغرافى ومخطوط تقاطع السطح مع المستويات الأفقية المختلفة تتلاقى بمجموعتين من المنحنيات المتعامدة في الفراغ وفي المسقط .

بند ١٦٩ : المماسات والمستويات المماسية للسطح الطبوغرافى

المماس ٧ في النقطة ح للمنحنى ١ ب ح و هـ (شكل ١٤٤) هو مماس للسطح عند هذه النقطة ويتعين بمعلومية مسقطه ٧' والزاوية α التى يميل بها

(١) إذا فرضنا أن خطوط المنسوب في منطقة صغيرة على سطح الارض تتألف من منحنيات متوازية ومتساوية البعد فان الخط ذا الميل الاعظم الذى يمكن رسمه في هذه المنطقة يؤول الى خط مستقيم وفي هذه الحالة يكون المستوى المماس للسطح (أنظر بند ١٦٩) في إحدى نقط هذا المستقيم مماساً للسطح بطول المستقيم ويمكن إذن اعتبار تلك المنطقة من سطح الارض جزءاً من سطح قابل للاستواء (بند ١٢٤) . أما اذا آلت جميع المنحنيات ذوات الميل الاعظم على سطح طبوغرافى الى خطوط مستقيمة فان السطح يكون في هذه الحالة ثابت الميل على المستوى الاقصى أى يؤول الى «سطح ميل» (أنظر بند ١٧٠) .

على مستوى المقارنة فاذا رسمنا مماساً جديداً للسطح عند النقطة ح أى مماساً جديداً لمنحن آخر ماراً بالنقطة ح وواقع على السطح مثل خط المنسوب ١٠ فان هذين المماسين يحددان المستوى المماس للسطح فى النقطة ح . ويقاس ميل السطح الطبوغرافى عند امرى نقطه بظل الزاوية التى يصنعها المستوى المماس لـ فى هذه النقطة مع مستوى المقارنة .

ولنفرض فى (شكل ١٤٣ ب) أنه يراد تعيين المستوى المماس T للسطح فى النقطة ه فابسط طريقة لذلك أن تقطع السطح بمستوى بروفيلى Φ ماراً بالنقطة ه ثم نطبق هذا المستوى على أحد المستويات الموازية لمستوى المقارنة فيكون مماس المقطع فى ه هو المماس للسطح الواقع فى المستوى Φ ويمكن حينئذ رسم مسقطه المدرج الذى يظهر منطبقاً على الاثر Φ' لمستوى البروفيل . ثم نرسم مماس خط المنسوب ٢٣ الواقعة عليه ه' فيكون هو مسقط الاقصى ٢٣ للمستوى T وبذا يمكن رسم مقياس الميل α' للمستوى المطلوب كاهوميين فى (شكل ١٤٣ ب) . ويلاحظ أننا اذا أمررنا بالنقطة ه مستوى بروفيلى عمودياً على مماس خط المنسوب ٢٣ فى ه' فان المماس الواقع فى هذا المستوى للسطح يكون فى هذه الحالة أعظم مماسات السطح ميلاً عند النقطة ه على المستوى الاقصى فهو المماس للمنحنى ذى الميل الاعظم المار بالنقطة ه .

الفصل الرابع

سطوح الميل وتقاطعها مع السطوح الطبوغرافية

بنر ١٧٠ : تعريف

يسمى سطح ميل كل سطح قابل للاستواء يكون ثابت الميل عند جميع نقطه على مستو ثابت (المستوى الاقصى) . فالسطح اللولبي القابل للاستواء (بند ١١٣) وهو السطح المتولد عن مماسات منحن لولبي في نقطه المختلفه هو سطح ميل . واذا علم منحن فراغى فالمستوى الذى يتحرك مائلاً بحيث يكره ثابت الميل على المستوى الاقصى (فهو يتحرك لإذن بدرجة واحدة من درجات الاطلاق) ينفذ أثناء الحركة سطح ميل تكون روااسمه (وهى غير مماسات المنحنى الفراغى) خطوطاً مستقيمة ثابتة الميل على المستوى الاقصى ويكون هذا الميل الثابت مساوياً لميل المستوى المتحرك .

وإذا قطع سطح ميل بمستويات أفقية يرتفع كل منها عن الآخر يبعد ثابت فان خطوط التقاطع التى يطلق عليها أيضاً اسم خطوط المنسوب تكون حيثئذ عدة منحنيات متوازية ومتساوية البعد فى المسقط كما تكون المنحنيات ذوات الميل الاعظم على السطح فى هذه الحالة كلها خطوطاً مستقيمة (روااسم السطح) ثابتة الميل على المستوى الاقصى .

بنر ١٧١ : سطوح الميل المستعملة فى الانشاءات

إذا أريد انشاء جسر أو شارع مثلاً على قطعة من الارض فانه يستعمل لامالة الجسر أو الشارع وسنده على سطح الارض (أو بالعكس) — سطح ميل يمر بحرف الجس ويتراوح ميله الثابت عادة بين ١ : ١٠ : ١٢,٥ (أو ٤ : ٥) ٩

١,٥:١ (أو ٢:٣) ١٩:١٩٢:٢ على حسب طبيعة الارض . وعلى هذا يمكن التفرقة بين الحالات الآتية :

(١) اذا كان حرف الجسر مستقيماً أفقياً أو مائلاً كان سطح الميل مستوياً وفي الحالة الثانية يمكن الحصول على مقياس ميل المستوى اذا علم هذا الميل أو علت الزاوية التي يصنعها مع مستوى المقارنة بالطريقة التي شرحناها في مثال ٣ (بند ١٥٥) .

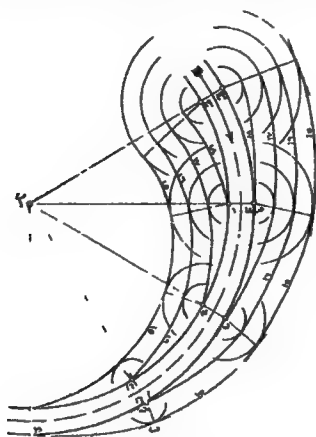
(٢) اذا كان حرف الجسر دائرة (أو قوس دائرة) واقعة في مستو أفقى كان سطح الميل سطحاً مخروط دوراني رأسه المحور وتكون خطوط المنسوب في هذه الحالة دوائر متحدة المركز كما تكون الخطوط ذوات الميل الاعظم رؤاسم المخروط (١) .

(٣) اذا كان حرف الجسر منحنيّاً فراعياً حينها اتفق معلوماً بالمساقط المرقومة لعدد كاف من نقطه فان سطح الميل يمكن الحصول عليه باعتباره السطح المغلف لمخاريط الميل المختلفة التي رؤوسها نقط المنحنى والتي تميل على مستوى المقارنة بالميل المعلوم للسطح وتكون خطوط المنسوب في هذه الحالة هي المنحنيات المتوازية التي يغلف كل منها قواعد المخاريط المشار اليها الواقعة في مستو أفقى واحد .

ويبين (شكل ١٤٧) كيفية الحصول على خطوط المنسوب لسطح الميل وكذا رؤاسمه عند ما يكون حرف الجسر المار به السطح منحنيّاً لولياً . فلما كان حرف الجسر في هذه الحالة ثابت الميل على المستوى الاقصى أو مستوى المقارنة II فانه يمكن لذلك تدريجه (كالخط المستقيم) في النقط ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ...

(١) اذا كان حرف الجسر أى منحني واقع في مستو أفقى كقطع ناقص مثلاً فان أعمدة المنحنى في نقطه المختلفة تمثل حيثذ في المسقط رؤاسم سطح الميل الذي لا يكون في هذه الحالة سطحاً مخروطياً وإنما يمكن الحصول على مقاطعه الاقعية في لمسقط كمنحنيات موازية لحرف الجسر .

وإذا اعتبرنا هذه النقطة رؤوساً لمخاريط ميل تميل جميعاً على Π بالميل
المعلوم لسطح الميل وليكن هذا الميل ١ : ١,٥ فإن المستوى الاقصى ١٥ يقطع
هذه المخاريط في دوائر مراكزها نقط التدرج المذكورة وأنصاف أقطارها على



(شكل ١٤٧)

التوالى صفر ١,٥ ٢,٥ ٣,٥
٤,٥ ... متراً ويكون خط
المنسوب ١٥ لسطح الميل
هو المنحنى للمغلف لتلك الدوائر
(ويمر بالنقطة ١٥ على حرف
الجسر) . وإذا كان 'س'
مستقط المماس للمنحنى اللولبي في
النقطة ١ (ومنسوبها ١٦) وكان
س' أثر هذا المماس على المستوى
الاقصى ١٥ (ويمكن الحصول
عليه كما قدمنا في بند ١٠٩ بجعل
'س' مساوياً لطول القوس
١٥ — ١) ورسم من س' المماس

س' ب' لقاعدة مخروط الميل الذى رأسه في النقطة ١ وارتفاعه متراً واحداً (١) كان
س' ب' أثر المستوى المماس المشترك للمخروط وسطح الميل على المستوى الاقصى ١٥

(١) يلاحظ أنه يمكن رسم مماسين من النقطة س' الى قاعدة المخروط ويستعمل
المماس الثانى (غير المبين بالشكل) في حالة ما اذا كان سطح الميل المراد تعيينه يميل الى
أعلا (بدلاً من ميله الى أسفل كما هو الحال في الشكل) أى اذا كان الجسر أو الشارع
أوطى من منسوب الارض في هذا المكان .

لان هذا المستوى لابد أن يحتوى تماس المنحنى اللولبي في ١ باعتبار هذا المنحنى منحنيًا مرسومًا على السطح. كما أن راسم التماس ١ ب بين السطحين وبين المستوى التماس هو نفس الراسم المار بالنقطة ١ لسطح الميل وتكون ب' هي نقطة التماس بين قاعدة المخروط السالف الذكر وخط المنسوب ١٥ لسطح الميل. ولما كانت الزاوية المحصورة بين مسقط راسم السطح في أى وضع من أوضاعه وبين مسقط تماس المنحنى اللولبي في نقطة تقاطعه مع الراسم هي كما يتبين من الشكل زاوية ثابتة كان من السهل تعيين أى عدد من رواسم السطح بدون حاجة الى تكرار رسم تماس المنحنى اللولبي في كل مرة.

ويلاحظ أن سطح الميل في هذه الحالة هو سطح لولبي قابل للاستواء (بند ١١٢) ضلع رجوعه هو منحن لولبي جديد (غير حرف الشارع) يمس الاوضاع المختلفة لراسم السطح. فاذا رمزنا الى نصفى قطرى الاسطوانتين المرسوم عليهما حرف الشارع وضلع الرجوع بالرمزين μ, ν على التوالى والى زاوية ميل التماس لحرف الشارع على المستوى الاقصى Π بالرمز α والى زاوية ميل راسم السطح (التماس لضلع الرجوع) على Π بالرمز β فانه لما كانت الخطوطان لهذين المنحنيين متساويتين فينتج أن

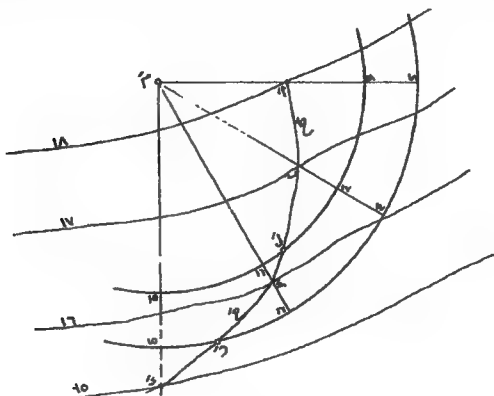
$$\chi = 2 ط \mu, \alpha \alpha = 2 ط \nu, \beta \beta$$

$$\mu = \nu \times \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{أى أن}$$

بند ١٧٢ : تقاطع السطوح والمنحنيات مع السطح الطبوغرافى

لايجاد منحنى تقاطع سطح معلوم بعدد كاف من خطوط المنسوب مع سطح طبوغرافى نصل نقط تقاطع خطوط المنسوب المتساورة (أى الواقعة في مستو اقصى واحد) في السطحين بمنحن متصل فيكون هو منحنى التقاطع المطلوب .

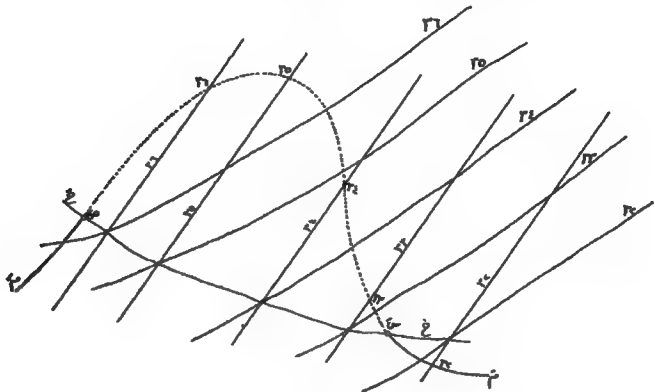
وإذا علمت رواسم السطح كما هو الحال في سطح الميل الممين في (شكل ١٤٧) فإن منحنى التقاطع يتألف أيضاً من نقط تقاطع هذه الرواسم مع السطح الطبوغرافى. ولنفرض الآن أن الدائرتين المتحدتي المركز م' في (شكل ١٤٨) يمثلان منحنين لولييين هما حرفا شارع يراد إنشاؤه على قطعة الارض الميئة فيلاحظ



(شكل ١٤٨)

أولاً أن سطح الشارع في هذه الحالة هو سطح لولبي محورى عمودى (بند ١١٩) رواسمه في المسقط هي المستقيمت ١٨ - ١٨ ١٧ - ١٧ ١٦ - ١٦ ١٥ ... التى تمر جميعاً بالمركز م' فإذا تقاطعت هذه المستقيمت مع خطوط المنسوب ١٨ ١٧ ١٦ ١٥ ... للسطح الطبوغرافى فى النقط ا' ب' ج' د' ... على التناظر وتقاطع المنحنى ا' ب' ج' د' مع الدائرتين فى ل' م' ن' كان المنحنى ل' م' ن' هو مسقط منحنى تقاطع سطح الشارع مع السطح الطبوغرافى . ولايجاد نقط تقاطع المنحنى الفراغى م الممين فى (شكل ١٤٩) بالمساقط المرقومة ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ... لعدد كاف من نقطه نمر بهذا المنحنى

سطحاً حيثما اتفق والا سهل أن يكون هذا السطح أسطوانة ذات رواسم أفقه ودليلها المنحني ويمكن تمثيل هذه الرواسم في المسقط برسم مستقيمت متوازية



(شكل ١٤٩)

من النقط ٣٢ ٣٣ ٣٤ ... في أى اتجاه فإذا تقاطعت هذه المستقيمت مع خطوط المنسوب ٣٢ ٣٣ ٣٤ ... على التناظر فإن المنحني ح' ح' الذى يتألف من نقط التقاطع يمثل حينئذ المسقط لمنحني تقاطع الاسطوانة المذكورة مع السطح الطبوغرافى ويتقاطع لذلك مع المسقط م' للمنحني المعلوم في نقطتين (أو أكثر) س' س' هما مسقطان لنقطتين من نقط تقاطع المنحني م مع السطح الطبوغرافى .

الفصل الخامس

أمثلة عملية

بشر ١٧٣ : الطرق المستعملة في رسم خطوط التقاطع

إذا علمت خريطة طبوغرافية وتحددت سطوح الميل التي تستخدم لإمالة سطح الشارع أو الجسر على السطح الطبوغرافي (أو بالعكس) فإنه يطلق على الميل الثابت لهذه السطوح (الذي يتراوح غالباً بين ١ : ١٠ إلى ٣ : ١ كما قدمنا) اسم الميل المائى وذلك تمييزاً له من الميل الطولى الذى يطلق عادة على ظل الزاوية التى يميل بها حرف الشارع أو محوره على المستوى الاقصى^(١) . وتستخدم فى المسائل العملية لرسم خطوط التقاطع طريقتان :

الطريقة الاولى وتكون برسم خطوط المنسوب لسطوح الميل المختلفة ثم تعيين نقط تقاطع هذه الخطوط مع خطوط المنسوب للسطح الطبوغرافي بالتناظر وذلك كما قدمنا فى (بندى ١٧١ و ١٧٢) .

(١) يتوقف الميل الطولى على طبيعة الارض فى المنطقة وهل هى جبلية أو منبسطة كما يتوقف على نوع المشروع المراد إنشاؤه فى المنطقة وهل هو مشروع شارع أو جسر سكة حديد مثلاً . فالميل الطولى للشارع يختلف من ٢٪ أو ٣٪ فى المناطق المنبسطة الى ١٠٪ أو ١٢٪ فى المناطق الجبلية . أما فى شؤون السكك الحديدية فالميل الطولى يكون عادة أقل من هذا بكثير ولذا يستخدم فى التعبير عنه عدد أمتار الارتفاع فى كل ألف متر طولى فيقال مثلاً إن الميل الطولى ٥ / ١٠٠ أى ٥٪ على أن هذا الميل قد يصل فى بعض البلاد الجبلية للخطوط غير الرئيسية الى ٤٠ / ١٠٠ . أو ٥٠ / ١٠٠ . وقد يصل لبعض سكك حديد الجبال فى تلك البلاد الى ٢٥٠ / ١٠٠ ويكون الميل الطولى صفراً اذا صممت الظروف بان يكون الشارع أفقياً غير أنه لا بد فى مثل هذه الحالة من إمالة الشارع ميلاً طولياً بسيطاً لتصريف المياه .

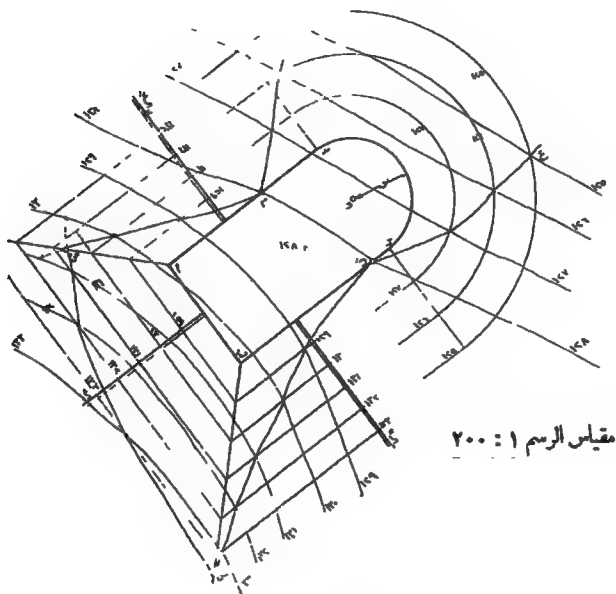
الطريقة الثانية وتكون باستخدام مقاطع عرضية (بروفيلات) عمودية على محور الشارع كما سنبينه في (بند ١٧٥) . وتفضل هذه الطريقة عادة في المسائل العملية لان المقاطع العرضية السطح الطبوغرافي يمكن الحصول عليها مباشرة بواسطة « الميزانية » . على أنه يشترط في هذه الطريقة أن يكون سطح الشارع أو الجسر أفقياً أو مائلاً طويلاً بسيطاً يسمح باعتبار الزاوية ω في (شكل ١٤٧) قائمة تقريباً (إذ يكون الفرق حيثئذ صغيراً) . ولكن يجب أن يلاحظ أن هذا الفرض التقريبي في حالة وجود ميل طولي يجعل السطوح الجانبية غير ثابتة الميل على المستوى الاقصى وأيضاً غير قابلة للاستواء . فاذا اعتبرنا مثلاً الزاوية ω في (شكل ١٤٧) قائمة كان معنى هذا أننا نفترض أن المجموعة كلها ناشئة عن تحرك المقطع العرضي حركة لولبية حول المحور CC في هذه الحالة يؤول كل من السطحين الجانبيين الى سطح لولبي محوري مائل (بند ١٢٠) .
ونعطي فيما يلي مثالا على كل واحدة من الطريقتين .

بند ١٧٤ : المثال الاول

يبين (شكل ١٥٠) خريطة طبوغرافية لقطعة من الارض والمسقط المرقوم
أ' ب' و' ح' لمصطبة أفقية (منسوبها ١٢٨) يراد إنشاءها على قطعة الارض .
والمطلوب تمثيل سطوح الميل ورسم خطوط تقاطعها بعضها مع بعض ومع سطح
الارض بالطريقة الاولى اذا علم أن الميول الجانبية في الحفر ١ : ١ وفي
الردم ٢ : ٣ .

لذلك بدأ بتعيين الحد الفاصل بين الحفر والردم وهو خط تقاطع سطح
المصطبة مع سطح الارض فلما كانت المصطبة أفقية كان الحد الفاصل في هذه
الحالة هو نفس خط المنسوب ١٢٨ الذي يقابل الحرفين أ' ح' م' ب' و' في
النقطتين م' م' و' وبذا يكون م' ح' ب' أ' مسقط الجزء م' ح' ب' أ' من المصطبة

الذى يلزم لانشائه عملية خفر لانه أوطى من سطح الارض ويكون م' د' و' ح' مسقط الجزء الباقي الذى يلزم لانشائه عملية ردم لانه أعلا من سطح الارض .



مقياس الرسم ١ : ٢٠٠

(شكل ١٥٠)

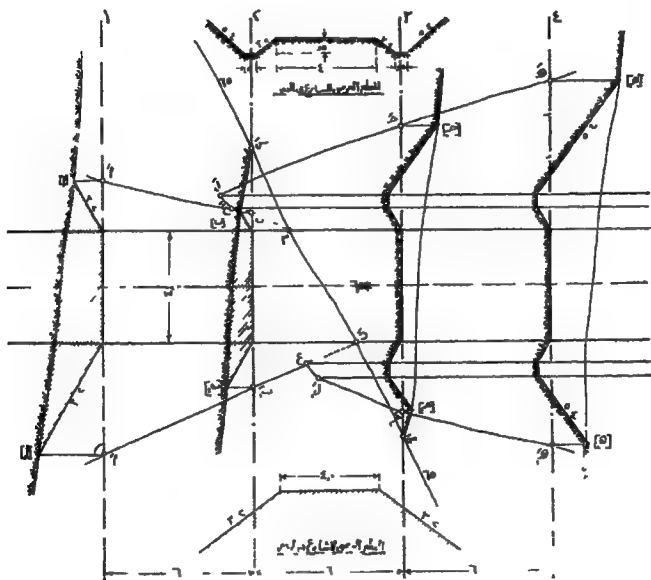
ثم نعين سطوح الميل الجانبية المارة بالاحرف المختلفة للصطبة : فسطوح الميل المارة بالمستقيبات اللاحقة د ب م ب ١ م ١ هي مستويات $A_1 A_2 A_3$ ويميل كل منها الى أعلا بزاوية ظلها = ١ (لان الميل فى الخفر = ١ : ١) وبذا تكون مقاييس الميل لهذه المستويات هي $A_1 A_2 A_3$ على التوالى

حيث المعدل لكل منها يساوى متراً واحداً . ويتكوّن سطح الميل اللذان يمران بالمستقيمين $م ح و$ من مستويين أيضاً يميل كل منهما الى أسفل بزاوية ظلها $= \frac{2}{3}$ (لان الميل في الردم $= 2 : 3$) وإذن يكون المعدل لمقياس ميل كل من هذين المستويين $= \frac{3}{4} = 1,5$ متراً (وقد ضربنا صفحاً عن رسم هذين المقياسين في الشكل) . أما سطح الميل المار بنصف الدائرة $ح و$ فهو سطح مخروط دائري قائم زاوية قاعدته $= \frac{1}{3}$ وتألّف خطوط المناسيب $١٢٧ ١٢٦ ١٢٥ ...$ له من دوائر متحدة المركز في $و'$ وأنصاف أقطارها تساوى بالامتار على التوالي $١,٥ + ١,٣ + ١,١ + ٠,٩ + ٠,٥ + ٠,٤ ...$ (حيث $١,٥$ هو نصف قطر الدائرة $ح و'$) .

وأخيراً يمكن رسم منحنيات تقاطع السطح الطبوغرافى مع مستويات الميل المختلفة ومع السطح المخروطى كما تقدم فى (بندى ١٦١ و ١٧٢) فثلاً $و' س'$ هو المنحنى الذى يصل نقط تقاطع مساطح الاقنيات $١٢٩ ١٣٠ ١٣١ ...$ فى المستوى A مع خطوط المنسوب $١٢٩ ١٣٠ ١٣١ ...$ على التناظر . أما المستقيمان $ب' س' و د' س'$ فهما مسقطا خطى تقاطع المستوى A مع المستويين $A ١, A ٢$ على التوالي . ويلاحظ أن المنحنيين $و' س' و د' س'$ يتقاطعان فى النقطة $س'$ الواقعة على المستقيم $ب' س'$ لان هذه النقطة هى مسقط إحدى نقط تقاطع ثلاثة سطوح : المستوى A والمستوى $A ٢$ و سطح الارض ويمكن تعيين $س'$ ورقم النقطة $س$ بطريقة أضبط باعتبارها إحدى نقط تقاطع المستقيم $ب س$ مع سطح الارض اذا طبقنا المستوى المسقط للمستقيم $ب س$ على أحد المستويات الاقية . ويقال مثل هذا عن $س'$ حيث يتلاقى المنحنيان $م' س' و د' س'$.

بند ١٧٥ : المثال الثاني

إذا علم في (شكل ١٥١) مسقط طريق أقى (منسوبه ٦٥) يراد إنشاؤه على قطعة من الأرض وكان سطح الأرض في هذه المنطقة معلوماً بالبروفيلات ١، ٢، ٣، ٤ (وقد تصورنا أنهم تطبق مستوى كل منها على المستوى الأقى ٦٥)



(شكل ١٥١)

فالمطلوب رسم تقاطع الميول مع سطح الأرض باستعمال الطريقة الثانية في (بند ١٧٣) مع ملاحظة أن يكون المقطعان العرضيان للشارع بالميول الجانبية في كل من الحفر والردم كما هو مبين بالشكل .

قبل أن نشرح طريقة العمل نلفت نظر القارئ الى المقطع العرضي للجزء الطريق الموجود في الحفر فان ميوله الجانبية بدلا من أن تمر بحرفى الشارع متجهة الى أعلا مباشرة لسند سطح الارض — تتجه أولا الى أسفل لعمق صغير (٥٠ سم) ثم تتجه بعد ذلك الى أعلا كما هو مبين بالشكل مكوّنة بذلك مصرفين صغيرين على الجانبين (عرض قاع كل منهما ٥٠ سم) . أما الغرض من هذين المصرفين فهو منع مياه الامطار وما شابه ذلك في الحفر حيث يكون سطح الطريق أوطى من سطح الارض — من الانحدار مباشرة الى سطح الطريق مسية بذلك تأكله .

ولحل هذا المثال يحسن أن نبداً أولاً برسم خط المنسوب ٦٥ على وجه التقريب وذلك بأن فصل مثلاً النقطتين 'س' ٩٠ 'ص' (وهما مسقطا نقطتين 'س' ٩٠ 'ص' على سطح الارض منسوب كل منهما ٦٥) فيكون الخط 'س' 'ص' هو خط المنسوب ٦٥ وهو الحد الفاصل بين الحفر والردم الذى يقطع حرفى الشارع فى النقطتين المحدتين 'م' ٩٠ 'د' . ثم نرسم المسطبتين 'ب' 'م' ٩٠ 'ب' 'د' لمنحني تقاطع مستوي الميل فى الردم مع سطح الارض فالنقطة 'أ' هى مسقط النقطة 'أ' الواقعة فى مستوى البروفيل (١) والى موقعها بعد تطبيق هذا المستوى على المستوى الاقصى ٦٥ هو النقطة [١] (حيث يتقاطع سطح الارض فى الموقع مع المستقيم ذى الميل الاعظم فى مستوى الميل) . ونفس الطريقة نعين المساط 'أ' ٩٠ 'ب' 'ك' ٩٠ .

وكذلك نعين فى الحفر المسطبتين 'ح' ٩٠ 'ح' ٩٠ للنقطتين 'ح' ٩٠ 'ح' ٩٠ الواقعتين فى مستوى البروفيل (٣) والمسطبتين 'ه' ٩٠ 'ه' ٩٠ للنقطتين 'ه' ٩٠ 'ه' ٩٠ الواقعتين فى مستوى البروفيل (٤) وبذا يكون المنحنيان 'ه' 'ح' ٩٠ 'ل' ٩٠ 'ه' 'ح' ٩٠ 'ل' ٩٠ هما مسقطا منحني التقاطع فى الحفر . ويجب أن يلاحظ أن هذين المنحنيين لا يمران بالنقطتين المحدتين 'م' ٩٠ 'د' كما فى المثال السابق لان مستوي الميل فى

الحفر لا يمران في هذه الحالة بمرعى الشارع وإنما بالحرفين المتطرفين (ومنسوبهما ٦٤, ٥) لقاعى المصرفين .

أما الخيطان ع' ل' م' ع' ل' فهما مسقطا منحنى تقاطع قاعى المصرفين مع سطح الارض ولما كان هذان القاعان موجودين فى المستوى الاقصى الذى منسوبه ٦٤, ٥ وجب أن يكون ع' ل' م' ع' ل' موازيين بالتقريب لخط المنسوب ٦٥ لانهما قطعتان من خط المنسوب ٦٤, ٥ غير المبين بالشكل .
وغنى عن البيان أن الجزئين ع' م' م' ع' ل' (من مسقطى منحنى التقاطع فى الردم) ليس لهما وجود مع وجود المصرفين .

الباب العاشر

الاسقاط المركزى أو المنظور

الفصل الاول

تعريف ومبادئ أساسية

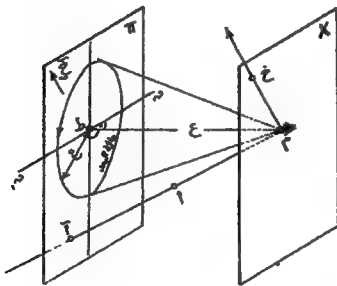
بشر ١٧٦ : ما هيبة المنظور والفرض منه

ذكرنا فى التمهيد أن الاسقاط المركزى أو المنظور هو إسقاط من نقطة ثابتة فى الفضاء على مستو ثابت كما ذكرنا أن هذه الطريقة للاسقاط هى من الطرق التصويرية التى يلجأ إليها المهندس لرسم صور واضحة ناطقة لمختلف الاجسام والمنشآت التى يريد التعبير عنها بالرسم مثلها فى ذلك مثل طريقة الاسقاط الاكسومتري والاسقاط المتوازى المائل وهذا هو الغرض الرئيسى من هذه الطرق التصويرية. وتجب الاشارة هنا الى أن طريقتى الاسقاط الاكسومتري والاسقاط المتوازى المائل لا يصلحان إلا لتمثيل الاجسام الصغيرة كالآلات الميكانيكية وما أشبه ذلك أما اذا أريد رسم صور توضيحية لآظهار معالم بعض الانشاءات الضخمة من مباني وكبارى الى غير ذلك باحدى هاتين الطريقتين فإن بقاء خاصية التوازى محفوظة فى هذه الحالة يتعارض مع ما يلاحظه الناظر الى مستقيمين متوازيين متراميين فى الطول (كحرفى شارع فى خط مستقيم) من ظهورهما متلاقين فى نقطة على بعد نهائى — ويحول بذلك دون تحقيق الغرض السالف الذكر على الوجه الاكمل. وعلى العكس من ذلك اذا استخدم الانسان طريقة المنظور فى هذه الحالة فإنه يحصل بذلك على صور واضحة قريبة ما أمكن من تلك التى

تطيع في عين الرائي لثل تلك الانشاءات وذلك لان المستقيمت المتوازية تظهر بهذه الطريقة كما سنرى متلاقية في نقطة علي بعد نهائي. ويتبين من هذا أن دراسة المنظور ضرورية للمهندس المدني ومهندس المباني في حين أن المهندس الميكانيكي يستطيع الاستغناء عنها بالإسقاط الاكسنومتري .

بشر ١٧ : تعاريف أساسية

تسمى النقطة الثابتة المذكورة في أول البند السابق مركز الإسقاط أو العين كما يسمى مستوى الإسقاط الثابت مستوى الصورة وهو يفرض عادة رأسياً (شكل ١٥٢) . وسنستخدم فيما يلي دائماً — إلا اذا نبهنا الى غير ذلك — الرمزين π و Π للدلالة على مركز الإسقاط ومستوى الصورة على التوالي .



(شكل ١٥٢)

ولتحديد وضع العين π بالنسبة الى المستوى Π يكفي أن يعلم مسقطها العمودي على هذا المستوى وبعدها عنه وكذا اتجاه هذا البعد. ويرمز عادة لمسقط π العمودي على Π بالرمز π (بدلا من π) كما يرمز لبعد π

عن Π بالرمز d ، وهنا البعد يعطى عادة على شكل دائرة مرسومة في Π مركزها π ونصف قطرها d ومصحوبة بسهم يبين هل مركز الإسقاط أمام أو خلف Π (١) .

(١) يهتم عادة مركز الإسقاط أمام Π اذا كان اتجاه السهم عكس عقرب الساعة (شكل ١٥٢) .

وتسمى النقطة ط بالنقطة الرئيسية كما تسمى الدائرة التي مركزها ط ونصف قطرها ع برأسة البعر . والمستقيم الذي يصل م بابة نقطة في الفراغ مثل ا هو شعاع انطاقي ويقابل II في المسقط المركزي للنقطة ا وهذا المسقط يرمز له عادة بالرمز \tilde{a} ويطلق عليه أيضاً اسم منظور النقطة أو صورة النقطة . وإذا كانت خ نقطة في الفراغ بحيث أن الشعاع م خ يوازي II فإن مسقطها المركزي \tilde{x} يكون نقطة في اللانهاية ويطلق على النقطة \tilde{x} نفسها اسم نقطة اختفاء لان صورتها \tilde{x} لا يكون لها في هذه الحالة وجود على بعد نهائي أي «تختفى» من مستوى الصورة . ويسمى المستوى المار بمركز الاسقاط م موازياً الى II بمستوى الاختفاء لانه المحل الهندسي لجميع نقط الاختفاء ويرمز له عادة بالرمز X .

وأخيراً يطلق على المستوى المار بالعين م وأى مستقيم في الفراغ اسم منو مسقط كما يطلق على المستوى الاقصى المار بالعين عمودياً على II اسم مستوى الافوق وعلى خط تقاطعها ن ن اسم الافوق .

بند ١٧٨ : دراسة المنظور

ينقسم بحثنا في هذه الطريقة الجديدة للاسقاط الى قسمين رئيسيين :

(ا) قسم نظري ويشمل الفصول الثاني والثالث والرابع وسنشرح في هذا القسم كيفية تمثيل النقطة والخط المستقيم والمستوى وطريقة حل مسائل الوضع والقياس التي سبق شرحها بطريقة مونج وطريقة الاسقاط الرقي .

(ب) قسم عملي في الفصل الخامس لشرح بعض الطرق المستعملة لرسم منظور جسم معلوم بمسقطيه الاقصى والرأسي أو بمسقطه المرقوم على ضوء القسم النظري السالف الذكر .

الفصل الثانى

تمثيل النقطة والمستقيم والمستوى (١)

نمر ١٧٩ : النقطة

قلنا أن منظور النقطة أو مسقطها للمركزى هو نقطة تقاطع الشعاع الاسقاطى المار بها مع مستوى الصورة (شكل ١٥٢) .
فاذا علم المنظور كانت النقطة إحدى نقط الشعاع الاسقاطى ويتحدد وضعها على هذا الشعاع بطرق مختلفة أكثرها استعمالاً أن يعلم مستقيم آخر (غير شعاع الاسقاط) يمر بها أو مستو واقعة فيه . ويجوز أن يكون هذا المستوى هو نفس مستوى الصورة أو المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء ففى هذه الحالة تكفى الصورة وحدها لتحديد النقطة .

وإذا علمت النقطة بصورتها وبمستقيم فى الفراغ مار بها (وهو الاغلب) فإنه يطلق على هذا المستقيم اسم المستقيم الحامل أو حامل النقطة .

نمر ١٨٠ : الخط المستقيم

لما كان منظور الخط المستقيم أو صورته هو المستقيم المؤلف من الصور المنظورية لنقطة فتى علم منظور المستقيم فقد علم مستو يقع فيه هذا المستقيم وهو المستوى المسقط . ويتحدد وضع المستقيم فى الفضاء اذا علم مستو آخر يقع فيه

(١) يلاحظ أنه لتمثيل النقطة والمستقيم والمستوى وحل مسائل الوضع المتعلقة بها فى الفصل الثالث يمكن الاستغناء عن النقطة الرئيسية π ودائرة البعد اللتين يحددان وضع π بالنسبة الى II على أن هذا التحديد يصبح ضرورياً لحل مسائل القياس فى الفصل الرابع وعندئذ يكون من الضروري رسم دائرة البعد .

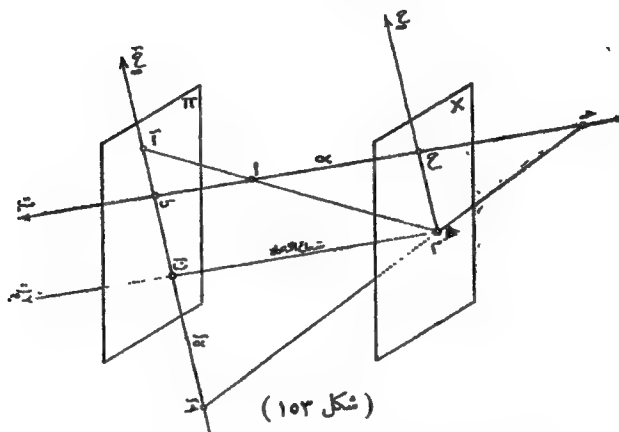
أو اذا تحددت نقطتان من نقط المستقيم لوقوعهما فى مستويين معلومين . وقد جرت العادة بان تكون هاتان النقطتان هما أثر المستقيم مع مستوى الصورة II ونقطته التى فى اللانهاية لانه لما كانت أولى هاتين النقطتين واقعة فى المستوى II وثانيتهما واقعة فى المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء فان صورة كل منهما كافية وحدها كما قدمنا لتحديد وضع النقطة وتكون صورة المستقيم أو مسقطه المركزى هو المستقيم الذى يصل صورتى هاتين النقطتين .

وتسمى صورة النقطة التى فى اللانهاية على المستقيم بنقطة اتجاه المستقيم لان جميع المستقيمات التى توازى اتجاهها ثابتاً يكون لها كما سنرى نقطة اتجاه واحدة تتقابل فيها مساقطها المركزية ^(١) . وسنستعمل فيما يلى — إلا اذا نهينا الى غير ذلك — الرمزين s و t للدلالة على أثر المستقيم ونقطة اتجاهه على التوالي . والشعاع الاسقاطى المرسوم من مركز الاسقاط m موازياً الى مستقيم ما مثل α يطلق عليه اسم شعاع اتجاه للمستقيم α ويقابل مستوى الصورة II فى النقطة t التى هى نقطة اتجاه المستقيم α (شكل ١٥٣) وتبين من الشكل كيفية الحصول على المستقيم α نفسه اذا علم بصورة $\tilde{\alpha} \equiv s$ و t (حيث s هو الارى s نقطة الاتجاه لهذا المستقيم) إذ أن α يكون فى هذه الحالة المستقيم المرسوم من s موازياً لشعاع الاتجاه m و t . فاذا كانت $\tilde{\alpha}$ صورة نقطة ما مثل 1 على المستقيم فان الشعاع الاسقاطى m و $\tilde{\alpha}$ يتقاطع حيثئذ مع α فى النقطة ١ . ويتضح من هذا أن أية نقطة مثل ١ يتحدد وضعها فى الفراغ اذا علمت صورتها

(١) كثيراً ما يستخدم الاصطلاح الانجليزى Vanishing Point للدلالة على

نقطة الاتجاه باعتبارها صورة لنقطة فى اللانهاية أو نقطة مخفية غير أننا نفضل استعمال معنى الاختلاف للدلالة على النقط التى ليس لصورها وجود فى مستوى الصورة كما قدمنا فى (بند ١٧٧) وسنحفظ لذلك بهذا المعنى للكلمات الانجليزية فى القاموس المذيل به الكتاب .

آ والصورة $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{s}$ ت المطة لاي مستقيم α يمر بها ويسمى حينئذ كما قدمنا في (بند ١٧٩) حاملا لهذه النقطة :



وإذا تتبع القاري المسقط المركزي لنقطة تتحرك على المستقيم α ابتداء من الأثر s متجهة نحو نقطة الاختلاف γ لهذا المستقيم وجد أن هذا المسقط يتحرك على الصورة $\tilde{\alpha}$ مبتعداً عن s في اتجاه $\tilde{\alpha}$ ويؤول إلى النقطة $\tilde{\gamma}$ التي في اللانهاية على الصورة $\tilde{\alpha}$ عندما تنطبق النقطة المتحركة على نقطة الاختلاف γ فإذا استمرت النقطة في التحرك على المستقيم α بعد ذلك ظهرت صورتها فجأة على الجزء $\tilde{\gamma}$ (١) وتأخذ في الإقتراب من $\tilde{\gamma}$ كلما بعدت النقطة

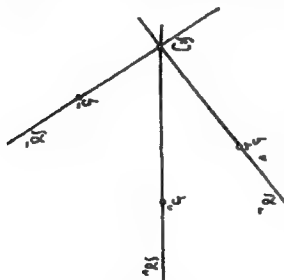
(١) يسمى هذا الجزء (وامتداده) من الصورة $\tilde{\alpha}$ بالجزء الخيالي ، أو الجزء الهندسي ، لأنه صورة الجزء من المستقيم α الواقع وراء العين m والذي لذلك لا يمكن رؤيته عملياً .

المتحركة على α عن النقطة χ حتى اذا صار هذا البعد لانهاية انطبقت صورتها على $\tilde{\tau}$. أما النقط الواقعة على الجزء $\tilde{\tau}$ من الصورة $\tilde{\alpha}$ فهي الصور المنظورية لنقط المستقيم الواقعة على امتداده الى الجهة الاخرى من مستوى الصورة بالنسبة الى μ .

ونستخلص الآن مما تقدم النظريات الهامة الآتية :-

(١) اذا كانت χ نقطة اختفاء مستقيم كانت صورته موازية الى المستقيم μ χ الذى هذه النقطة بمركز الاسقاط .

(٢) المستقيمت المتوازية لها نقطة اتجاه واحدة هي نقطة تقابل الشعاع الاسقاطى الموازى لها (شعاع الاتجاه) مع مستوى الصورة وهي التى تعين اتجاه المستقيمت .



(شكل ١٥٤)

يتج من ذلك أن المساط المركزية لعدة مستقيمت متوازية لا تكون متوازية - كما هو الحال فى طرق الاسقاط الاخرى - بل تتلاقى جميعاً فى نقطة واحدة هي نقطة الاتجاه

المشتركة $\tilde{\tau}$ (شكل ١٥٤). ويستنتى

من ذلك الحالة التى تكون فيها المستقيمت المتوازية موازية أيضاً لمستوى الصورة Π فان مساطها المركزية فى هذه الحالة وحدها تكون جملة مستقيمت متوازية وموازية للمستقيمت نفسها . وذلك لان الاثر ونقطة الاتجاه ونقطة الاختفاء لاي مستقيم مواز الى Π تتحد حينئذ جميعاً فى نقطة المستقيم التى فى اللانهاية وبذا تكون صورته مستقيماً موازياً للمستقيم نفسه .

(٣) نقطة اتجاه المستقيمات العمودية على Π هي النقطة الرئيسية ط
 (٤) دائرة البعد هي المحل الهندسى لنقط اتجاهات المستقيمات التى تميل على Π بزاوية مقدارها ٤٥° . ويمكن القول بصفة عامة أن المحل الهندسى لنقط اتجاهات المستقيمات التى تميل على Π بزاوية مقدارها ω هو دائرة مركزها ط ونصف قطرها يساوى $\text{ع ظنا } \omega$.

(٥) يتضح من (شكل ١٥٣) أن

$$\tilde{ت} س = م خ \quad \text{وأن} \quad خ س = م \tilde{ت}$$

(٦) ويؤخذ من ذلك أنه اذا اتحدت نقطتا الاختفاء لمستقيمين α و β كان $س, \tilde{ت},$ يساوى ويوازى $س, \tilde{ت}$ ^(١) (حيث $س, \tilde{س}$ أثر المستقيمين α و β وحيث $\tilde{ت}, \tilde{م}$ نقطتا الاتجاهين المستقيمين على التوالى) وبالعكس اذا توافر هذا الشرط أى اذا كان $س, \tilde{ت}$ مساوياً وموازياً الى $س, \tilde{ت}$ اشترك المستقيمان α و β حينئذ فى نقطة اختفاء واحدة .

بند ١٨١ : تمثيل المستوى

يتحدد وضع مستو مثل P فى الفضاء (راجع شكل ٦٨) ^(٢) اذا علم أثره $\tilde{ع}$ والمستقيم $\tilde{م}$ (الموازى لهذا الاثر) الذى هو خط تقاطع مستوى الصورة Π مع المستوى T المرسوم من $م$ موازياً الى P .

(١) اذا رمزنا الى تقاطع اختفاء مستقيمين α و β بالرمزين $خ, \tilde{م}$ فان صورتيهما $\tilde{م}, \tilde{خ}$ تكونان متوازيتين اذا اتحدت نقطتا الاختفاء فى نقطة واحدة $خ \equiv \tilde{م}$ (ويجوز أن تكون هذه النقطة فى اللانهاية فيكون معنى هذه أن α و β متوازيان وموازيان الى Π) أو اذا كانت النقط $م, \tilde{خ}, \tilde{م}, \tilde{خ}$ على استقامة واحدة .
 (٢) على القارىء أن يتصور لذلك Π قد رسم رأسياً فى هذا الشكل .

ويطلق على المستقيم τ اسم خط الاتجاه للمستوى P (والمستويات الموازية له) وهو المحل الهندسي لنقط اتجاهات المستقيمت الواقعة في المستوى P (أو الموازية له) ويمكن تعريفه بأنه صورة المستقيم الذي في النهاية في المستوى P (بند ٦٤) . كما يطلق على المستوى T السالف الذكر اسم مستوى الاتجاه للمستوى P والمستويات الموازية له .

وإذا تقاطع المستوى P مع مستوى الاختفاء X في المستقيم x فإن هذا المستقيم يسمى خط الاختفاء للمستوى P وهو المحل الهندسي لنقط المستوى P التي تقع مساقطها المركزية على بعد لا نهائى أى « تختفى » .
وعلى القارىء أن يتحقق من صحة النظريات الهامة الآتية بالرجوع الى (شكل ٦٨) :-

(١) إذا رسم مستقيم مثل α في مستو معلوم P فإن أثره s ونقطة اتجاهه τ يقعان بالترتيب على الأثر ξ وخط الاتجاه τ للمستوى P .

(٢) لما كان ξ و τ لاى مستو هما دائماً مستقيمان متوازيان فينتج من ذلك أنه المستقيم الذي يصل أثرى مستقيمين متقاطعين (واقعيين في المستوى) يجب أنه يوازي المستقيم الذي يصل تقاطع اتجاهيهما وهذا هو الشرط اللازم والكاف لتقاطع مستقيمين .

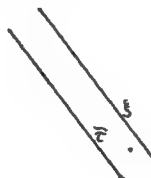
(٣) المستويات المتوازية تشترك في خط اتجاه واحد هو الذى يعين وضعها أو اتجاهها وهو كما قد منا خط تقاطع Π مع مستوى الاتجاه لهذه المستويات .

(٤) المستقيم u, v (شكل ١٥٢) هو خط اتجاه جميع المستويات الموازية لمستوى الافق . وعلى وجه العموم يجب أن يمر خط الاتجاه لاى مستو عمودى على Π بالنقطة الرئيسية π .

(٥) المستويات التى تميل على Π بزاوية مقدارها ٤٥° تمس خطوط اتجاهاتها جميعاً دائرة البعد . ويمكن القول بصفة عامة أن خطوط الاتجاهات للمستويات المختلفة التى تميل على Π بزاوية مقدارها ω تغلف دائرة مركزها π ونصف قطرها يساوى $\epsilon \tan \omega$ (حيث ϵ هو بعد π عن Π) .

(٦) العلاقة الهندسية بين أى شكل σ مرسوم فى مستو مثل P وبين صورته σ' هى كما قدمنا فى (بند ٦٤) ائتلافية مركزية حيث π مركز الائتلاف ϵ محور وحيث $\gamma \epsilon \pi$ هما المستقيمان المحددان فى هذا الائتلاف .

وفى ما يلى سنفترض دائماً (ما لم تنص على غير ذلك)



(١)

(شكل ١٥٥)

(ب)

أولاً — فى حالتهمستقيم مثل α أنه يعلم بانزهر نقطة اتجاهه π (شكل ١١٥٥) .
ثانياً — فى حالة نقطة فى الفراغ مثل σ أنها تعلم بصورتها σ' وبالصورة σ'' $\equiv \pi$ من π المحلدة لاي مستقيم حامل α ماربها (شكل ١١٥٥) .
ثالثاً — فى حالة مستو مثل P أنه يعلم بانزهر وخط اتجاهه π (١٥٥ ب) .
وإذا جاء فى مسألة أن المطلوب تعيين نقطة أو خط مستقيم أو مستو فلا يعتبرالحل منتهياً إلا اذا تحددت المعاليم السابقة فى كل حالة .

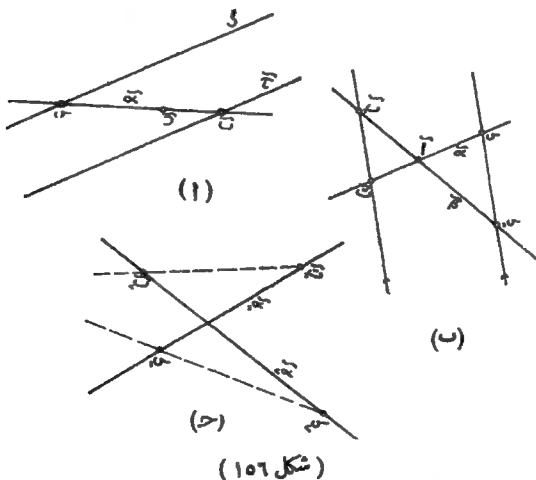
الفصل الثالث

مسائل الوضع

بند ١٨٢ : المسألة الأولى

(١) اذا علم مستو والمسقط المركزى $\tilde{\alpha}$ لمستقيم α موجود فيه فالمطلوب تعيين الأثر σ ونقطة الاتجاه $\tilde{\sigma}$ لهذا المستقيم .

بناء على النظرية الأولى فى (بند ١٨١) تكون σ و $\tilde{\sigma}$ هما على التوالي نقطتا تقاطع $\tilde{\alpha}$ مع الأثر $\tilde{\sigma}$ وخط الاتجاه $\tilde{\sigma}$ للمستوى المعلوم (شكل ١٥٦ ا).



واذا كانت $\tilde{\sigma}$ صورة نقطة σ واقعة فى المستوى المعلوم فان هذه الصورة تكفى بجانب المستوى (الذى يمكن اعتباره حاملا للنقطة) لتحديد وضع النقطة

د (بند ۱۷۹) . على أنه اذا رسم من \tilde{O} أى مستقيم α ليقطع \mathbb{E}_∞ في S_∞ فإنه يمكن اعتبار المستقيم α الذى صورته $\tilde{\alpha}$ وأثره S ونقطة اتجاهه \tilde{S} مستقيماً حاملاً ومحدداً للنقطة د .

(ب) اذا علمت نقطة مثل بصورتها \tilde{A} وبالمستقيم الحامل $\alpha \equiv s$ \tilde{A} ومر بها مستقيم آخر مثل β علمت منه الصورة $\tilde{\beta}$ والآخر s فال المطلوب تعيين نقطة الاتجاه \tilde{A} للمستقيم β .

بما أن المستقيمين α و β متقاطعان (في النقطة ١) فبناء على النظرية الثانية في (بند ١٨١) يكون المستقيم المجهول \tilde{t} موازياً للمستقيم المعلوم s ، وبهذا تعين النقطة \tilde{t} (شكل ١٥٦ ب). وبالعكس إذا علبت \tilde{t} ، أمكن تعيين s .

أما (شكل ١٥٦ ح) فيمثل مستقيمين غير متقاطعين a, a' ، لان
المستقيم a' من a لا يوازي a' ، a' ، a' .

بئر ١٨٣ : الماء الطافية

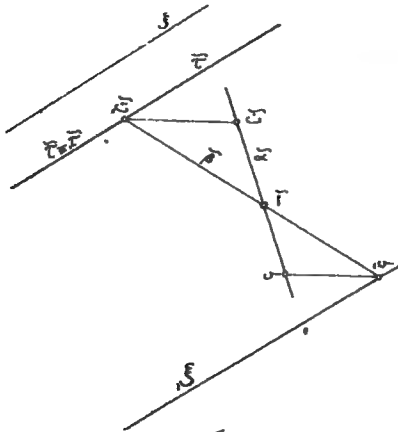
إذا علم مستو ونقطة خارجة فالمطلوب رسم مستو منها يوازي المستوى
المعلوم.

نقترض في (شكل ١٥٧) أن النقطة المعلومة هي ١ وحاملها المستقيم α المعلوم بالصورة $\alpha \equiv \pi \tau$ ونقترض أيضاً أن المستوى A معلوم بالآثر τ وخط الاتجاه τ . فإذا اخترنا على τ أية نقطة مثل τ ، ووصلنا τ إلى τ فإنه يمكن اعتبار هذا الواصل صورة β لمستقيم β نقطة اتجاهه هي النقطة τ ، ويكون المستقيم ماراً بالنقطة ١ وواقعاً في المستوى المطلوب فإذا كانت π الآثر

(الذي يمكن الحصول عليه كما تقدم في بند ١٨٢ ب) للمستقيم β ورسم من σ المستقيم ϵ موازياً الى τ كان ϵ أثر المستوى المطلوب أما خط اتجاهه τ فهو نفس

خط الاتجاه للمستوى
المعلوم أي $\tau \equiv \tau$.

وبلاحظ القاري
أن الأثر ϵ للمستوى
المعلوم A لم يكن له أي
دخل في حل هذه المسألة
وذلك لأن خط الاتجاه
 τ يكفي وحده
لتحديد الاتجاه الذي
كان مطلوباً رسم مستو
موازيه من النقطة σ .



(شكل ١٥٧)

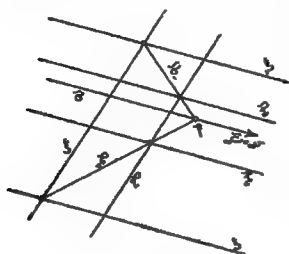
بند ١٨٤ : المسألة الثالثة

المطلوب تعيين خط تقاطع مستويين معينين .

إذا تقاطع الأثران ϵ و ϵ في σ وتقاطع خطا الاتجاه τ و τ في النقطة τ كانت σ و τ هما الأثر ونقطة الاتجاه لخط التقاطع المطلوب σ .

وإذا توازت المستقيمتين الأربعة المعلومه ϵ و ϵ و τ و τ (شكل ١٥٨) فإن خط التقاطع σ يكون في هذه الحالة موازياً لمستوى الصورة II ويكفي لكي يتحدد وضعه أن تعلم منه نقطة واحدة مثل σ وهذه يمكن الحصول

عليها يرسم مستقيمين متوازيين حيثما اتفق ϵ و ϵ' واعتبارهما الأثر وخط



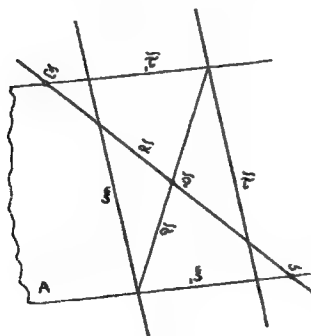
(شكل ١٥٨)

الاتجاه لاي مستو مساعد يتقاطع مع المستويين المعلومين في المستقيمين ϵ و ϵ' (ويمكن إيجادهما كما تقدم) فإذا تقاطع ϵ و ϵ' في σ كانت σ صورة النقطة α وبذا يكون σ هو المستقيم المرسوم من α موازياً الى ϵ (أنظر بند ١٨٦).

بند ١٨٥ : المسألة الرابعة

إذا علم مستقيم ومستو فال المطلوب إيجاد نقطة تقاطعها.

لذلك نفرض في (شكل ١٥٩) أن المستقيم المعلوم هو α وأن σ و σ' هما الأثر ونقطة الاتجاه لهذا المستقيم. فترسم من σ و σ' مستقيمين متوازيين



(شكل ١٥٩)

حيثما اتفق مثل ϵ و ϵ' ليثلاً الأثر وخط الاتجاه لاي مستو مساعد A ماراً بالمستقيم α فإذا كان σ هو خط تقاطع هذا المستوي مع المستوي المعلوم بأثره ϵ وخط اتجاهه ϵ' وكانت σ نقطة تقاطع σ مع الصورة α للمستقيم المعلوم فإن σ تكون صورة نقطة التقاطع

المطلوبة σ (وهي لا تحتاج الى تحديد آخر لانها إحدى نقط المستقيم α الذي يمكن اعتباره حاملا لها).

بـ ١٨٦ : بعض الأوضاع الخاصة للمستقيم والمستوى

إذا وازى المستقيم أو المستوى مستوى الصورة Π فإن هذا الوضع الخاص لايهما يحتاج الى بعض الايضاح :

فالمستقيم σ في (شكل ١٥٨) يوازي كما قدمنا مستوى الصورة ولذا فالأثر ونقطة الاتجاه لهذا المستقيم يتحدان في نقطته التي في اللانهاية $\sigma \equiv \tau_\infty$. ولتمثيل σ في هذه الحالة يكفي أن يعلم بجانب صورته σ إما مستو مائله كالمستوى (σ, τ) أو نقطة واحدة من نقطه كالنقطة λ (المعلومة في الشكل بالمستقيم الحامل σ أو ρ).

كذلك يكفي أن نعلم نقطة واحدة لكي يتحدد مستوي يمر بها موازياً الى Π . فشكل (١٥٥) مثلاً يبين النقطة σ ويمكن اعتباره في الوقت نفسه ممثلاً لمستوي يمر بهذه النقطة موازياً الى Π .

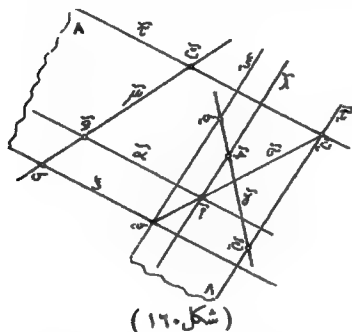
إذا تقرر هذا فإن حل مسائل الوضع في مثل هذه الحالات الخاصة لا يختلف حينئذ عما ذكرنا في البنود السابقة :

فمثلاً لايجاد نقطة تقاطع مستوي A (معلوم بآثره ξ وخط اتجاهه τ) مع مستقيم λ مواز لمستوى الصورة ومعلوم بمسقطه $\tilde{\lambda}$ وبمستو حامل له $\Lambda = (\sigma, \tau)$ (شكل ١٦٠) نجد خط تقاطع المستويين A و Λ وهو المستقيم σ فيتقاطع حينئذ هذا المستقيم مع λ في نقطة التقاطع المطلوبة λ . ولتعيين خط التقاطع α للمستوى A السالف الذكر مع مستوي Γ مواز لمستوى الصورة ومعلوم بالنقطة σ التي حاملها $\tilde{\gamma} \equiv \sigma, \tau$ (شكل ١٦٠)

نرسم من النقط $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ ثلاثة مستقيمت متوازية $\gamma\delta, \delta\epsilon, \epsilon\zeta$ فيكون $\gamma\zeta$ صورة مستقيم حيثما اتفق λ مواز الى Π وحمل بالمستوى $(\gamma, \delta, \epsilon, \zeta)$ ويمر بالنقطة γ فهو لذلك واقع في المستوى Γ . فاذا كانت α صورة نقطة تقاطع المستقيم λ مع المستوى A ورسم من α مستقيم $\alpha\gamma$ مواز الى $\gamma\delta$ أو $\gamma\zeta$ كان $\alpha\gamma$ صورة خط

التقاطع المطلوب α الذي
يوازي Π ويمكن اعتبار
المستوى A حاملاً محدداً له.

وإذا كان μ مستقيماً
معلوماً يراد تعيين نقطة تقاطعه
مع المستوى I' السالف الذكر
والموازي إلى II نربطه مستويّاً
A (شكل ١٦٠) ونجد خط



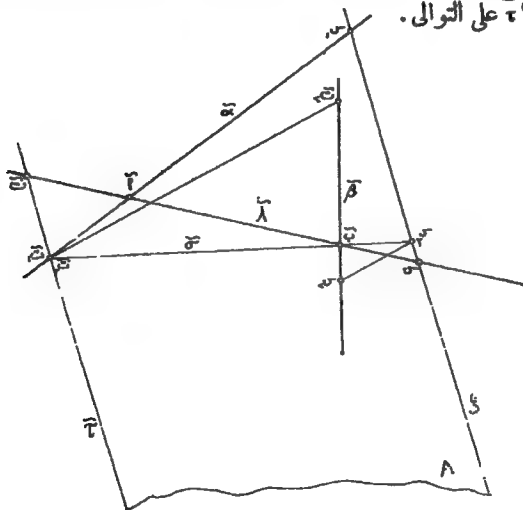
تقاطعها α مع المستوى Γ كما تقدم في تقاطع حينئذ المستقيمان α و μ في نقطة التقاطع المطلوبة ω .

١٨٧ : امثلة مخلوطة على مسائل الوضع

مثال ١ - إذا علت قطتان α و β بصورتيهما $\alpha \sim \beta$ وحامليهما $\alpha \equiv \beta$ ، $\alpha \sim \beta$ ، $\alpha \equiv \beta$ فال المطلوب تعيين الأثر من نقطة الاتجاه \sim للمستقيم λ الواصل بينهما.

لذلك فصل Γ $\bar{\Gamma}$ بالمستقيم $\bar{\Gamma}$ (شكل ١٦١) فيكون $\bar{\Gamma}$ منظور المستقيم المطلوب $\bar{\Gamma}$. ثم فصل Γ $\bar{\Gamma}$ بالمستقيم $\bar{\Gamma}$ الذي يمكن اعتباره صورة لمستقيم $\bar{\Gamma}$ يمر بالنقطة Γ موازياً إلى α إذا فرضنا نقطة اتجاهه $\bar{\Gamma}$ هي نفس نقطة

الاتجاه \vec{t} للمستقيم α . فلذا عُيِّن الاثر σ للمستقيم σ كما تقدم في
(بند ١٨٢ ب) ووصل من σ بالمستقيم ε ثم رسم من النقطة $\vec{t} = \vec{t}_\sigma$
مستقيم \vec{t} مواز الى ε فان المستقيمين ε و \vec{t} يكونان الاثر وخط الاتجاه
للمستوى A المار بالمستقيمين المتوازيين α و σ ولما كان المستقيم λ واقعاً
في هذا المستوى كان أثره من نقطة اتجاهه \vec{t} هما نقطتا تقاطع λ مع
 ε و \vec{t} على التوالي. λ

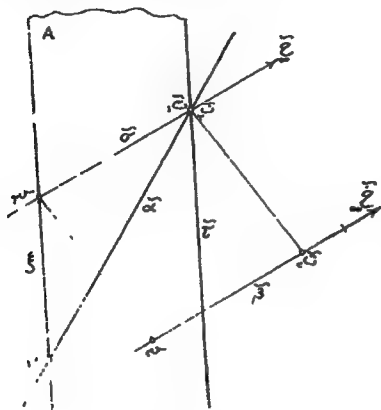


(شکل ۱۶۱)

مثال ٢ - المطلوب تعيين المستوى المار بنقطة ومستقيم معين .
إذا فرضنا في (شكل ١٦١) أن النقطة المعلومة هي β وحاملها β وأن
المستقيم المعلوم هو α فيكون المستقيم σ المذكور في المثال السابق هو المستقيم
المار بالنقطة β موازاً لـ α ويكون المستوى المطلوب هو المستوى A المار

بالمستقيمين المتوازيين α و σ والذي أثره ξ وخط اتجاهه τ .

ولا يختلف العمل عما سبق اذا كانت النقطة المعروفة في إحدى نقط مستوى الاختفاء X ففي هذه الحالة تكون ξ معلومة بصورتها ξ التي يجب أن تكون النقطة



(شكل ١٦٢)

التي في اللانهاية لحامل معلوم
 $\beta \equiv \sigma \tau$ فلتعين المستوى
 A الذي يمر بالنقطة ξ
 وبمستقيم معلوم $\alpha \equiv \sigma \tau$
 نرسم من ξ مستقيماً σ
 موازياً الى α ويكون ذلك
 «بتوصيل» ξ بنقطة الاتجاه
 τ للمستقيم α فيكون الواصل
 هو الصورة σ للمستقيم α
 الذي نقطة اتجاهه $\tau \equiv \sigma \tau$
 ولما كان المستقيمان β و σ

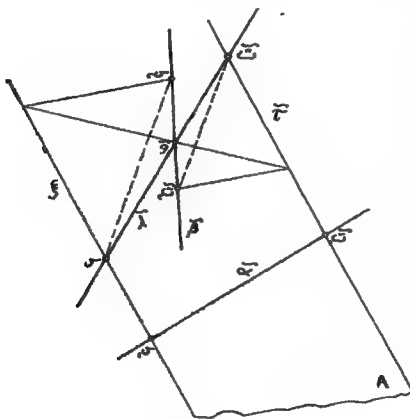
يمر بهما مستو واحد لتقاطعهما في النقطة ξ وجب أن يكون $\sigma \tau$ موازياً الى $\tau \tau$ وبذا يتعين الأثر $\sigma \tau$ للمستقيم σ (بند ١٨٢ ب) ويكون الأثر ξ للمستوى المطلوب A (الذي يمر بالمستقيمين المتوازيين α و σ) هو المستقيم $\sigma \tau$ كما يكون خط الاتجاه τ لهذا المستوى هو المستقيم المرسوم من النقطة $\tau \tau \equiv \sigma \tau$ موازياً الى ξ .

مثال ٣ - المطلوب تعيين المستوى المار بثلاث نقط معلومة α و β و γ .

لذلك نصل ١ ب كما جاء في المثال الاول ثم نعين المستوى المار بالمستقيم ١ ب والنقطة ح كما في المثال الثاني .

مثال ٤ — المطلوب رسم المستقيم λ الذى يوازي اتجاهها معيناً ويقابل مستقيمين معلومين غير متقاطعين : $\alpha \equiv \text{سم} \sim \text{ت} \sim \beta \equiv \text{سم} \sim \text{ت} \sim$
الحل الفراغى لهذه المسألة يتلخص فيما يلى :

أولاً — نعين المستوى A المار باحد المستقيمين وليكن α موازياً للاتجاه المعلوم
ثانياً — نجد نقطة تقاطع المستقيم الثانى β مع المستوى A ولتكن النقطة د
ثالثاً — نرسم من د (فى المستوى A) موازياً للاتجاه المعلوم فيكون هو المستقيم المطلوب λ .



(شكل ١٦٣)

ولتطبيق هذه الخطوات إسقاطياً نفرض فى (شكل ١٦٣) أن $\text{ت} \sim$ هى النقطة المحددة للاتجاه المعلوم (١) الذى يجب أن يوازيه المستقيم λ فتكون $\text{ت} \sim$ نقطة اتجاه هذا المستقيم. وإذا كان $\text{ت} \sim$ هو

المستقيم الذى يصل نقطتى الاتجاه $\text{ت} \sim$ و $\text{ت} \sim$ فان $\text{ت} \sim$ يكون خط الاتجاه

للمستوى A (الذى يمر بالمستقيم α موازياً للاتجاه المعلوم) ويكون الامر د لهذا المستوى هو المستقيم المرسوم من س موازياً الى $\text{ت} \sim$. فاذا كانت د

(١) يلاحظ أنه لكي يعلم اتجاه معين فى أية طريقة من طرق الاسقاط الاخرى يجب أن يعلم مستقيم مواز لهذا الاتجاه. أما فى الاسقاط المركزى فان نقطة واحدة هى نقطة الاتجاه تكفى لهذا الغرض.

صورة نقطة تقاطع المستقيم β مع المستوى A (بند ١٨٥) فإن الواصل $\tilde{\alpha}$ الذي يصل $\tilde{\alpha}$ بنقطة الاتجاه $\tilde{\alpha}$ يكون صورة المستقيم المطلوب λ ولما كان هذا المستقيم واقعاً في المستوى A كان أثره $\tilde{\alpha}$ هو نقطة تقاطع $\tilde{\alpha}$ مع $\tilde{\alpha}$.

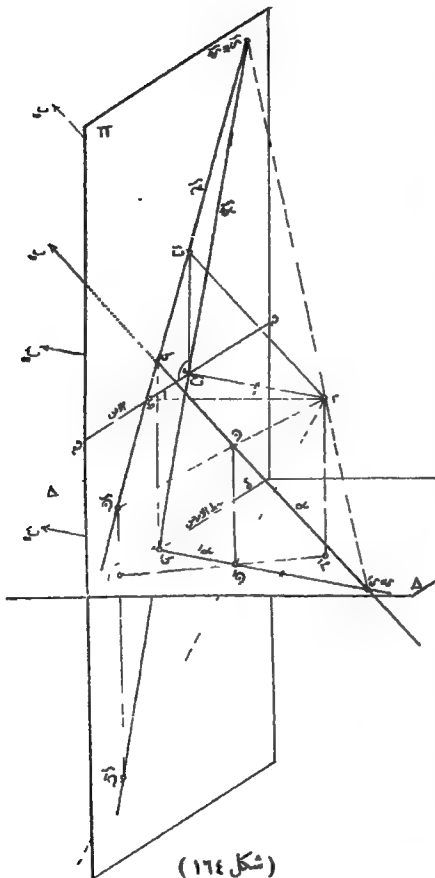
ويلاحظ أنه لما كان λ متقاطعا مع كل من المستقيمين α و β وجب أن يكون $\tilde{\alpha}$ موازياً إلى $\tilde{\alpha}$ من جهة وأن يكون $\tilde{\alpha}$ موازياً إلى $\tilde{\alpha}$ من جهة أخرى. ويمكن الاستفادة من هذه الحقيقة في التحقق من دقة الرسم المبين للحل بالطريقة السابقة كما يمكن الاستفادة منها في حل المسألة بطريقة أخرى تفسيرها الفراغي هو أن λ يمكن الحصول عليه أيضاً كخط تقاطع المستويين المارين بالمستقيمين المعلومين والذين يوازي كل منهما الاتجاه المعلوم .

بند ١٨٨ : طريقة أخرى لتمثيل النقطة والمستقيم والمستوى

نفرض في (شكل ١٦٤) أن Δ مستوي يوازي مستوى الافق ويقطع مستوى الصورة Π في المستقيم δ (الموازي إلى الافق ν) وأن $\tilde{\alpha}$ المسقط العمودي على Δ أي المسقط الافقي لاية نقطة في الفراغ مثل $\tilde{\alpha}$. فلذا رمزنا إلى صورة $\tilde{\alpha}$ (مسقطها المركزي من $\tilde{\alpha}$ على Π) بالرمز $\tilde{\alpha}$ وإلى صورة $\tilde{\alpha}$ (من $\tilde{\alpha}$ على Π) بالرمز $\tilde{\alpha}$ فن الواضح أن النقطة $\tilde{\alpha}$ يتحدد حينئذ وضعها في الفراغ بمعلومية صورتين $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}$ إذ للحصول على النقطة في هذه الحالة نصل $\tilde{\alpha}$ ونفرض أنه يلاقى المستوى Δ في $\tilde{\alpha}$ فتكون النقطة $\tilde{\alpha}$ هي نقطة تقاطع العمود المقام على Δ من $\tilde{\alpha}$ مع الشعاع الاسقاطي $\tilde{\alpha}$.

ويطلق على المستوى Δ اسم مستوى الارض ^(١) وعلى المستقيم δ اسم

(١) سمي كذلك لانه يؤخذ غالباً أوطى من مستوى الافق ليمثل المستوى الذي يقف عليه المشاهد (بند ١٩٤) ومع ذلك فهو يفترض أحياناً أعلا من مستوى الافق.



(شكل ١٦٤)

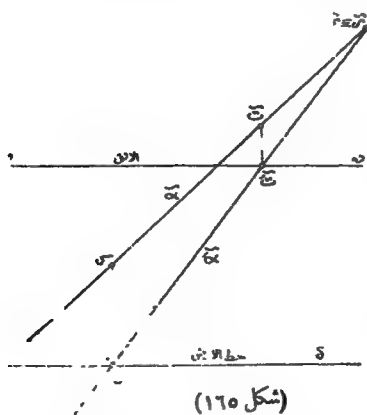
خط العرض. كما يطلق
على الصورتين $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}'$
معاً اسم المقتبين
المركزيين أو المقتبين
المنظوريين للنقطة $\tilde{\alpha}$
وفهم من هذا أن $\tilde{\alpha}$
هو المقتب المركزي أو
المنظوري المباشر للنقطة
وأن $\tilde{\alpha}'$ هو المقتب
المركزي للسقط الاقوى
(أو منظور المقتب
العمودي) لهذه النقطة
ويسمى لذلك المقتب
الاقوى المنظوري .

فالنقطة $\tilde{\alpha}$ نحدد
وضمها في الفراغ بمعاوية
مستقيمة α المنظورية
وبالمثل نعين أي مستقيم
 α إذا علم مسقطه
المنظوري α' أي مسقطه
المركزي المباشر $\tilde{\alpha}$
ومسقطه الاقوى المنظوري $\tilde{\alpha}'$.

ويتضح من (شكل ١٦٤) أن خط التماس الذي يصل المقتبين $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}'$

ليرة نقطة في الفراغ يكونه عمودياً على خط الأرض δ . ويصدق هذا أيضاً اذا كانت النقطة في اللانهاية فالمسقطان المنظوريان $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}'$ للنقطة α التي في اللانهاية على المستقيم α — يصلها أيضاً خط تناظر عمودي على δ ويلاحظ أن $\tilde{\alpha}$ هي نقطة اتجاه المستقيم α وأن $\tilde{\alpha}'$ هي نقطة اتجاه المسقط الاقصى α' للمستقيم وتقع لذلك على الاقصى ν الذي هو خط اتجاه المستوى Δ .

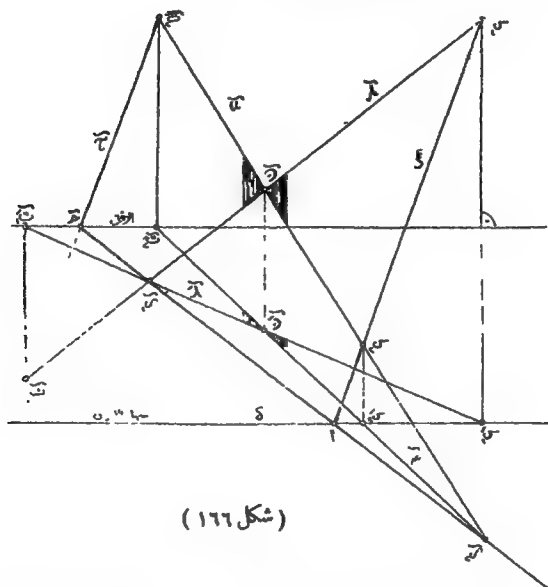
واذا كانت α كانت α إحدى نقط المستوى Δ (وهي في الشكل نقطة تقاطع المستقيم α مع Δ) انطبق حينئذ مسقطاها المنظوريان $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}'$ ولا يحدث هذا الانطباق إلا لنقط المستوى Δ فقط . أما اذا وقعت نقطة ما في مستوى الصورة Π كالنقطة α كان $\tilde{\alpha} \equiv \alpha$ وكان $\tilde{\alpha}' \equiv \alpha'$ ومعنى هذا أن α' تكون في هذه الحالة إحدى نقط δ . وبالعكس اذا كان المسقط الاقصى المنظوري لنقطة ما واقعاً على خط الأرض δ كانت النقطة نفسها واقعة في Π .



وبناء على ما تقدم
يمكن الحصول على الار
س ونقطة الاتجاه $\tilde{\alpha}$
لاى مستقيم α اذا علم
مسقطاه المنظوريان
 $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}'$ وبالعكس اذا
علم α و α' لاى مستقيم
فانه يمكن الحصول على
 $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}'$ — وذلك
كما يلي :

نفرض في (شكل ١٦٥) أن ν هو الاقصى ν خط الأرض
وأن α و α' المسقطان المنظوريان للمستقيم α فاذا تقاطع α' مع δ مكن α

في النقطتين $س'$ و $ت'$ ورسم من هاتين النقطتين مستقيماً تناظر (عموديان على δ) ليقابلا α في $س$ و $ت$ كأنهما الاثر ونقطة الاتجاه للمستقيم α . أما النقطة $\bar{س} \equiv \bar{ت}$ لتلاقي المستقيمين المنظورين فتمثل نقطة تقابل α مع مستوى الارض (قارن أيضاً شكل ١٦٤).



(شكل ١٦٦)

وإذا علم في (شكل ١٦٦) مستقيمان متقاطعان α و μ بالمستقيمين المنظورين لكل منهما وتقابل $\bar{\alpha}$ و $\bar{\mu}$ في النقطة $\bar{\delta}$ وتقابل أيضاً $\bar{\alpha}$ و $\bar{\mu}$ في $\bar{\delta}$ فإن شرط تقاطع المستقيمين هو أن يكون المستقيم $\bar{\delta}$ عمودياً على δ أي أحد خطوط التناظر. وإذا كان $س, س'$ أثرى المستقيمين كان المستقيم $\bar{\delta}$ الذي

يصل هذين الأثرين هو أثر المستوى A الذي يمر بالمستقيمين α و β وبالمثل يكون خط الاتجاه α لهذا المستوى هو المستقيم الذي يصل نقطتي الاتجاه α و β للمستقيمين. أما المستقيم α و β فيمثل خط تقاطع A مع مستوى الأرض Δ ويلاحظ أنه يلاقى α و β في نقطتين α و β واقعيتين على خط الأرض والافق على التوالي لان α تمثل نقطة تقابل المستويات الثلاثة α و β و A كما تمثل β نقطة تقابل المستويات الثلاثة : مستوى الافق α و β و A مستوى الاتجاه للمستوى A .

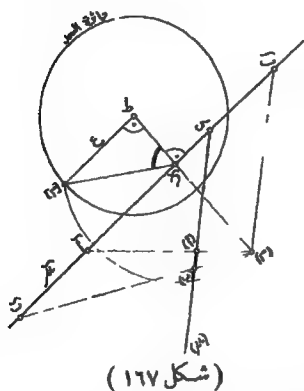
وتترك للقارئ حل مسائل الوضع بهذه الطريقة الجديدة التي فصلناها في هذا البند لان كيفية الحل في هذه الحالة لا تختلف كثيراً عما سبق بيانه في الفصل الثالث من الباب الاول (طريقة مونيخ) فمثلاً اذا أريد إيجاد نقطة تقاطع مستقيم معلوم (α و β) مع المستوى A المعين بالمستقيمين المعلومين α و β في (شكل ١٦٦) نمر بالمستقيم α مستوياً مساعداً عمودياً على β فيقطع A في مستقيم وليكن γ فتكون نقطة التقاطع المطلوبة γ هي نقطة تلاقي α و β وطريقة ذلك تكون بان نجعل المسقط الافقي المنظوري α' (الذي يمثل في نفس الوقت المستوى المساعد) يقطع β' في α' و β' مثلاً ثم نجد α' و β' على β' فيكون γ' هو المستقيم α' و β' ويتقاطع حينئذ مع α' في الصورة γ' لنقطة التقاطع المطلوبة.

وتستعمل هذه الطريقة لتمثيل النقطة والمستقيم والمستوى في التطبيق العملي للمنظور (أنظر الفصل الخامس) وفي رسم الظلال حيث تفرض النقطة المضئية ل معلومية مسقطها المنظوريين α' و β' . فاذا كانت α' نقطة في الانهائية (أي إضامة متوازية) كانت α' في هذه الحالة إحدى نقط الافق.

(١) مسائل القيام

(١) تطبيق المستويات المسقطة أى المارة بمركز الاسقاط

لذلك نطبق المستوى المسقط M
 المار بمركز الاسقاط μ والمستقيم
 المعلوم μ — على مستوى
 الصورة Π حيث محور الانطباق
 هو خط تقاطع M و Π أى
 الصورة $\tilde{\mu}$. فالموقع (μ)
 لمركز الاسقاط يوجد على امتداد
 العمودى النازل من μ على $\tilde{\mu}$
 بحيث يكون $\tilde{\mu}(\mu) = \tilde{\mu}[\mu] =$



وتر المثلث القائم الزاوية الذي أحد أضلاعه ط (وهو المسقط العمودي للمستقيم في الميل الاعظم في M المار بالمركز م) وضلعه الآخر الارتفاع المعلوم ع لمركز الاسقاط عن II . ويكون الموقع (μ) للمستقيم المعلوم هو المستقيم المرسوم من الاثر س موازياً للمستقيم (م) ت (لان هذا الاخير هو موقع شعاع الاتجاه المرسوم من م موازياً للمستقيم μ) . فاذا وصل

(١) هذه المسائل تستلزم معرفة النقطة الرئيسية ط ودائرة البعد.

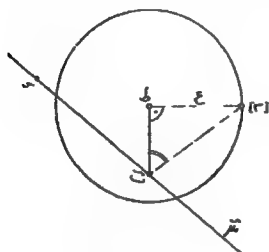
(٢) α (٢) \sim ليقابلا (١) في الموقعين (١) α (ب) للنقطتين كان (١) (ب) هو البعد الحقيقي المطلوب بين النقطتين α (١) \sim .

(ب) تطبيق المستويات العمودية على Π .

مثال : المطلوب إيجاد الزاوية التي يميل بها مستقيم معلوم على Π .

لذلك نقرض في (شكل ١٦٨) أن α \sim ت الاثر ونقطة الاتجاه للمستقيم

المعلوم μ ونصل μ \sim فيكون هو المسقط العمودي لشعاع الاتجاه μ \sim



(شكل ١٦٨)

الذي يميل على Π بنفس الزاوية التي

يميل بها المستقيم μ نفسه فالزاوية

المطلوبة تساوى إذن الزاوية

μ \sim μ . وللحصول على هذا الأخيرة

نطبق المستوى μ \sim على Π حول

μ \sim فنقيم من μ عموداً على μ \sim

ليقابل دائرة البعد في الموقع [٢]

لمركز الاسقاط ونصل [٢] \sim فتكون الزاوية [٢] \sim μ هي الزاوية المطلوبة (٢) .

(١) غنى عن البيان أن المسقط المركزي لبعد ما يجوز أن يكون أكبر من طوله

الحقيقي وذلك بخلاف الحال في الاسقاط العمودي حيث المسقط أصغر دائماً من الطول الحقيقي .

(٢) يلاحظ أنه بناء على النظرية الرابعة في (بند ١٨٠) تكون زاوية

ميل مستقيم ما على Π $\leq 45^\circ$ على حسب ما اذا كانت نقطة اتجاه المستقيم واقعة داخل دائرة البعد أو عليها أو خارجها على التوالي .

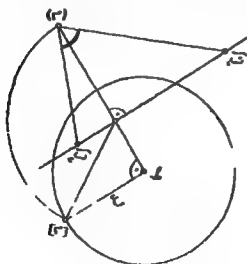
ويتبين من هذا الحل أن الأثر من للمستقيم المعلوم ليس له أدنى تأثير على النتيجة إذ أن زاوية الميل لا تتغير بتغير μ . وكذلك الحال في المستويات كما يتضح من المثال الآتي :

لنفرض في (شكل ١٦٧) أن μ هو خط اتجاه مستو ما مثل A وأن أثره مستقيم حيثما اتفق (غير مبين بالشكل) يوازي μ فلايجاد زاوية ميل A على Π يكفي أن نجد زاوية ميل مستوى الاتجاه الموازي إلى A والذي رمزنا إليه في (الفقرة ١) بالرمز M ويكون ذلك بتطبيق المستوى μ ط $\tilde{\mu}$ (حيث $\mu \sim \tilde{\mu}$) هو المستقيم ذو الميل الأعظم في M المار بالمركز μ على Π فتكون الزاوية $[\mu] \tilde{\mu}$ الميئة بالشكل هي الزاوية المطلوبة .

يستخلص من ذلك أنه تعيين الزوايا يكفي أنه تعلم عناصر الاتجاه ومبرها سرار للمستقيمات أو للمستويات .

(ح) تطبيق المستويات المارة باشعة الاتجاه

مثال : المطلوب إيجاد الزاوية المحصورة بين مستقيمين معلومين (متقاطعين



(شكل ١٦٩)

أو غير متقاطعين) .

لحل هذه المسألة يكفي كما قدمنا

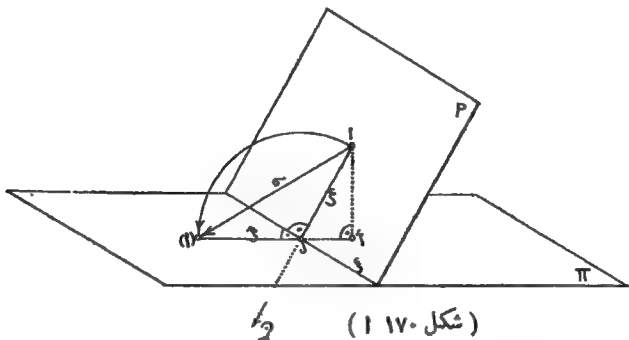
أن تعلم نقطتا الاتجاه μ_1 و μ_2 للمستقيمين (شكل ١٦٩) ثم يطبق المستوى μ $\tilde{\mu}$ μ_1 المحتوى على شعاعى الاتجاه للمستقيمين (والذى هو فى حالة المستقيمين المتقاطعين مستوى الاتجاه للمستوى المعين

بهما) على Π حول μ_1 μ_2 . ولما كان هذا المستوى مستوياً مسطعاً

طريقة التطبيق لا تختلف عنها في (الفقرة ١) وتكون الزاوية α ، (٢) ثم هي الزاوية المطلوبة .

(٥) تطبيق المستويات على وجه العموم

نفرض في (شكل ١٧٠) أنه يراد تطبيق المستوى P على مستوى الصورة Π حول خط تقاطعهما ϵ (محور الانطباق) فالخطوات الرئيسية في الفراغ اللازمة لإيجاد الموقع (١) لنقطة مثل a في المستوى P يمكن تلخيصها كما يلي :



الخطوة الأولى : نرسم من a المستقيم ذا الميل الاعظم α للمستوى P فيقابل ϵ في نقطة مثل b .

الخطوة الثانية : نقيم في Π من النقطة b المستقيم α' العمودي على ϵ فيكون الموقع المطلوب (١) موجوداً على α' الذي هو المسقط العمودي a' على Π للمستقيم α .

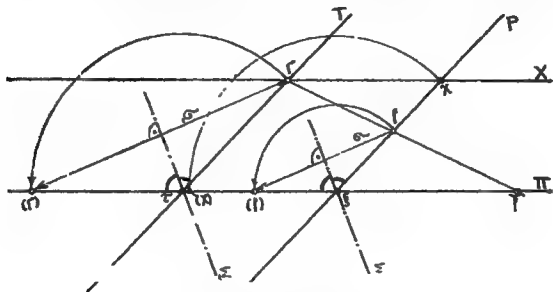
(١) اذا تصورنا Π رأسياً كما جرت بذلك العادة وجب أن يرمز لهذا المسقط بالرمز α' بدلا من α .

الخطوة الثالثة : نرسم من α المستقيم σ العمودى على المستوى Σ المنصف للزاوية الزوجية بين P و Π فيكون الموقع (١) موجوداً أيضاً على هذا المستقيم . ويطلق على المستقيم σ اسم وتر الدوران للنقطة α ومن الواضح أن أوتار الدوران للنقط الأخرى فى P (أى المستقيمت التى تصل هذه النقط بمواقعها على Π) تكون جميعاً موازية الى σ أى الى الاتجاه الثابت العمودى على المستوى Σ وذلك اذا طبقنا P على Π فى اتجاه السهم المبين بالشكل أما اذا كان التطبيق فى الاتجاه الآخر فان أوتار الدوران تكون فى هذه الحالة موازية للاتجاه العمودى على المستوى المنصف للزاوية الزوجية الثانية بين P و Π .

الخطوة الرابعة : نجد نقطة تقاطع المستقيمين σ' و σ فتكون هى الموقع المطلوب (١) للنقطة α .

ونمثل هذه الخطوات إسقاطياً نعين أولاً الصورة $\tilde{\alpha}$ للمستقيم $\tilde{\sigma}$ ونفرض أن هذه الصورة تقاطع مع الأثر $\tilde{\sigma}$ للمستوى المعلوم فى النقطة $\tilde{\alpha}$ السالفة الذكر ثم نقيم من $\tilde{\alpha}$ عموداً على $\tilde{\sigma}$ فيكون هذا العمود هو $\tilde{\sigma}'$ الذى ينطبق فى هذه الحالة على صورته والذى يجب أن يمر بالموقع المطلوب (١) إذ من الواضح أن الزاوية القائمة المحصورة بين المستقيمين $\tilde{\sigma}$ و $\tilde{\sigma}'$ الواقعين معاً فى مستوى الصورة Π لا تتغير بالإسقاط . ولنعين الصورة $\tilde{\sigma}$ لوتر الدوران σ وهى الصورة التى يجب أن تمر أيضاً بالموقع (١) يكفى أن تعلم نقطة الاتجاه لهذا الوتر . فنفرض لذلك فى (شكل ١٧٠ ب) أن مستوى الورقة يمثل مستوياً عمودياً على المستويات P و Π و T (حيث T هو مستوى الاتجاه للمستوى المعلوم P) . فاذا رسم من مركز الإسقاط μ شعاع الاتجاه σ الموازى الى σ فان هذا الشعاع يقابل فى نقطة (٢) هى نقطة الاتجاه للوتر σ (ولجميع أوتار الدوران الأخرى

العمودية على Σ). ولما كان σ كما يتبين من الشكل عمودياً على المستوى Σ ،
المنصف للزاوية الزوجية بين T و Π لذا كانت نقطة الاتجاه (٢) هي موقع σ
الذى يمكن الحصول عليه بتطبيق T على Π في اتجاه التطبيق للمستوى P .



(شكل ١٧٠ ب)

ويجد القارى هذا الحل الاسقاطى مبنياً في (شكل ١٧١) حيث فرضنا أن σ و τ
الاشترى وخط الاتجاه لمستوى معلوم P وأن α صورة نقطة σ واقعة في المستوى
ويراد تعيين موقعها (١) .

لذلك نزل من σ عموداً على τ ليقابله في τ فتكون τ نقطة الاتجاه
للمستقيم ذى الميل الاعظم τ في (شكل ١٧٠ ب) ^(١) ثم نصل τ و α فيكون
الواصل $\tau\alpha$ الذى يقابل τ في τ ويكون العمود المقام من τ على $\tau\alpha$ هو τ
الذى يمر بالموقع المطلوب (١) .

واذا مددنا τ الى (٢) بحيث كان $\tau(2) = [\tau | 2] = \text{وتر}$

(١) وذلك لان τ في (شكل ١٧١) يمثل في هذه الحالة المسقط العمودى
للمستقيم τ ذى الميل الاعظم في مستوى الاتجاه T الموازى الى P ومعنى هذا
أن τ هو شعاع الاتجاه للمستقيمت ذوات الميل الاعظم في المستوى P .

الشكلين Σ و Σ' (سـ) مركزهما مركزاً مشتركاً مركز الاسقاط هو (٢) ومحور الاسقاط هو الارتفاع لمستوى الشكل Σ . ويكون Σ' و Σ هما المستقيمان المحددان فى هذا الالتلاف فالاول منهما هو المحل الهندسى لصور النقط التى تناظرها فى الموقع نقط فى اللانهاية وثانيهما هو المحل الهندسى لجميع النقط فى الموقع التى تناظرها فى الصورة نقط فى اللانهاية .

تفصيل : يؤخذ مما تقدم أنه اذا علم الارتفاع وخط الاتجاه Σ لمستوى P وأريد تطبيق هذا المستوى على II لتعيين الموقع (سـ) لشكل سـ مرسوم فيه — فالتا نبدأ بتطبيق المستوى T (مستوى الاتجاه المار بمركز الاسقاط موازياً للمستوى المعلوم) حول Σ فنحصل بذلك على (٢) ثم نستخدم الالتلاف المركزى بين Σ و Σ' (سـ) الذى يتحدد بمعلومية مركز الالتلاف (٢) ومحور الالتلاف Σ وأحد المستقيمين المحددين ولكن Σ' [وهو المستقيم المرسوم فى مجموعة Σ لناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة (سـ)] فى إيجاد موقع أية نقطة فى المستوى P اذا علمت صورتها وبالعكس . فثلاً اذا علمت فى (شكل ١٧١) الصورة Σ' وأريد تعيين (١) فالتا نختار على Σ أية نقطة ^(١) مثل ك ونعتبرها إحدى نقط المجموعة Σ فتكون النقطة (ك) ∞ المناظرة لها فى المجموعة (سـ) هى النقطة التى فى اللانهاية للمستقيم (٢) ك فالتا وصلنا ك ونفرضنا أنه يقطع Σ فى نقطة مثل م ثم وصلنا م بالنقطة (ك) ∞ أى رسمنا م موازياً الى المستقيم (٢) ك فان هذا الموازى يقابل الشعاع (٢) ك فى الموقع المطلوب (١) .

(١) ومعنى هذا أنه ليس من الضرورى أن تكون النقطة التى نختارها على Σ هى النقطة Σ التى إنما اخترناها أولاً فى (شكل ١٧١) لشرح الخطوات الرئيسية فى عملية التـ

اتجاهه \tilde{t} نرسم من s \tilde{t} مستقيمين متوازيين \tilde{t} \tilde{t} لينثلا الاثر وخط الاتجاه لمستوي حيثما اتفق P يمر بالمستقيم المعلوم e ثم نقيس على \tilde{t} البعد \tilde{t} مساوياً الى البعد \tilde{t} [٢] (وهذا الاخير يساوي وتر المثلث القائم الزاوية الذي أحد أضلاعه \tilde{t} وضلعه الآخر الارتفاع e) فتكون \tilde{t} نقطة الاتجاه للمستقيمين المتوازيين α β السالفي الذكر ويكون المستقيمان اللذان يصلان \tilde{t} بالنقطتين α β هما صورتان α β اللتان يقطعان \tilde{t} في α β فالبعد α β هو إذن البعد الحقيقي المطلوب. وإذا كانت \tilde{t} منتصف α β ووصل \tilde{t} \tilde{t} ليقطع \tilde{t} في \tilde{t} كانت \tilde{t} صورة منتصف α β . وتسمى \tilde{t} بنقطة القياس أو نقطة البعد النسبي للاتجاه \tilde{t} بالنسبة الى المستوى P (١).

ومن الواضح أنه اذا تغير المستوى P مع ثبوت e أو اتجاهه تغيرت \tilde{t} ومعنى هذا أن هناك عدداً لا نهاية لعدد نقاط القياس لاتجاه واحد \tilde{t} كلها واقعة على دائرة مركزها \tilde{t} ونصف قطرها \tilde{t} [٢] أي الطول الثابت لشعاع الاتجاه المعلوم ويطلق على هذه الدائرة اسم دائرة البعد النسبي لموجه \tilde{t} . وبالنظر الى أهمية هذه الطريقة نرى تلخيص الخطوات التي تستعمل لتطبيقها عملياً كما يلي (شكل ١٧٣) : —

الخطوة الاولى: أوجد الطول الحقيقي \tilde{t} [٢] لشعاع اتجاه المستقيم المعلوم P .
الخطوة الثانية: ارسم الدائرة التي مركزها \tilde{t} ونصف قطرها \tilde{t} [٢] فتكون

(١) في الواقع توجد نقطة قياس ثانية لنفس الاتجاه \tilde{t} بالنسبة الى المستوى P وهذه النقطة هي النقطة المائلة الى \tilde{t} بالنسبة الى \tilde{t} وهي التي يمكن الحصول عليها في (شكل ١٧٢) برسم المستقيم الآخر من α الذي يصنع مثل α مع \tilde{t} زاويتين متساويتين.

هى دائرة البعد النسبى للاتجاه \vec{T} أى المحل الهندسى لنقط قياس المستقيم ρ والمستقيمت الموازية له .

الخطوة الثالثة : اختراية نقطة قياس مثل \vec{Y} على هذه الدائرة ثم صلها بالنقطة \vec{T} فيكون الواصل هو خط الاتجاه $\vec{\tau}$ للمستوى P الذى تحده \vec{Y} والذى يمر بالمستقيم ρ ويكون المستقيم ξ المرسوم من S موازياً الى $\vec{\tau}$ هو أثر هذا المستوى .

الخطوة الرابعة : أسقط الصور الواقعة على \vec{P} للنقط المطلوب إيجاد البعد الحقيقى بينهما من \vec{Y} على الاثر ξ فظهر الابعاد الحقيقية على ξ . وبالعكس اذا أسقطت عدة نقط على ξ من \vec{Y} على \vec{P} تحددت صور النقط التى تبعد كل منها عن الاخرى بالابعاد المناظرة على ξ .

بند ١٩١ : المسألة الثانية — الاعمدة

(١) اذا علم مستو $A = (\xi \ \eta \ \tau)$ وعلت نقطة ρ بصورتها $\vec{\rho}$ وبالحامل $\vec{\alpha} = S, \vec{T}$ فالمطلوب تعيين العمود v من ρ على A .

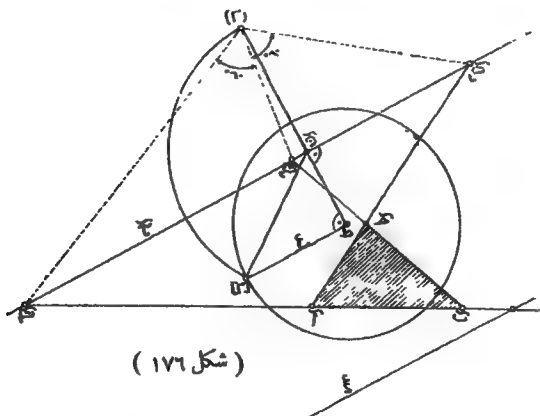
لذلك نطبق فى (شكل ١٧٤) المستوى π ط $\vec{\rho}$ (المرمر كزا الاسقاط π عمودياً على كلا المستويين $\pi \ \eta \ T$ حيث T مستوى الاتجاه للمستوى المعلوم) على Π ثم نقيم من π عموداً على π ليقابل امتداد ط $\vec{\rho}$ فى \vec{T} فتكون \vec{T} نقطة الاتجاه للاعمدة النازلة أو المقامة على A فهى إذن نقطة الاتجاه للعمود المطلوب v فاذا وصلت \vec{T} $\vec{\rho}$ كان الواصل هو الصورة \vec{v} لهذا العمود أما الاثر S فيمكن الحصول عليه كما تقدم فى (بند ١٨٢ ب) بجعل S, π موازياً الى \vec{T}, \vec{T} . ويلاحظ أن الزاويتين $\omega \ \eta \ \theta$ هما زاويتا ميل A $\eta \ v$ على Π . كما

(شكل ١٦٧) ثم نسقط من (١) عموداً على α ليقابل المستقيم ط α في المسقط العمودي المطلوب α'

ولايجاد بعد α عن Π نطبق المستوى العمودي م ط α على Π حول ط α فيكون α' [١] هو البعد المطلوب .

ويلاحظ أن [١] [٢] يجب أن يساوى (٢) (١) لان كلاهما يساوى البعد الحقيقي بين م و α .

مثال ٢ : اذا كان α و α' هما الاثر وخط الاتجاه لمستوى معلوم A وكان α α' المسقط المركزى لاحد أضلاع مثلث متساوى الاضلاع ب ح مرسوم في A فالمطلوب تعيين الصورة α' للرأس ح .



يمكن حل هذه المسألة بتطبيق المستوى A على Π (بند ١٨٩ س) واستخدام الائتلاف المركزى في تعيين α' بعد رسم المثلث في الموقع . على أن هناك طريقة

أخرى خاصة بالمنظور وهي أبسط من السابقة ويمكن معها الاستغناء عن ε :
 ذلك بأن يكفي بتطبيق المستوى T وحده (حيث T مستوى الاتجاه للمستوى A)
 فنزل من τ (شكل ١٧٦) العمود $\tau\bar{\tau}$ على $\tau\bar{\tau}$ ثم نمده الى (٢) بحيث
 يكون $\tau\bar{\tau} = (٢) = \tau\bar{\tau} [٢] =$ وتر المثلث القائم الزاوية الذي أحد أضلاعه
 $\tau\bar{\tau}$ وضلعه الآخر الارتفاع ε فيكون (٢) موقع مركز الاسقاط σ
 ويكون (٢) $\tau\bar{\tau}$ موقع شعاع الاتجاه للمستقيم ab (حيث $\tau\bar{\tau}$ هي نقطة
 تقاطع امتداد ab مع $\tau\bar{\tau}$ أى نقطة الاتجاه للضلع ab) . فإذا رسم
 من (٢) المستقيمان (٢) $\tau\bar{\tau}$ و (٢) $\tau\bar{\tau}$ اللذان يميل كل منهما على (٢) $\tau\bar{\tau}$
 بزاوية مقدارها ٩٠° وكانت $\tau\bar{\tau}$ و $\tau\bar{\tau}$ تقطعي تقاطع هذين المستقيمين
 مع $\tau\bar{\tau}$ كانت هاتان النقطتان نقطتي الاتجاه للضلعين b و a و يتقاطع
 حيث $\tau\bar{\tau}$ و $\tau\bar{\tau}$ في الصورة $\bar{\tau}$ للنقطة τ . ولهذا المسألة حلان
 إذ أن $\tau\bar{\tau}$ و $\tau\bar{\tau}$ يمكن اعتبارهما نقطتي اتجاه a و b وفي هذه الحالة
 تكون $\bar{\tau}$ نقطة تقاطع ab و $\tau\bar{\tau}$ و $\tau\bar{\tau}$.

مثال ٣ — المساقط المركزية للدائرة

هذه المساقط هي كما قدمنا مقاطع مخروطية . فلذا علبت دائرة في المستوى Π
 (شكل ٦٨) فإن صورتها في Π تكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على
 حسب ما إذا قطعت الدائرة خط الاختفاء γ للمستوى P في نقطتين حقيقيتين
 أو مسته أو لم تقطعه (في نقط حقيقيه) . ويمكن الحكم على نوع الصورة بعد
 تطبيق المستوى P المرسومة فيه الدائرة كما جاء في (بند ١٨٩ و) فإذا فرضنا
 أن a في (شكل ١٧٦) مركز دائرة واقعة في المستوى Π ومعلوم نصف قوسها
 ورسمنا في الموقع هذه الدائرة حيث يكون (١) مركزها فانه على حسب

الدائرة مع الموقع (x) لخط الاختفاء في نقطتين حقيقتين أو مسته أو لم تقطعه تكون صورة الدائرة قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على التوالي ويستخدم الالتلاف المركزي في رسم الصورة (بند ٧٢) .

مثال ٤ — منظور الكرة

إذا علمت كرة واعتبرنا مركز الإسقاط m رأساً لمخروط دوراني مرسومة داخله الكرة فإن المحيط الظاهري لهذه الكرة بالنسبة إلى m يكون المسقط المركزي لدائرة التماس بين المخروط والكرة ويكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما إذا كانت دائرة التماس أو الكرة نفسها قاطعة مستوى الاختفاء أو ماسة له أو غير قاطعة له على التوالي. فالمحيط الظاهري للكرة هو على هذا منحنى تقاطع المخروط الدوراني المذكور آنفاً مع Π فإذا رمزنا إلى نقطتي تقاطع الكرة مع قطرها العمودي على Π (أي نهايتي هذا القطر) بالرمزين b_1 و b_2 كان المسقطان المركزيان b_1 و b_2 لهاتين النقطتين يؤثرن المحيط الظاهري (بند ٥٠) .

ولنفرض في (شكل ١٧٧) أن مركز الكرة معلوم بصورته h وبمسقطه العمودي h' على مستوى الصورة (حيث h' يجب أن يكون إحدى نقط المستقيم $ط هـ$ — راجع مثال ١) فالحصول على المحيط الظاهري للكرة إذا علم نصف قطرها $ن$ نعتبر المستوى $م ط هـ$ و $هـ'$ هو العمودي على Π فهذا المستوى يقطع الكرة في دائرة عظمى δ مركزها $هـ$ ونصف قطرها $ن$ ويقطع المخروط الدوراني الذي رأسه m والمرسومة داخله الكرة في راسمين $هـ_1$ و $هـ_2$ يسمان δ ويقطع أخيراً مستوى الاختفاء X في مستقيم $خ$ يكون قطعاً للدائرة δ أو ماساً لها أو غير قاطع لها على حسب ما إذا كانت الكرة نفسها قاطعة مستوى الاختفاء أو ماسة له أو غير قاطعة له. ويتطبيق المستوى

وذلك بتعيين الاثر ϵ وخط الاتجاه τ المحددين للمستوى A المرسومة فيه دائرة التماس بين الكرة والخروط ثم تطبيق هذا المستوى على II واستخدام الالتلاف المركزي في رسم صورة دائرة التماس (وهي الدائرة التي قطرها يساوي $[A]$ $[A]$ ومركزها نقطة تقاطع المستقيم m ه مع A). فهذه الصورة يجب أن تكون نفس القطع الناقص المبين .

معلمين

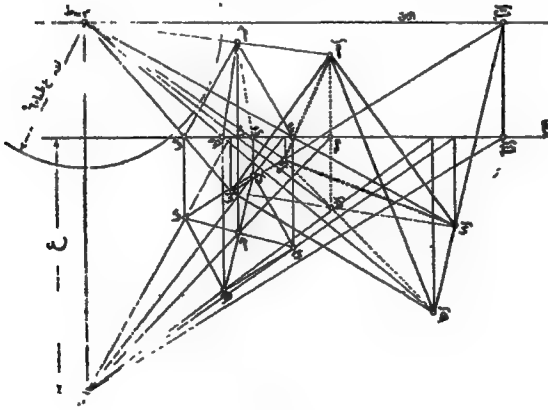
- (١) اذا علم مستقيم يميل على II بزاوية قدرها 30° فالمطلوب تعيين المستوى الذي يمر به ويصنع مع II زاوية قدرها 60° .
- (٢) المطلوب رسم منظور مكعب اذا علم المستوى المرسوم فيه أحد الواجه وعلم أيضاً ضلع من أضلاع هذا الوجه .
- (٣) المطلوب تعيين الزاوية الزوجية بين مستويين .
- (٤) المطلوب تعيين زاوية ميل مستقيم على مستو .
- (٥) أوجد البعد بين مستقيمين متوازيين .
- (٦) أوجد بعد نقطة معلومة عن مستقيم أو عن مستو معلوم .
- (٧) أوجد أقصر بعد بين مستقيمين غير متقاطعين .
- (٨) المطلوب تمثيل المستوى الذي يقطع مخروطاً دورانياً (محور عمودي على II) في قطع زائد قائم .

الفصل الخامس

رسم الصور المنظورية

بشر ١٩٣ : الطريقة المباشرة

يبين (شكل ١٧٨) المسططين الاقصى والرأسي لهرم رباعى قائم رأسه ١ وقاعدته ٢ هـ و ٣ واقعة فى مستوى اقصى ويراد رسمه رسماً منظورياً .



(شكل ١٧٨)

فالطريقة المباشرة لذلك تلخص فى اختيار مستوما وليكن المستوى الرأسى المتقاطع مع مستوى القاعدة فى المستقيم ٤ — ليثلى مستوى الصورة II واختيار نقطة فى الفراغ مثل م لتمثل مركز الاسقاط . وتحدد ٥ بمعلومية مسقطها الاقصى والرأسى م' م' وتكون م' فى هذه الحالة هى النقطة الرئيسية و نفسها . فاذا وصلنا م الى نقط الجسم المختلفة بالمستقيمات ١ م ٢ م ٣ م ٤ م ... ورمزنا

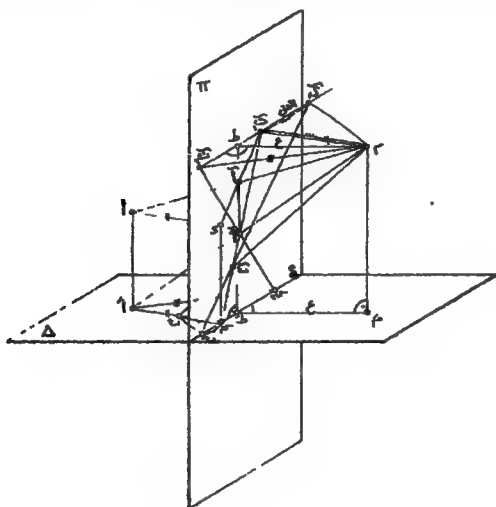
الى نقط تقاطع هذه المستقيمت مع II بالرموز \tilde{A} و \tilde{B} ... فان صورة الجسم تتألف حيثند من هذه النقط . فللحصول مثلاً على \tilde{A} نصل \tilde{A}' م \tilde{A} (وهما المسقطان الاقصى والرأسى المحددان للشعاع α) ونمد \tilde{A}' ليقطع المستقيم \tilde{A} في \tilde{A} ثم نقيم من \tilde{A} عموداً على \tilde{A} ليقابل م \tilde{A} في الصورة \tilde{A} للنقطة \tilde{A} .

وبلاحظ أن \tilde{A} و \tilde{B} لا بد أن يتقاطعا في نقطة مثل \tilde{A} واقعة على المستقيم الذي يمثل الاقصى والمرسوم من م " موازياً الى \tilde{A} وذلك لان ه و \tilde{A} و م مستقيمت متوازيان وواقعان في مستو اقصى فالنقطة \tilde{A} هي إذن نقطة اتجاهاهما وبالمثل يتلاقى \tilde{A} و \tilde{B} في نقطة مثل \tilde{A} على الاقصى هي نقطة اتجاهاهما . كما يلاحظ على هذه الطريقة أنه إذا أريد استخدامها في رسم منظور جسم أكثر تعقيداً من الهرم المبين بالشكل صار العمل شاقاً ولهذا السبب كانت هذه الطريقة قليلة الاستعمال في الامثلة العملية . وسنشرح في البند التالى طريقة أخرى أكثر استعمالاً ودقة من هذه الطريقة وتوضح القواعد الاساسية لاكثر الشقوق الاخرى المستعملة في رسم الصور المنظورية .

بند ١٩٤ : الطريقة العامة

نبدأ باختيار مستوى الصورة II ومركز الاسقاط م وسنمين في البند الآتى كيف يكون هذا الاختيار ليتيسر الحصول على منظر حسن للجسم المعلوم . ثم نفرض أن Δ مستوى الارض (بند ١٨٨) الذي يمثل المستوى الاقصى الذي يقف عليه الناظر الى الجسم والذي يقطع II في خط الارض Δ (شكل ١٧٩) . فاذا كانت \tilde{A} إحدى نقط الجسم معلومة بمسقطها الاقصى \tilde{A}' وارتفاعها \tilde{A}' عن Δ ويراد تعيين صورتها فالتا نبدأ أولاً بتعيين المسقط الاقصى المنظورى \tilde{A} لهذه النقطة بالطريقة الآتية : نفرض أن \tilde{A} و \tilde{B} على الاقصى (وهو خط الاتجاه

للمستوى Δ) هما نقطتا الاتجاه لاي مستقيمين $أ_١ س_١$ و $أ_٢ س_٢$ مرسومين من $أ$ في Δ ليقابلا II في الأشرفين $س_١ س_٢$ على خط الارض h (وسيرى القارئ على ضوء المثال المذكور في البند التالي أن المستقيمين $أ_١ س_١$ و $أ_٢ س_٢$ يختاران عادة بالتوازي لاتجاهين رئيسيين في الجسم المراد رسم منظوره بحيث



(شکل ۱۷۹)

تمر جميع المستقيمات الموازية لها بنقطتي الاتجاه T_1, T_2 (فاذا وصل S_1, T_1, S_2, T_2 فانهما يتقاطعان في المسقط الاقصى المنظورى A .
والحصول على الصورة A فصل A بأية نقطة على الافق وتكون نقطة الاتجاه T_1 للمستقيم S_1 وعند هذا الواصل ليقطع d في نقطة مثل S_1 ثم

نقيس على العمود المقام من س، على δ الارتفاع من، و مساوياً للارتفاع المعلوم α ١ وفصل α و α فيتقاطع حيثند مع خط انشاز المرسوم من α عمودياً على δ في الصورة المطلوبة α . وذلك لان س، α و α هما في هذه الحالة صورتان لمستقيمين متوازيين α س، α و α البعد الحقيقي بينهما يساوى س، و الذى يساوى α ١ .

واذا كانت ب' إحدى نقط المستقيم α س، وفرضنا أنها تمثل المسقط الاقوى لنقطة جديدة من نقط الجسم مثل ب يراد تعيين مسقطها الاقوى المنظورى ب' فالتا نقيس على الاقوى ابتداء من α البعد α س، مساوياً α س، فتكون α نقطة البعد النسبى للاتجاه α بالنسبة لمستوى الارض Δ (بند ١٩٠) فاذا قيس على δ البعد س، ب' مساوياً الى البعد المعلوم س، ب' ووصل α ب' فان هذا الواصل يتقاطع حيثند مع س، α في ب' . ولكى يتيسر قياس الابعاد على المستقيم α س، نعين بالمثل نقطة القياس الأخرى α للاتجاه ب' .

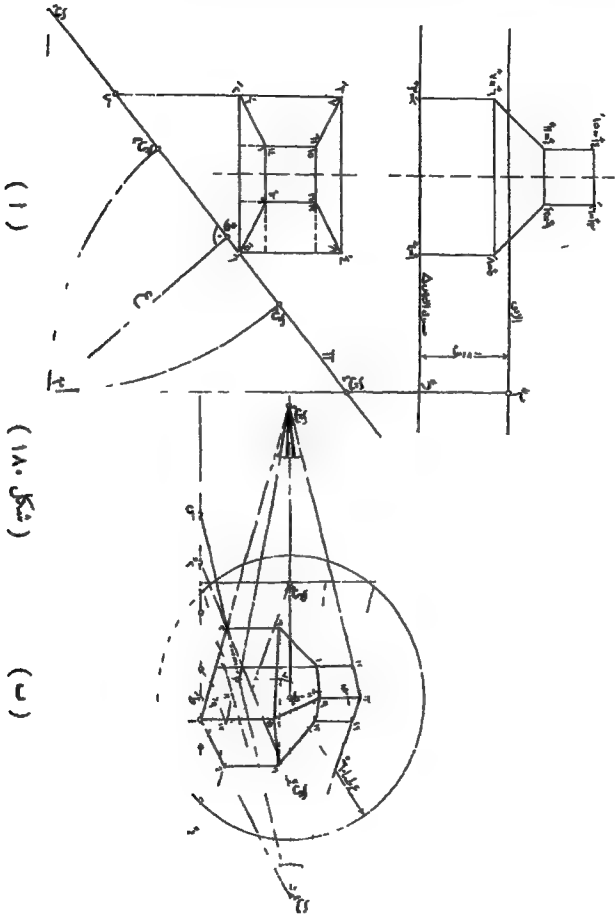
نر ١٩٥ : مثال تطبيعى على الطريقة العامة لرسم المنظور من الخارج .

يمثل (شكل ١٨٠ ١) جسماً معلوماً بمسقطيه الاقوى والرأسى يراد رسم صورة منظورية له فالخطوات اللازمة لذلك يمكن تلخيصها كما يلى :

الخطوة الاولى : اختيار Π م

بما أن الجسم هنا في وضع أمامى بالنسبة للمستوى الرأسى فانه اذا اختير أحد المستويات الموازية للمستوى الرأسى ليمثل Π حصلنا على صورة وجهية أو منظور متوازى

(١) اذا رسمت في Π عدة مستقيمت عمودية على δ ومحصورة بالمستقيمين س، α و α فان هذه المستقيمت تمثل صور الاوضاع المختلفة التى يتخذها المستقيم α ١ اذا تحرك موازياً لنفسه فى الاتجاه الذى تحدده النقطة α وعند ما يصل α ١ الى Π ينطبق حيثند على صورته س، و التى تحدد لذلك البعد الحقيقى بين α ١ .



للجسم (كما هو الحال في شكل ١٨١) . أما إذا أريد أن تكون الصورة زاوية
وجب أن يكون II مائلا على الواجهة الرئيسية في الجسم وقد جرت العادة
باختياره عمودياً على المستوى الاقصى ويحسن أن يكون ماراً بأحد الاحرف الرأسية
للجسم إن أمكن (فهو يمر في شكل ١٨٠ ١ بالحرف ١ - ٥) .

أما مركز الاسقاط م فيجب أن يكون نقطة في الفراغ يستطيع الناظر منها
الى الجسم أن يراه في صورة واضحة جلية . فاذا اختير مستوى القاعدة ١ ٢ ٣ ٤
ليمثل مستوى الارض Δ فانه لكي يتحدد م بالنسبة الى II يجب أن يُعلم :

أولاً - وضع الشعاع الرئيسى م ط في المسقط الاقصى

ثانياً - ارتفاع هذا الشعاع عن Δ

ثالثاً - البعد ع لمركز الاسقاط عن II .

أما الشعاع الرئيسى م ط فيختار بحيث تكون النقطة الرئيسية ط في
متتصف الصورة بالتقريب ويكون ارتفاع هذا الشعاع عن Δ مساوياً في
الحالات العادية من ١,٦٠ - ٢,٠٠ متراً وهو الارتفاع الطبيعى للانسان
باعتباره واقفاً على المستوى Δ (وهو في الشكل ١٨٠ ١ متراً)^(١) .

وأما البعد ع فقد وجد بالتجربة أنه يجب أن يكون بحيث يقع الجسم كله
داخل مخروط دائرى قائم رأسه في م ومحوره م ط وزاوية رأسه لا تزيد عن
٦٠° أى بحيث تقع الصورة كلها داخل دائرة مركزها ط ونصف قطرها
س = ع ظلنا ٦٠° وإلا كانت الصورة مشوشة وغير طبيعية كالصورة المرسومة
في (شكل ١٧٨) وهو ما يحدث اذا كان البعد ع صغيراً . فاذا افترضنا ع

(١) في الواقع ان هذا الارتفاع يتوقف على نوع الصورة التى يراد الحصول عليها
فتلا لو أريد رسم منظور للجسم كما يراه شخص مرتفع عنه (في طائرة مثلا) وجب
أن نقتض م على ارتفاع كبير من مستوى الارض .

تساوى بعداً معيناً ثم عينا صورة النقطة من الجسم التي يظن أنها ستكون أبعد ما يمكن عن ط (مثل النقطة ٤ في الشكل) ورمزنا الى بعد هذه الصورة عن ط بالرمز ϵ فانه يجب أن تكون

$$\epsilon > \epsilon_{١٠} \text{ أو } \epsilon < \epsilon_{١٠} = \frac{\epsilon}{٢} \text{ تقريباً و } ٢$$

فلذا اتفق هذا مع الفرض الاول كان البعد ϵ مناسباً وإلا غيرناه تكبيراً أو تصغيراً الى أن نحصل على البعد المناسب على أن شيئاً من التمرين يغني غالباً عن تكرار التجربة (وبلاحظ أن $\epsilon = ٢,٥$ و تقريباً في شكل ١٨٠). وفي كثير من الحالات يؤخذ ϵ مساوياً على الاقل لاكبر بعد في الجسم المراد رسمه ويكون غالباً اختياراً موقفاً.

الخطوة الثانية : تعيين نقط الاتجاه الرئيسية ونقط البعد النسبي لها

لذلك نرمس في (شكل ١٨٠) من م' موازيين الى الاتجاهين الرئيسيين ١' ٢' ٣' ٤' ليقابلا II في قطعتي الاتجاه $T_١$ و $T_٢$ على التوالي ثم نركز في $T_١$ وبفتحة تساوى $T_٢$ (طول شعاع الاتجاه) نقط II في نقطة القياس $Y_٢$ للاتجاه $T_٢$ ونفس الطريقة نعين نقطة القياس $Y_١$ للاتجاه $T_١$.

الخطوة الثالثة : التمهيد لرسم المنظور في شكل جديد

بعد الانتهاء من تحديد الاشياء الميئة في الخطوتين الاولى والثانية حيث يستخدم لذلك شكل (١٨٠) الذي يطلق عليه عادة اسم الشكل التمهيدى أو الشكل الاعدادى تنتقل الى شكل جديد (١٨٠ ب) يمثل المستوى II نفسه فنختار فيه مستقيماً ما ليثل الافق ومستقيماً آخر δ موازياً اليه ويبعد عنه الى أسفل يبعد يساوى ϵ "مقيساً من الشكل الاعدادى (مع جواز تغيير مقياس الرسم) ثم نختار على الافق النقطة الرئيسية ط ونقيس ابتداء منها على هذا الافق البعدين ط ϵ و ط ϵ يميناً والبعدين

ط ي ٤ ط ت يساراً مأخوذة جميعاً من الشكل الاعدادى ونعين أيضاً على ٥ النقطة ١ الى يمين ط بحيث يكون البعد ط ١ مساوياً الى البعد ط ١ فى (شكل ١٨٠) فكون هذه النقطة صورة النقطة ١ من الجسم الواقعة فى II .

الخطوة الرابعة : رسم المنظور

نبدأ بتوصيل النقطة ١ بنقطتى الاتجاه ت ت فىكون الواصلان صورتى الضلعين ١ ٢ من قاعدة الجسم ثم نقيس على ٥ البعد ١ ٢ (الى يسار ١) مساوياً للبعد ١ ٢ فى الشكل الاعدادى ونصل ٢ ي ي لقطع المستقيم ١ ت فى النقطة ٢ فكون هى صورة النقطة ٢ من الجسم ^(١) وبالمثل نصل ٤ ي ي (حيث ١ ٤ يساوى ١ ٤ فى الشكل الاعدادى) لقطع ١ ت فى النقطة ٤ ثم نصل ٢ ت ٤ ت ليتقابلا فى النقطة ٣ فىكون الشكل الرباعى ٤ ٣ ٢ ١ منظور القاعدة وفى الوقت نفسه المسقط الاقوى المنظورى للمستطيل ٨ ٧ ٦ ٥ من الجسم . ولما كان الحرف ١ - ٥ واقعاً فى مستوى الصورة فهو يظهر بطوله الحقيقى فى شكل (١٨٠ ب) أى أن ١ - ٥ فى هذا الشكل يساوى ١ - ٥ مقيساً من الشكل الاعدادى . فاذا وصلت الصورة ٥ بنقطتى الاتجاه ت ت فى فان هذين الواصلين يلاقيان الحرفين الرأسين المرسومين من ٢ ٤ فى الصورتين ٨ ٦ ويتقاطع حيثئذ المستقيمان ٦ ت ٨ ت فى الصورة ٧ .

والحصول على النقطة ٩ من المسقط الاقوى المنظورى ٩ ١٠ ١١ ١٢ تمد المستقيمين ٩ ١٠ ٩ ١٢ فى الشكل الاعدادى ليتقابلا ١ ٤ ٩ ١ فى نقطتين مثل ١ ب (غير ميتين بالشكل) على التناظر ثم نستخدم قطبى القياس ي ي ٩ ي

(١) نلفت النظر الى أن العلامات د ه ، التى تدل على صور النقط مخنوفة من شكل (١٨٠ ب) بقصد التخفيف عنه .

في تعيين صورتين $\bar{A} \bar{Q}$ \bar{B} (على الضلعين ١-١٩٤-٢) في شكل (١٨٠ ب) فتكون \bar{Q} في هذا الشكل هي نقطة تقاطع $\bar{A} \bar{T}_4 \bar{Q}$ $\bar{B} \bar{T}_4$. فإذا أتمنا رسم المسقط الاقصى المنظورى على هذا المنوال وقسنا الارتفاعات كما تقدم في (بند ١٩٤) حصلنا على الصورة الميئة بالشكل.

ونوجه نظر القارىء الى أن تحديد النقط الأربع T_1, T_2, T_3, T_4 يجعل من الممكن الحصول على صورة أية نقطة في Δ بطريقتين وإن اختلفتا في الظاهر إلا أنها يقومان معاً على الأساس الذى شرحناه في (بند ١٩٤) :—

الطريقة الأولى — وتكون باستخدام قطعي القياس γ و γ' كما تقدم فهذه الطريقة وإن كان ظاهرها تعيين الصور بقياس الأبعاد الحقيقية ويطلق عليها أحياناً لهذا السبب اسم طريقة القياس رسم المنظور — إلا أنها في الواقع لا تخرج عن رسم مستقيمت في Δ موازية للاتجاهين الاقيين γ و γ' و α و α' و β و β' بالنقط المطلوب تعيين صورها. فثلاً النقطتان γ و γ' يمكن اعتبارهما الاثر ونقطة الاتجاه لمستقيم مثل α مرسوم في α ويمر بالنقطة γ صانعاً مع الضلع γ — γ' ومع أثر المستوى Π زاويتين متساويتين ^(١) والمستقيم γ في (شكل ١٨٠ ب) يمكن اعتباره لذلك صورة α (بند ١٩٠) كما يمكن اعتبار الصورة γ في هذه الحالة نقطة تقاطع الصورتين γ و γ' مستقيمين مارين بالنقطة γ .

الطريقة الثانية — وتكون برسم مستقيمت مارة بالنقط كما تقدم واستخدام آثار هذه المستقيمت على II في رسم صورها ولهذا السبب يطلق على هذه

(١) فلذا رسم من ٢ في الشكل الاعدادي مستقيم يوازي α فإن هذا الموازي يكون المسقط الاقصى α' للمستقيم ويقابل Π في الاثر ٢.

الطريقة أحيانا اسم طريقة انوار رسم المنظور . فتتلا للحصول على الصورة ٢ بهذه الطريقة نعتبر الضلعين ٢ - ١ - ٩ ٢ - ٣ المارين بالنقطة ٢ كستقيمين اختياريين مارين بها ثم نمس ٢' ٢' في الشكل الاعدادي الى أن يقابل II في س فتكون النقطتان ١ ٩ س أترى هذين المستقيمين . فاذا قيس على ٥ في شكل (١٨٠ ب) البعد ١ س الى اليسار مساوياً ١' س من الشكل الاعدادي ووصل س ٢' فان هذا الواصل (صورة الضلع ٢ - ٣) يتقاطع حيثئذ مع المستقيم ١ ٢' (صورة الضلع ٢ - ١) في الصورة المطلوبة ٢ .

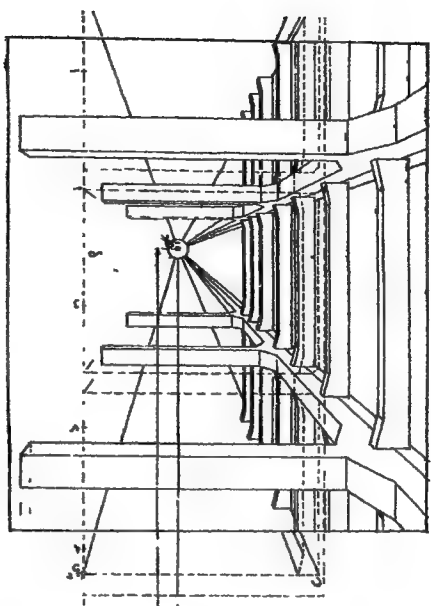
ملحوظة

كثيراً ما يحدث أن يكون البعد بين نقطتي الاتجاه ٢ ٩ ٢ كبيراً بحيث يتعذر الحصول عليهما معا داخل المساحة المحدودة لورقة الرسم . ففي مثل هذه الحالة تكون نقطة الاتجاه التي لا يمكن الوصول اليها لوجودها خارج الورقة معلومة باعتبارها نقطة تقاطع مستقيمين معلومين فيستخدم الراسم حيثئذ لتوصيلها بالنقط المختلفة آلات مخصوصة تعرف باسم « مساطر المنظور » أو يلجأ الى حلول هندسية تؤدي الى نفس الغرض (١) .

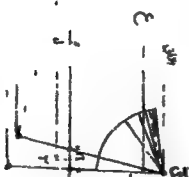
بند ١٩٦ : مثال على المنظور من الارتفاع

يبين (شكل ١٨١) المسططين الاقصى والرأسي لصالة يراد رسمها من الداخل رسماً منظورياً متوازياً . فالطريقة المستعملة لذلك لا تختلف في الجوهر عن الطريقة التي شرحناها في البند السابق على أنه لما كان يراد هنا رسم صورة وجهة البناء فان

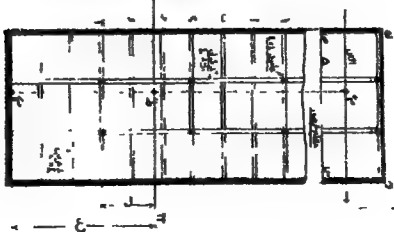
(١) تقوم مثل هذه الحلول على بعض النظريات المشهورة في الهندسة المستوية مثل « الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة تتلاقى في نقطة واحدة » ومثل « كل مستقيم يصل نهايتين متناظرتين لوترين متوازيين في دائرتين يمر بمركز تشابه الدائرتين ».



(c)



(ب) (نقطه ۱۸۱)

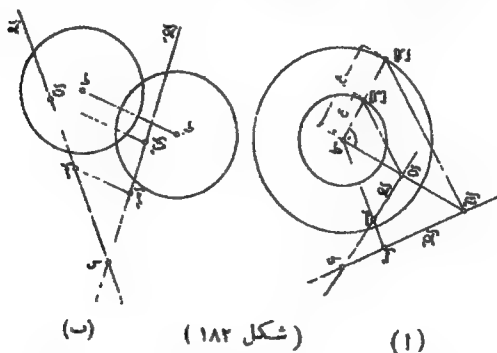


(ا)

أن يلاحظ الرسم عند رسم الاجزاء المائلة من أحرف الكمر الطولى في الصورة أنها أجزاء من مستقيمت موازية لاتجاهين ثابتين (وماثلين على كل من Π و Δ) فيحسن لذلك تعيين قطبى الاتجاه لهذه المستقيمت وهما نقطتان (يمكن الحصول عليهما بسهولة برسم مقطع طولى للبناء فى الشكل الاعدادى) واقتنان على العمود النازل من النقطة الرئيسية π على δ ومتماثلتان بالنسبة الى هذه النقطة .

بند ١٩٧ : تغير وضع مركز الاسقاط — التجميع

اذا فرضنا (شكل ١٨٢) أن مركز الاسقاط يتحرك عمودياً على مستوى الصورة الثابت Π فالنقطة الرئيسية π لا تتغير بينما يتغير بالبداهة بعد المركز عن Π وبالتالى نصف قطر دائرة البعد . فاذا كان $\alpha \equiv \pi$ هو منظور



(ب)

(شكل ١٨٢)

(١)

مستقيم مثل α عندما يكون مركز الاسقاط π على بعد من Π يساوى ϵ وكان $\alpha \equiv \pi$ هو منظور نفس المستقيم « عندما يكون مركز الاسقاط فى π التى تبعد عن Π بالبعد ϵ فن الواضح أن « α » يتقابلان حيثند

في الأثر الثابت α للمستقيم α على Π كما أن النقط τ τ τ هي على استقامة واحدة بحيث يكون المستقيمان $[\tau]$ τ $[\tau]$ متوازيين (لان هذين المستقيمين هما الموقعان لشعاعى الاتجاه اللذان يمكن الحصول عليهما بتطبيق المستوى العمودى τ τ τ على Π) . ولما كانت الصورتان τ τ لاية نقطة مثل α على المستقيم α لابد أن يقع على استقامة واحدة مع τ لان المستقيم τ τ يمثل أثر المستوى τ τ τ . فيتضح من ذلك أنه اذ رسمت α شكلا سمه واقعا في مستو P فان الصورتين سمه سمه اللتين ترسمها τ τ يكونان شكلين مؤتلفين مركزيا حيث محور الاتلاف هو الأثر τ للمستوى P ومركز الاتلاف هو النقطة الرئيسية τ .

واذا تحرك مركز الاسقاط من τ الى τ في مستوى الاختفاء الموازى لمستوى الصورة الثابت Π (شكل ١٨٢ ب) فان النقطة الرئيسية تتحرك في Π من τ الى τ وفي هذه الحالة يبقى البعد τ وبالتالى نصف قطر دائرة البعد ثابتا لا يتغير . فاذا كان $\alpha \equiv \tau$ صورة مستقيم α عندما يكون مركز الاسقاط فى τ وكان $\alpha \equiv \tau$ صورة نفس المستقيم عندما يكون مركز الاسقاط فى τ فن الواضح أن α τ يتقاطعان فى هذه الحالة أيضاً فى الأثر الثابت τ للمستقيم α على Π وأن المستقيم τ τ يساوى ويوازى τ τ كما أن المستقيم τ τ الذى يصل صورتى أية نقطة α على المستقيم يوازى τ τ . فاذا رسمت α شكلا سمه واقعا في مستو P فان الصورتين سمه سمه اللتين ترسمها τ τ فى هذه الحالة يكونان شكلين مؤتلفين اتلافاً متوازيا حيث محور الاتلاف هو الأثر τ للمستوى P واتجاه الاتلاف τ τ .

واذا كان البعد τ τ فى شكل (١٨٢ ب) مساوياً للبعد الطيعى بين عيني

إنسان (من ٦ — ٧ سم) واستخدمنا مركزى الاسقاط م م' في رسم منظورى
 جسم واحد على المستوى II فان هذين المنظورين يؤلفان حينئذ ما يسمى
 بالصورة المجسمة للجسم بمعنى أنه اذا وضع الناظر الى الرسم عينيه في مركزى
 الاسقاط م م' وجد أن صورتي الجسم بنجاحه ويؤولان الى
 صورة واحدة مجسمة .

الباب الحادى عشر

المبادئ الاساسية لعلم الفوتوغرامتريا

الفصل الاول

كلمة عامة

نبر ١٩٨ : تعاريف

عرفنا فى الفصل الاخير من الباب السابق كيفية الحصول على صورة منظورية لجسم معلوم بمساقطه العمودية (المسقطين الاقصى والرأسى أو المسقط المرقوم) وسنخصص هذا الباب لشرح العملية العكسية لهذه العملية . وهذه العملية العكسية التى تقوم عليها أسس ذلك العلم الحديث الهام المسمى بالفوتوغرامتريا هى عملية تعيين جسم برسم مساقطه العمودية اذا علمت صورة فوتوغرافية له (صورة منظورية) أو أكثر .

فاذا علمت مثل هذه الصورة الفوتوغرافية فإن العناصر التى تحدد مركز الاسقاط (أو مركز التصوير) م بالنسبة للصورة II وهى النقطة الرئيسية د ط ، والبعد د ع ، تسمى عناصر الاستيفاض الدافئ للصورة كما تسمى العناصر المحددة لمركز الاسقاط والشعاع الرئيسى م ط فى الفراغ بالنسبة للجسم المصور بعناصر الاستيفاض الخارجى .

واذا كان الجسم المصور جسماً هندسياً معلومة أبعاده وزواياه كما هو الحال فى فن العمارة فإن صورة واحدة له تكفى للقيام بعملية الاستيفاض الداخلى ولرسم مسقط الجسم المرقوم (الفصل الثانى) .

أما إذا لم تكن أبعاد وزوايا الجسم المصور معلومة كأن كان الجسم سطحاً طبوغرافياً — وهذا هو الاستعمال الرئيسى للفوتوغرامتريا — فلا بد لرسم مسقطه المرقوم من صورتين فوتوغرافيتين له على الأقل ترسمان من مكانين مختلفين بواسطة آلة خاصة لذلك تسمى بالفوتوثيودوليت وهى آلة فوتوغرافية مصحوة بثيودوليت لقياس الزوايا ومزودة بعلامات خاصة على لوحة التصوير تسمح بتعيين النقطة الرئيسية ط (قارن شكل ١٨٥ ١) ومزودة أيضاً بقياس خاص يسمح بقراءة البعد ع لمركز التصوير عن اللوحة . وهكذا تكفي الفوتوثيودوليت مؤونة القيلم بعملية الاستيضاح الداخلى لان هذه العملية فى حالة السطوح الطبوغرافية وعلى وجه العموم فى حالة الاجسام المجعولة زواياها وأبعادها غير ممكنة .

ونبرهن الآن على النظرية الاساسية الآتية :

اذا علمت عناصر الاستيضاح الداخلى والخارجى لصورتين فوتوغرافيتين لجسم ما فانت هاتاه الصورتاه اثنتين لتمثيل الجسم .

فنفرض لذلك أن الصورتين Π و Π' أخذتا لقطعة أرض من مكانين مختلفين Π و Π' بواسطة فوتوثيودوليت فتحدت بذلك عناصر الاستيضاح الداخلى للصورتين ثم استخدمت الآلة فى تحديد عناصر الاستيضاح الخارجى بقياس البعد الأفقى بين Π و Π' وهو البعد الذى يطلق عليه اسم القاعدة وقياس الزاويتين φ و φ' المحصورتين بين القاعدة وبين الشعاعين الرئيسيين Π ط و Π' ط (اللذين هما محورا التصوير اذا كانت اللوحتان رأسيّتين أو المسقطين الاقيين لهذين المحورين اذا كانت لوحتا التصوير مائلتين) . فاذا راينا عند التصوير من Π أن تظهر (على اللوحة Π) الصورة Π'' للمكان Π' وعند التصوير من Π' أن تظهر (على اللوحة Π') "صورة Π'' "

للمكان Π ، فإنه يطلق على الصورتين ^(١) Π ، Π اسم التقطيع الاساسيتين للوحي التصوير Π ، Π . وإذا كانت Π ، Π صورتى نقطة واحدة من قطعة الارض مثل Π ، Π على Π ، Π فن الواضح أن Π ، Π يتقابلان حيثند على المستقيم Π (خط تقاطع Π ، Π) فى نقطة مثل Π ، Π وبعبارة أخرى اذا اعتبرنا Π ، Π نقطتين متناظرتين فى Π ، Π وكذا Π ، Π ... الخ كانت الحزمتان Π ، Π (Π ، Π) (Π ، Π) متظورتين (وتكون الحزمتان مؤتلفتين فقط فى حالة فصل اللوحتين Π ، Π) . فاذا كان Π مستوياً جديداً يقطع Π ، Π فى المستقيمين Π ، Π على التوالى وكان Π هو المركز الجديد للأسقاط فى هذه الحالة وعلت النقط الاساسية الست : Π ، Π فى Π ، Π ثم Π ، Π فى Π ، Π وأخيراً Π ، Π فى Π ، Π — فان الصورة Π فى Π للنقطة Π يمكن حيثند الحصول عليها بمعلومية الصورتين Π ، Π لنفس النقطة إذ يكفى لذلك أن نصل Π ، Π ع Π ، Π (حيث Π هى نقطة تقاطع Π مع Π ، Π وحيث Π ، Π نقطة تقاطع Π مع Π ، Π) فيتقابلا فى الصورة المطلوبة Π . فاذا كان Π مستوياً أفقياً واختير المركز Π فى اللانهاية بحيث يحدد اتجاهها عمودياً على Π كان Π هو المسقط الاقصى للنقطة Π وبغفس الطريقة يمكن تعيين المسقط الرأسى للنقطة على مستو جديد عمودى على Π وهكذا تتحدد قطعة الارض .

- (١) يلاحظ أن العلامات Π ، Π حلت فى هذا المكان فقط تسهيلا للطبع محل العلامات Π ، Π . وسنعود الى استعمال العلامات الاخيرة فيما يلى من الفصول .
- (٢) لان Π فى هذه الحالة هى نقطة تقاطع المستويات الثلاثة Π ، Π ، Π .
- (٣) متروك للقارى عمل شكل يوضح البرهان وذلك رسم زاوية ثلاثية مجسمة محدودة بالمستويات الثلاثة Π ، Π ، Π المتلاقية فى نقطة واحدة .

هذا وتنقسم المساحة الفوتوغرامتريه التى تبحث فى مسح الاراضى بواسطة التصوير الشمسى الى مساهم فوتوغرامتريه ارضيه حيث يكون غالباً تحديد عناصر الاستيضاح الخارجى ممكناً كما تقدم وتكفى حينئذ صورتان لقطعة الارض والى مساهم فوتوغرامتريه جويه (التصوير من الطائرة) حيث يتعذر قياس عناصر الاستيضاح الخارجى وفى هذه الحالة لا تكفى صورتان وإنما يصبح من الضرورى لحساب هذه العناصر بادىء ذى بدء ثم استنباط المسقط المرقوم أن تعلم عدة صور للقطعة المراد تحديدها .

وسنقتصر فى الفصل الثالث على شرح الأسس الهندسية التى تقوم عليها الطرق الليانية لاستنباط المساقط المرقومة فى حالة المساحة الفوتوغرامتريه الارضية . على أنه يجب ملاحظة أن استعمال هذه الطرق الليانية غير جائز فى الامثلة العملية التى تقتضى الدقة وإنما يتجه الانسان فى مثل هذه الاحوال الى الطرق الحسابية أو الى استخدام آلات خاصة لذلك .

الفصل الثانى

تعيين الاجسام الهندسية

من صورة واحدة

نبر ١٩٩ : لوحة التصوير رأسية

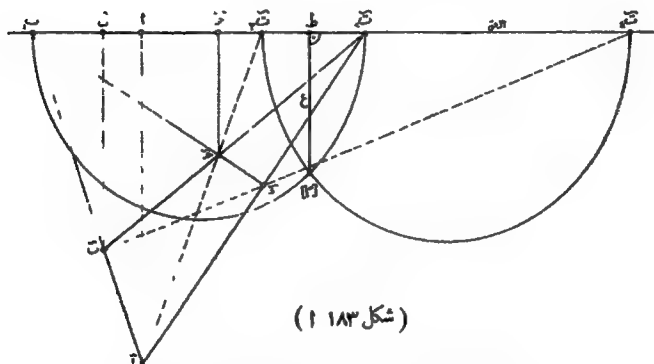
مثال — اذا علم أن الشكل الرباعى $\alpha \beta \gamma \delta$ فى مستوى الصورة II هو صورة مربع $\alpha \beta \gamma \delta$ مرسوم فى مستوى أفقى Φ فالمطلوب إيجاد عناصر الاستيضاح الداخلى وكذا رسم المسقط المرقوم للمربع على مستوى الافق مع العلم بأن الآلة كانت رأسية عند تصوير المربع.

أولا : عملية الاستيضاح الداخلى

لتعيين ρ ع فى هذه الحالة نمد $\alpha \beta$ و $\gamma \delta$ ليتقابلتا فى τ ونمذك ذلك $\alpha \beta$ و $\gamma \delta$ ليتقابلتا فى τ (شكل ١٨٣) فتكون τ نقطة اتجاه المستقيمين المتوازيين $\alpha \beta$ و $\gamma \delta$ كما تكون τ نقطة الاتجاه للمستقيمين المتوازيين $\alpha \delta$ و $\beta \gamma$. أما المستقيم τ فهو خط الاتجاه لمستوى المربع أى الافق الذى تقع عليه ρ .

ولما كان الضلعان $\alpha \beta$ و $\gamma \delta$ متعامدين (وكذا $\alpha \delta$ و $\beta \gamma$) فاننا اذا طبقنا مستوى الافق (الذى هو مستوى الاتجاه للمستوى Φ) على II وفرضنا أن [م] الموقع المجهول لمركز الاسقاط م وجب أن تكون الزاوية τ [م] τ قائمة (حيث [م] τ و [م] τ موقعا شعاعى الاتجاه للضلعين $\alpha \beta$ و $\gamma \delta$) وينتج من ذلك أن المحل الهندسى للموقع [م] هو دائرة قطرها τ τ . وبالمثل لما كان القطران $\alpha \gamma$ و $\beta \delta$ متعامدين وجب أن تكون الزاوية τ τ [م] τ قائمة (حيث τ τ و τ τ نقطتا الاتجاه للقطرين

١ ح ٢ و) أى أن [م] يجب أن تقع أيضاً على محيط دائرة أخرى قطرها $T_1 T_2$.
 فإذا كانت [م] إحدى تقاطع الدائرتين السالفتي الذكر وأسقطنا
 منها عموداً على الارتفاع ليقابله في ط كانت ط هي النقطة الرئيسية للصورة
 وكان $E = ط$ [م] بعد مركز الإسقاط عن II.



وتعين الأثر ϵ المستوى Θ اذا علم الطول الحقيقي ρ لـ اضلع المربع وذلك بالطريقة الآتية (وهي غير مينة في الشكل) : نعين على الاق Γ نقطة القياس γ للاتجاه Γ مثلاً بجعل $\Gamma \gamma$ مساوياً الى $\Gamma \gamma$ [٢] ثم نعين على الاق Γ نقطة مثل γ بحيث يكون البعد $\gamma \gamma$ مساوياً الى الطول المعلوم ρ ونصل $\gamma \gamma$ و $\gamma \gamma$ ونرسم من γ موازياً الى $\gamma \gamma$ ليقابل $\gamma \gamma$ في γ فتكون $\gamma \gamma$ إحدى نقط ϵ الموازي للاق ونترك القارئ إثبات ذلك بمقتضى (بند ١٩٠) .

ثانياً : المسقط المرقوم

يؤخذ من شكل (١٨٣ ب) أن المسقط الاقصى 'النقطة مثل ١' في المستوى (Q) يوجد على المسقط الاقصى م 'آ' للشعاع ١٠ (حيث آ المسقط الاقصى

فلذا وصل م آ فان المسقط الاقي ' ا' للنقطة ا يتحدد على هذا الواصل اذا
تحدد المستوى Φ بمعلومية طول ضلع المربع كما تقدم ^(١) . غير أن ا' تؤخذ عادة
حيثما اتفق على المستقيم م آ ويكون هذا الاختيار محددًا حيثن لمقياس الرسم
في الشكل . ومتى تم اختيار ا' تعينت المساط الاقية لبقية النقط فالمستقيان
المرسومان من ا' موازيين الى م ت_١ م ت_٢ يقابلان م ب م و في ب و
وينفس الطريقة لتحديد ح' ويكون ا' ب' ح' و' المسقط الاقي المطلوب
للربع .

أما رقم النقطة ا' أى بعدها عن مستوى الاتق فيمكن الحصول عليه كما
يؤخذ من شكل (١٨٣ ب) بتطبيق المستوى م ا' آ آ على مستوى
الاتق حول م ا' إذ لا كان البعد آ آ يظهر في مستوى الصورة بطوله
الحقيقي (وملاحظ أن هذا البعد ثابت ولا يتوقف الا على الصورة آ وحدها)
فانه يمثل قياسه من شكل (١٨٣ ا) وجعل العمود آ آ [آ] في شكل (١٨٣ ح)
مساويًا له وبذا يكون ا' [ا] هو الرقم المطلوب .

بعض أمثلة أخرى

نذكر فيما يلي بعض أمثلة أخرى على عملية الاستيضاح الداخلي لصور مأخوذة
بآلات رأسية لاشكال هندسية واقعة في مستويات أفقية :

(١) اذا كان الشكل الرباعي آ ب ح د في (شكل ١٨٣ ا)
صورة لمستطيل (بدلاً من مربع) وعلت النسبة بين ضلعيه فان معنى هذا أن

(١) لانه اذا تعين في شكل (١٨٣ ا) أثر هذا المستوى كان البعد ينمو بين الاتق
مساويًا الى ا' ا' في شكل (١٨٣ ب) فتطبيق المستوى م ا' آ آ على
مستوى الاتق في شكل (١٨٣ ح) لتحديد حيثن ا' .

تكون الزاوية ب ١ ح مثلا معلومة وتكون [م] في هذه الحالة هي نقطة تقاطع نصف الدائرة المرسومة على ت_١ ت_٢ مع قوس الدائرة المرسومة على ت_١ ت_٢ كوتر فيها بحيث تقبل زاوية تساوى الزاوية المعلومة ب ١ ح . وبذا تتعين ط ٩ ع .

(٢) اذا كان آ ب ح صورة لمثلث (في مستوى أفقى) معلومة زواياه الحقيقية وعلت نقط الاتجاه ت_١ ت_٢ ت_٣ لا ضلعه ا ب ٩ ب ح ٩ ح ا ١ بحيث كانت هذه النقط واقعة على مستقيم واحد يمثل الافق فان [م] يمكن الحصول عليها في هذه الحالة كنقطة تقاطع قوسى دائرتين مرسومة إحدهما على الوتر ت_١ ت_٢ مثلا وتقبل الزاوية ا والاخرى على الوتر ت_٢ ت_٣ وتقبل الزاوية ح .

(٣) اذا علم أن المقطع المخروطى الذى تعينه النقط الخمس آ ب ٩ ب ٩ ح ٩ و ٩ هـ في مستوى الصورة هو صورة لدائرة مارة بالنقط ا ب ٩ ب ٩ ح ٩ و ٩ هـ بحيث يكون ا ب ح و مستطيلا مرسوماً داخلها فالمطلوب تعيين ط ٩ ع .

لحل هذه المسألة نوجه نظر القارىء الى نظرية معروفة وهى أنه اذا مرت دائرة برؤوس مستطيل ا ب ح و فالشرط اللازم والكافى لان تمر هذه الدائرة بنفسها بنقطة خامسة مثل هـ هو أن يكون المستقيمان هـ ب ٩ هـ و أو المستقيمان هـ ا ٩ هـ ح اللذان يصلان هـ برأسين متقابلين من رؤوس المستطيل متعامدين (مركز الدائرة هو مركز المستطيل) .

فاننا فرضنا في شكل (١٨٣) أن ت_١ نقطة اتجاه ا ب ٩ و ح و وأن ت_٢ نقطة اتجاه ب ح ٩ و بحيث كان المستقيم ت_١ ت_٢ هو الافق ورسمنا الدائرة التى قطرها ت_١ ت_٢ (والتي هى المحل الهندسى للوقع [م] لمركز الاسقاط الذى يجعل آ ب ح و صورة لمستطيل) ثم وصلنا هـ ب ٩ هـ و ليقابلا الافق

في T_1 و T_2 ورسمنا الدائرة التي قطرها $T_1 T_2$ (والتي هي المحل الهندسي للموقع [2] الذي يجعل الزاوية المحصورة بين h_1 و h_2 قائمة) فإن [2] تكون في هذه الحالة إحدى نقطتي تقاطع هاتين الدائرتين وبنا تعين h_3 ع .

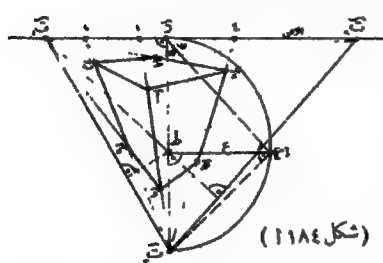
وإذا كان ϵ مستقيماً حيثما اتفق رسم موازياً للافق ليمثل أثر المستوى الاقصى المرسومة فيه الدائرة ويمثل في الوقت نفسه محور الانطباق الذى يدور حوله هذا المستوى عند تطبيقه على II فان [م] تكون في هذه الحالة مركزاً للاتلاف بين البائرة والمقطع المخروطى كما يكون ϵ محوراً لهذا الاتلاف المركزى ويكون الافق هو المستقيم المحدد المرسوم في مجموعة المقطع المخروطى مناظراً للمستقيم الذى في الالهاية باعتباره مرسوماً في مجموعة الدائرة وبنا يتعين الاتلاف المذكور . فإذ رسمت الدائرة التى تمر بالنقط المناظرة [ا] [ب] [ج] [د] [هـ] [و] [ز] في هذا الاتلاف فإتينا نكون قد وصلنا بهذه الطريقة الى رسم دائرة مؤلفة مركزياً مع مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط مختلفة ليس بينها نقط متتالية (راجع بند ٧٧) .

(٤) اذا علم أن المقلع المخروطي الذي تعيينه المماسات الخمسة

في مستوى الصورة هو صورة دائرة تمس المستقيمتان $\epsilon \gamma$ و $\delta \alpha$
 بحيث تكون الاربعة الاولى معيناً مرسوماً خارجياً فالمطلوب تعيين τ .

هذه المسألة مزاجية للمسألة السابقة (٣) ولحلها نوجه نظر القارئ الى النظرية الآتية : افارسمت دائرة تمس أضلاع معين ورمزنا لهذه الاضلاع بالرموز $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ فالشرط اللازم والكافي لان تمس الدائرة مستقيماً خامساً ϵ هو أن يكون المستقيمان α و β متعامدين حيث γ مركز الدائرة (ومركز المعين في الوقت نفسه) وحيث δ تقصّتا تقاطع ϵ مع ضلعين متقابلين (غير متجاورين) مثل α, γ أو β, δ من أضلاع المعين .

للمستقيمات ذوات الميل الاعظم في المستويات العمودية على هذا للمستقيم .
وتوضح صحة النظرية السابقة بالرجوع الى (بند ١٩١) لان كل ضلع من
أضلاع المثلث $T_1 T_2 T_3$ في شكل (١٨٤) هو خط اتجاه المستويات العمودية
على الاتجاه الذي يحده الرأس المقابلة لهذا الضلع في المثلث .
ويكون استخدام هذه النظرية عملياً بالطريقة الآتية :

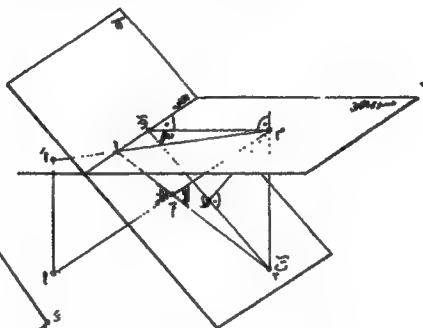


اذا كان $T_1 T_2 T_3$ و ...
(شكل ١٨٤) صورة
متوازي مستطيلات لا
يوجد بين أحرفه حرف
واحد مواز الى مستوى
الصورة المائل فالمطلوب
تعيين ط ع ورسم

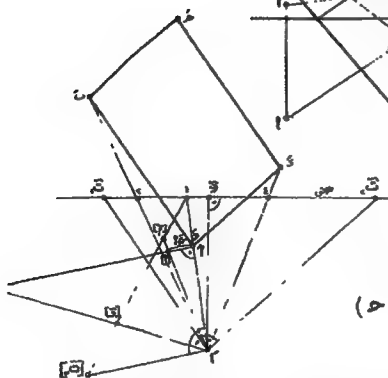
المسقط المرقوم لتوازي المستطيلات على المستوى الاقصى المار بمركز الاسقاط .
فالمستقيم $T_1 T_2$ يمثل في هذه الحالة الاقصى أى خط اتجاه المستوى الاقصى
المرسوم فيه المستطيل $ا ب ح د$ والنقطة T_3 هي نقطة اتجاه الاحرف الرأسية .
وتكون ط نقطة تلاقي الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث $T_1 T_2 T_3$ على الاضلاع
المقابلة كما تقدم فلذا رسم من ط عمود على $T_1 T_2$ ليقابل الدائرة المرسومة على
 $T_1 T_2$ كقطر — في النقطة [م] كان ط [م] = ع .

ورسم المسقط الاقصى لتوازي المستطيلات نفرض في شكل (١٨٤ ب)
أن ا إحدى نقط السطح فيكون مسقطها الاقصى ا' واقعاً على المسقط الاقصى
م ا' للشعاع ا م ا' ولكن م ا' يقابل $T_1 T_2$ كما يؤخذ من "شكل

في النقطة ١ الواقعة على الافق (خط الاتجاه للسويات اللاحقة) والتي تبعد عن \tilde{O} بعد يظهر في شكل (١٨٤ ا) بطوله الحقيقي لوقوعه في مستوى الصورة .
 فاذا فرضنا في شكل (١٨٤ ح) أن سطح الورقة يمثل مستوى الافق
 وسمنا مستقيماً ما يمثل الافق ثم أخذنا عليه نقطة ما \tilde{O} فإن النقطة ١ يمكن حينئذ
 تعيينها على الافق بقياس البعد $\tilde{O} ١$ في الاتجاه المين مساوياً لنظيره في شكل
 (١٨٤ ا) وبالمثل يمكن تعيين النقط الأخرى $\tilde{O} ٢, \tilde{O} ٣, \tilde{O} ٤, \tilde{O} ٥, \dots$



(شكل ١٨٤ ا)



(شكل ١٨٤ ح)

على الافق بقياس الابعاد المناظرة من شكل (١٨٤ ا) . وأخيراً نعين في شكل
 (١٨٤ ح) مركز الإسقاط م على العمود المقام من \tilde{O} على الافق وعلى بعد
 منه مساو الى $\tilde{O} [م]$ الذي يمكن قياسه من شكل (١٨٤ ا) .

فالذا وصل م ١ وأخذت عليه أية نقطة مثل أ' أمكن اعتبار هذه النقطة المسقط الاقصى للنقطة ١ حيث يحدد هذا الوضع الاختيارى مقياس الرسم للشكل كما تقدم فى (بند ١٩٩) . ومتى تم اختيار أ' يتحدد حيثئذ المسقط الاقصى لبقية النقط فالمستقيم المرسوم من أ' موازياً الى م تم يقابل المستقيم م ٤ فى المسقط الاقصى و' للنقطة و' وبالمثل يتلاقى المستقيم المرسوم من أ' موازياً الى م تم مع المستقيم م ٢ فى ب' .

ولتعيين رقم نقطة مثل أ' أى بعدها عن مستوى الاق طبق المستوى م تم أ' أ' كما يؤخذ من (شكل ١٨٤ ب) على مستوى الاق حول م أ' . فنقيس لذلك على العمود المقام من م على م أ' فى شكل (١٨٤ ح) البعد م [ت] مساوياً للبعد [م] تم فى شكل (١٨٤ ا) ثم نصل [ت] بالنقطة ا ونعين على هذا الواصل النقطة [آ] بحيث يكون البعد [ت] [آ] مساوياً للبعد تم آ الذى يظهر فى شكل (١٨٤ ا) بطوله الحقيقى لوقوعه فى مستوى الصورة ثم نصل م [آ] فيكون هذا الواصل موقع الشعاع م ا ويقابل لذلك العمود المقام من أ' على م أ' فى الموقع [ا] للنقطة ا وبذا يكون رقم ا مساوياً الى أ' [ا] . وبنفس الطريقة يمكن تعيين الرقم و' [و] للنقطة وء. ويكون ارتفاع متوازى المستطيلات على هذا مساوياً الى البعد [ا] [و] مع مراعاة مقياس الرسم .

الفصل الثالث

القواعد الهندسية

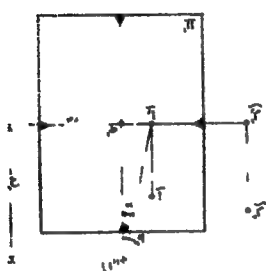
المساحة الفوتوغرامترية الأرضية

بـ ٢٠١ : امتقاط المسقط المرقوم من صورتين رأسيين

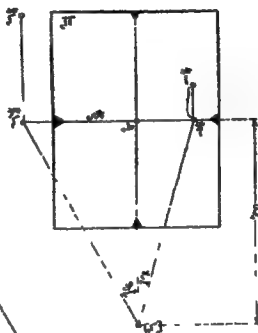
نفرض في شكل (١٨٥ ب) أن لوحى تصوير Π و Π' قد أمكن الحصول عليهما باستخدام فوتوثيودوليت عند التصوير من مكانين مختلفين \mathcal{M} و \mathcal{M}' فالعلامات المينة على اللوحتين تحدد في هذه الحالة النقطتين الرئيسيتين \mathcal{P} و \mathcal{P}' كما أن البعدين $\mathcal{P}\mathcal{M}$ و $\mathcal{P}'\mathcal{M}'$ يمكن قراءتها مباشرة من آلة التصوير في كل مرة وتمثيلهما كما هو مبين في الشكلين (بتطبيق مستوى الاق على كل من Π و Π') وبذا تتحدد عناصر الاستيضاح الداخلى. فإذا فرضنا أن \mathcal{A} و \mathcal{A}' صورتان لنقطة واحدة \mathcal{A} وكان الفوتوثيودوليت رأسياً عند تصوير هذه النقطة من \mathcal{M} ومن \mathcal{M}' وعلت عناصر الاستيضاح الخارجى وهى كما قمنا (بند ١٩٨) القاعدة أو البعد الاقوى بين \mathcal{M} و \mathcal{M}' والزويتان $\mathcal{P}\mathcal{M}$ و $\mathcal{P}'\mathcal{M}'$ المحصورتان بين القاعدة والشعاعين الرئيسيين $\mathcal{P}\mathcal{M}$ و $\mathcal{P}'\mathcal{M}'$ — فانه يراد تعيين المسقط المرقوم \mathcal{A} للنقطة \mathcal{A} على أى مستو اقوى مثل H .

لذلك نستخدم عناصر الاستيضاح الخارجى في رسم شكل جديد (١٨٥ ج) حيث يمثل سطح الورقة المستوى الاقوى H ونبين على هذا الشكل المساقط الاقمية \mathcal{M} و \mathcal{M}' و \mathcal{P} و \mathcal{P}' لمركزى الاسقاط ومحورى التصوير. فاذا كان \mathcal{M} و \mathcal{M}' مساوياً ع، وكان \mathcal{P} و \mathcal{P}' مساوياً ع، فان العمود المقام من \mathcal{P} على \mathcal{M} يمثل حيثند أثر لوحة التصوير Π على المستوى H وكذلك العمود المقام من \mathcal{P}' على \mathcal{M}' يمثل أثر اللوحة Π' .

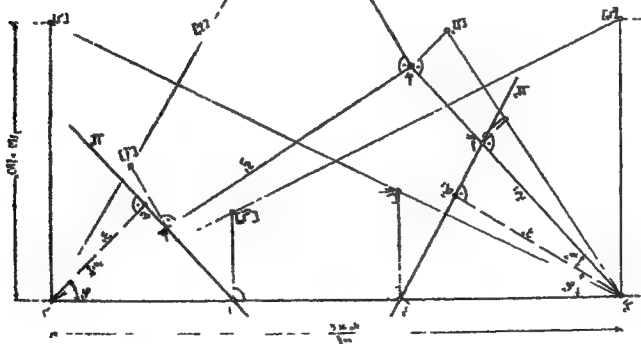
واذا قيس على أثر Π البعد π' مساوياً الى π فى (شكل ١٨٥ ا)
وقيس على أثر Π البعد π'' مساوياً الى π فى (شكل ١٨٥ ب) ثم
وصل π' π'' π''' فان هذين الواصلين يمثلان حيثئذ المسطقيين الاقبيين



(شكل ١٨٥ ا)



(شكل ١٨٥ ب)



(شكل ١٨٥ ج)

ويتقاطعان لذلك في المسقط الاقصى المطلوب α' للنقطة α ^(١).

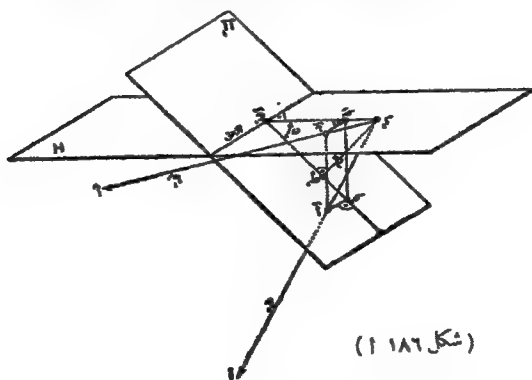
ويلاحظ أننا فرضنا مقياس الرسم للشكل ١٠٠/١ (وجعلنا لذلك البعد ٢' ٢' مساوياً إلى $\frac{\text{القاعدة}}{١٠٠}$) ومع ذلك فقيست الأبعاد ع' ط' آ' ع' ع' ط' ع' آ' من شكل (١٨٥ ب) ووضعت كما هي بدون تصغير في (شكل ١٨٥ ج) والسبب في ذلك هو أن المسقطين الاقبيين η' و η الشعاعين لا يتوقفان إلا على الزاويتين الاقبتين α' و α المحصورتين بين كل واحد من هذين المسقطين ومحور التصور المناظر له.

ولتعيين رقم α نطبق المستوى $\alpha, \alpha', \alpha''$ (راجع لذلك الشكل ١٨٣ ب) على مستوى الافق المار بالمركز α ، فقيم α من α' عموداً على α'' ، ونعين على هذا العمود النقطة α' بحيث يكون α' مساوياً الى α'' في شكل (١٨٥) ثم فصل α' فيكون الواصل هو الموقع α' ، للتضاعف α' ، ويقابل العمود المقام من α' على α'' في الموقع α' للنقطة α' ويكون α' مساوياً الى الفرق بين ارتفاعي α' عن H مقسوماً على ١٠٠، فإذا علم ارتفاع α' عن H (أي رقم α') تعين رقم النقطة α' وبفس الطريقة يمكن الحصول على α' الذي يساوي الفرق بين ارتفاعي α' عن H مقسوماً على ١٠٠. ولما كانت α' في هذه الحالة أوطى من α' بما مقداره $\alpha' \times 100$ وأعلامن α' بما مقداره $\alpha' \times 100$ لذا كان الفرق بين ارتفاعي α' ومنسوى α' هو $\alpha' \times 100 + \alpha' \times 100$.

(١) لار آ ٩٠ في شكل (١٨٥) ٩٠ ب) يتلاق المسطين الاقطين
المطوريين للقطعة ١ على مستويي الاق المارين بالمركزين ٩٠ م على التوالي
(راجع بند ١٩٩ وشكل ١٨٣ ب).

ولذا كان البعد $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$ المقيس على الافق فى شكل (١ ١٨٥) مساوياً الى $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2'$ فى شكل (١٨٥ ح) وكان البعد $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2'$ (العمودى على الافق) فى الشكل الاول مساوياً الى البعد $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$ [فى الشكل الثانى (وهذا البعد الاخير يمكن الحصول عليه من شكل ١٨٥ ح بتطبيق المستوى المسقط أقياً للشعاع $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$ على مستوى الافق المار بالمركز \mathcal{M} ويكون ذلك يجعل $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2'$ [مساوياً الى الفرق بين منسوبى $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$) كانت $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$ صورة \mathcal{M}_1 على اللوحة II فى (شكل ١ ١٨٥) أو النقطة الاساسية فى هذه اللوحة . وبنفس الطريقة يمكن تعيين الصورة \mathcal{M}_2 للمركز \mathcal{M} على اللوحة II فى (شكل ١٨٥ ب) .

بشر ٢٠٢ : استقاط المسقط المرقوم من صورتين مائتين

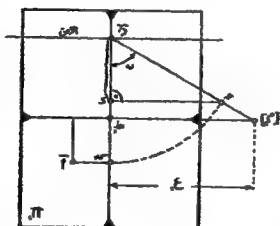


(شكل ١ ١٨٦)

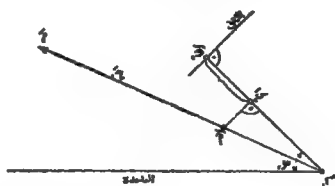
يبين شكل (١ ١٨٦) الحـل الفراغى للحصول على المسقط الافقى \mathcal{M}_1 للشعاع $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \equiv \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2'$ المار بنقطة مائتين . اذا كانت هذه النقطة قد صورت بآلة مائلة من المركز \mathcal{M} وعلمت فوق عناصر الاستيضاحين الداخلى والخارجى

الزاوية ω التي تميل بها لوحة التصوير Π على مستوى الاسقاط H (مستوى الافق المار بالمركز $م$) .

فالمستوى المار بالمركز $م$ عمودياً على الافق (خط تقاطع Π و H) يقطع H و Π في المستقيمين $م$ و $م'$ ، اللذين يحصران بينها الزاوية المعلومة ω ويمكن حينئذ تعيين البعد $م$ و $م'$ بمعلومية $ط$ و $ع$ و ω (وبملاحظة أن $م$ و $م'$ هو المسقط الافقي لمحور التصوير $م$ و $ط$) . فإذا كانت $آ$ صورة النقطة $ا$ وأزل منها العمود $آ$ على $ط$ و $م'$ فقابله في $س$ وكانت النقطتان $آ$ و $س$ المسطتين الاقسين للنقطتين $آ$ و $س$ فن الواضح أن $ا$ يكون حينئذ المستقيم الذي يصل $م$ و $آ$ فالحصول على $آ$ نلاحظ أن $س$ تقع على $م$ و $م'$ بحيث يكون البعد $م$ و $س$ مساوياً ($م$ و $س$ جتا ω) وهو بعد يمكن تحديده من الصورة كما أن $س$ و $آ$ عمودى على $م$ و $م'$ ويساوى $س$ و $آ$ الذي يمكن أيضاً قياسه مباشرة من الصورة .



(ب)



(ج)

(شكل ١٨٦)

والمثلث $[م]$ ، $ط$ ، $م'$ في شكل (١٨٦ ب) يمثل عملية تطبيق المستوى $م$ ، $ط$ ، $م'$ على لوحة التصوير Π وبذا يتحدد الافق على هذا اللوحة وكذا النقطة $م'$

الباب الثاني عشر

الخرائط الجغرافية

الفصل الاول

كلمة عامة

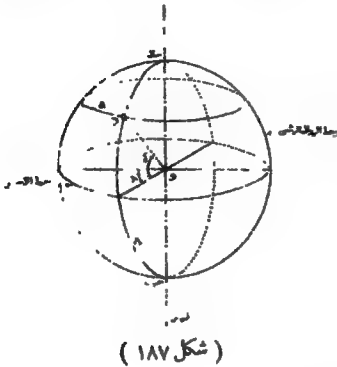
نمبر ٢٠٣ : تعاريف

معلوم أن الخرائط الجغرافية هي أشكال مستوية الغرض منها تمثيل سطح الارض (باعتباره كرة على وجه التقريب) بحيث توجد بين نقط السطح وبين نقط الخريطة مناظرة الفرد للفرد أى بحيث تحدد أية نقطة على الخريطة مكاناً واحداً على سطح الكرة الارضية وبالعكس ويكون التمثيل بواسطة رسم خطوط منحنية أو مستقيمة على الخريطة تمثل خطوط الطول والعرض .

ومعلوم أيضاً أن خطوط الطول هي (أنصاف) الدوائر العظمى الواقعة في مستويات الزوال المختلفة وهي للمستويات الثلاثة بمحور الكرة الارضية الذى يصل القطبين الشمالى والجنوبى . أما خطوط العرض فهي الدوائر الواقعة في المستويات العمودية على المحور المذكور وخط الاستواء هو خط العرض المار بمركز الكرة . ويتخذ عادة أحد خطوط الطول مبدأ لقياس زاوية الطول ويسمى في هذه الحالة بخط الطول الرئيسى أو خط الزوال الرئيسى .

فإذا كان φ (شكل ١٨٧) مكاناً ما على الكرة الارضية فالزاوية λ التى يصنعها خط الطول Λ المار بهذا المكان مع خط الطول الرئيسى تسمى بطول الملامه . فإذا كانت الزاوية λ مقيسة من الغرب للشرق قيل إن طول المكان φ

هو δ شرقاً وإذا كانت مقيسة من الشرق للغرب قيل إنه δ غرباً ^(١) . ويطلق على الزاوية δ التي يميل بها نصف القطر و ϕ (حيث و مركز الكرة) على مستوى خط الاستواء اسم عرض الملامه ويقاس العرض إما شمال خط الاستواء أو جنوبه فإذا علمت الزاوية δ وعلم اتجاه العرض (شمالاً أو جنوباً) تحدد خط العرض Δ المار بالمكان ϕ .



بـ ٢٠٤ : أنواع الخرائط الجغرافية

تمثيل سطح الكرة الأرضية توجد طرق مختلفة وأسهل هذه الطرق هي الإسقاط . فإذا أسقطت الكرة إسقاطاً عمودياً على مستوى خط الاستواء حصلنا على عدة دوائر (متحدة المركز مع الدائرة العظمى التي تمثل خط الاستواء) تمثل خطوط العرض وتكون أقطار هذه الدوائر ممثلة لخطوط الطول المختلفة وإذا كان إسقاط الكرة عمودياً على أحد مستويات الزوال فإن هذا المستوى يقطع حيثئذ الكرة في دائرة عظمى (تمثل خط الزوال) يكون محور الكرة الأرضية قسراً فيها هو

(١) وفي بعض الأحيان يقاس δ في اتجاه ثابت دائماً هو الاتجاه من الغرب للشرق وفي هذه الحالة تكون δ أقل من 180° إذا كان خط طول المكان واقعاً شرق خط الزوال الرئيسي وأكبر من 180° إذا كان خط طول المكان واقعاً غرب خط طول الرئيسي أي أن خط الطول 30° غرباً يكون بهذه الطريقة $360 - 30 = 330^\circ$.

القطر سم ح الذي يصل القطبين الشمالى والجنوبى كما تكون مساطط خطوط العرض فى هذه الحالة هى الاوتار المختلفة العمودية على سم ح ومساطط خطوط الطول قطاعات ناقصة متحدة فى القطر سم ح كحور أكبر لها جميعاً وتسمى الخرائط التى يمكن الحصول عليها فى الحالتين السابقتين بالخرائط الاستوائية . واذا أسقطت الكرة إسقاطاً مركزياً من مركز الكرة نفسه على أحد المستويات المماسه كستو للصورة حصلنا على ما يسمى بالخرائط الجيومترية (حيث تظهر خطوط الطول كستقيات وخطوط العرض كقاطع مخروطية على وجه العموم) . كذلك يمكن الحصول على خرائط جغرافية ذات خواص هامة بواسطة ما يسمى بالإسقاط الاستوئوغرافى (الفصل الثانى) .

وكثيراً ما يستخدم الانسان لتمثيل الكرة سطحاً أسطوانياً أو مخروطياً يمكن بسطه على المستوى الذى يراد رسم الخريطة عليه وذلك بالطريقة الآتية : اذا فرضنا أسطوانة دورانية تمس الكرة فى خط الاستواء فن السهل أن يرى أن مستويات الزوال المختلفة تتقاطع حيثئذ مع هذه الاسطوانة فى رواسم يمكن اعتبارها مناظرة لخطوط الطول كما أن مستويات خطوط العرض تتقاطع معها فى دوائر يمكن اعتبارها مناظرة لهذه الخطوط فاذا بسطت الاسطوانة على المستوى حصلنا على مجموعتين من المستقيمات المتعامدة فى الخريطة تمثل إحداهما خطوط الطول وتمثل الاخرى خطوط العرض . كذلك يمكن تمثيل الكرة باستخدام مخروط دورانى (بدلا من الاسطوانة) يمس الكرة فى إحدى دوائر العرض .

ولما كانت الكرة سطحاً غير قابل للاستواء وكان من المستحيل لذلك الحصول على صورة أو خريطة بحيث تكون مطابقة تماماً للكرة أى بحيث تكون المساحات والزوايا على سطح الكرة مثلثمة على حقيقتها فى الخريطة ويمكن قياسها أو قراءتها من هذه الخريطة مباشرة — فالخرائط الجغرافية يمكن لهذا السبب تقسيمها على وجه العموم الى قسمين رئيسيين : —

(١) قسم يسمح بقياس المساحات وحدها على حقيقتها فخرائط هذا القسم تكون صادقة في التعبير عن المساحات أما الزوايا فلا . مثال ذلك الخريطة المعروفة باسم خريطة لومبير وهي خريطة يمكن الحصول عليها كما يلي : لنفرض أن Δ خط عرض المكان Δ على سطح الكرة الأرضية وأن سم هو القطب الشمال فانارتسمت في الخريطة دائرة Δ مركزها النقطة سم' (التي تمثل سم) ونصف قطرها مساو الى البعد سم Δ واعتبرنا هذه الدائرة ممثلة لخط العرض Δ . فانه يمكن البرهنة بسهولة على أن مساحة الدائرة Δ تكون مساوية لمساحة الطاقة الكروية المحصورة بين القطب الشمال سم و بين خط العرض Δ .

(ب) وقسم يسمح بقياس الزوايا وحدها على حقيقتها فلخرائط في هذه الحالة تكون صادقة في التعبير عن هذه الزوايا أما المساحات فلا . ومن الامثلة على هذا النوع الخرائط الاستريوغرافية التي سنشرحها في الفصل التالي والخريطة المعروفة باسم خريطة مرفانور وهي خريطة يمكن الحصول عليها باستخدام أسطوانة دورانية تمس الكرة في خط الاستواء ثم بسط هذه الاسطوانة على المستوى كما تقدم مع ملاحظة أن تكون الابعاد بين المستقيمت الممثلة لدوائر العرض في هذه الحالة هي بحيث تبقى الزوايا محفوظة على الخريطة .

الفصل الثانى

الخرائط الاسترغرافية

بند ٢٠٥ : تعريف

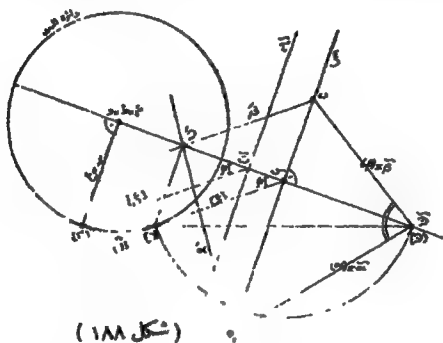
الانقاط الاسترغرافية لكرة مركزها O ، هو انقاط مركزى من أية نقطة على سطح الكرة مثل M ، على مستر عمودى على المستقيم OM .
ويؤخذ عادة مستوى الصورة II ماراً بمركز الكرة وهو ما استغترضه فيما يلى .
فلذا كانت الكرة تمثل الكرة الارضية فان الخرائط التى يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة تسمى بالخرائط الاسترغرافية .

بند ٢٠٦ : خواص الانقاط الاسترغرافية

اذا فرضنا فى (شكل ١٨٨) أن الدائرة الميئة هى الدائرة العظمى التى يقطعها II من الكرة والتى تعرف باسم الدائرة الرئيسية للخریطة فن الواضح أن هذه الدائرة تمثل فى هذه الحالة دائرة البعد كما أن مركزها الذى هو فى نفس الوقت مركز الكرة هو النقطة الرئيسية ط (بند ١٧٧) .

ولتكن M' المسقط العمودى على II لنقطة مثل M على سطح الكرة يراد تعيين مسقطها الاسترغرافى M'' أى نقطة تقابل الشعاع OM' المار بها مع II فتعتبر لذلك المستوى العمودى OM' ونطبقه على II حول M' M'' فهذا المستوى يقطع الكرة فى دائرة عظمى يمكن اعتبار الدائرة الرئيسية موقعاً لها بعد تطبيق المستوى وبذا تقع M'' على هذه الدائرة وتتقاطع حيثئذ المستقيمان OM'' OM' فى المسقط الاسترغرافى المطلوب M'' للنقطة M .
واذا كان N المماس لدائرة البعد فى M'' وتقابل مع M' فى S ثم رسم

من S المستقيم E عمودياً على M' فمن الواضح أن E يكون أثر المستوى N المماس للكرة في E على II كما أن الزاوية ϕ المصورة بين $[E]$ وبين M' \vec{E} هي في هذه الحالة زاوية ميل المستقيمت ذوات الميل الاعظم في المستوى N أى زاوية ميل هذا المستوى نفسه على II . ويمكن الحصول على خط الاتجاه \vec{E} للمستوى N بتعيين نقطة الاتجاه \vec{E} للمستقيم \vec{E} كما هو مبين بالشكل .



ونضح بسهولة من تشابه المثلثين $[L] [E] [M']$ S $[E] [E]$ (حيث $[L] [M]$ هو مماس دائرة البعد في $[M']$) ومن تساوى الضلعين $[L] [M'] [L]$ $[E]$ في المثلث الاول أن S \vec{E} يساوى S $[E]$ أى يساوى وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه \vec{E} S وضلعه الآخر ارتفاع \vec{E} عن II ومعنى هذا أن الموقع (E) للنقطة \vec{E} (وهو الموقع الذى يمكن الحصول عليه بتطبيق المستوى N على II) ينطبق في هذه الحالة على مسقطها الاستريوغرافى \vec{E} أى أن $(E) \equiv \vec{E}$ وهذه النتيجة يمكن وضعها على الصورة الآتية :

المسقط الاستريوغرافي لتقطعة من σ على سطح الكرة يمكن الحصول عليه بتطبيق المستوى N المماس للكرة في هذه النقطة على مستوى الصورة II .
وينتج من هذه النظرية مباشرة الخاصيتان الشهيرتان الآتيتان للاسقاط الاستريوغرافي وهما :

الخاصية الاولى : الزاوية المحصورة بين أى منحنين مرسومين على سطح الكرة لا تتغير بالاسقاط الاستريوغرافي أى أنه مثل هذه الزاوية يمكن قياسها مباشرة من الخريطة الاستريوغرافية الممتدة للكرة .

الخاصية الثانية : المسقط الاستريوغرافي لايه دائرة مرسومة على سطح الكرة هو قسم دائرة على وجه العموم ^(١) .

لانه اذا فرض في (شكل ١٨٨) أن α و β هما المسقطان العموديان على II لمستقيمين α و β مارين بالنقطة σ وواقعين في المستوى N (ويمسنان لذلك الكرة في σ) فان المسقطين الاستريوغرافيين $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ لهذين المستقيمين ينطبقان بمقتضى النظرية السابقة على موقعيهما (α) و (β) اللذين يمكن الحصول عليهما بتطبيق N على II فالزاوية المحصورة بين $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ هي إذن المقدار الحقيقي للزاوية المحصورة بين المماسين α و β نفسيهما وهي الزاوية المحصورة بين أى منحنين مرسومين على سطح الكرة ويمسنان α و β في σ أى أن الخاصية الاولى صحيحة .

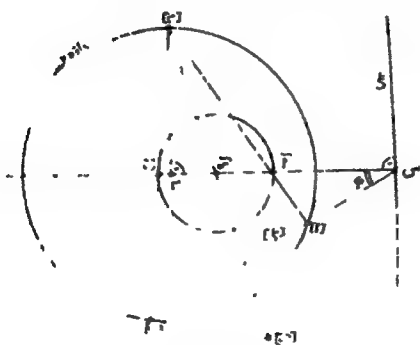
واذا رمزنا الى رأس المخروط الدوراني الذى يمر الكرة في دائرة ما مرسومة على سطحها (وغير مارة بمركز الاسقاط m) بالرمز m أو بعبارة أخرى اذا

(١) اذا مر مستوى الدائرة بمركز الاسقاط فن الواضح أن المسقط الاستريوغرافي للدائرة يكون في هذه الحالة خطاً مستقيماً هو أثر المستوى على II .

كانت مركزاً مستوي الدائرة بالنسبة الى الكرة فمن حيث إن رؤس المخروط هي مستقيمت متعامدة مع دائرة التماس في جميع نقاطها لذا كان المسقط الاستريوغرافي للدائرة بناء على الخاصية الاولى منحنيّاً متعامداً مع المساط الاستريوغرافي للرؤس في نقط التقاطع ولما كانت هذه المساط الاخيرة تؤلف حزمة من المستقيمت رؤسها المسقط الاستريوغرافي مركزاً للنقطة مركزاً واجب أن يكون المنحنى المذكور أى المسقط الاستريوغرافي للدائرة دائرة مركزها مركز النقطة وثبت صحة الخاصية الثانية .

بشر ٢٠٧ : رسم المسقط الاستريوغرافي لدائرة على سطح الكرة

اذا علمت دائرة على سطح الكرة بواسطة الاثر في المستوى Σ المرسومة فيه والزواية φ التي يميل بها هذا المستوى على Π (أو بواسطة الاثر Σ وخط الاتجاه Σ للمستوى Σ) فالمطلوب رسم المسقط الاستريوغرافي لهذه الدائرة .



(شكل ١٨٩)

لذلك نسط من
م' صوداً على Σ ليقابله
في Σ (شكل ١٨٩)
فيكون هذا العمود
أثر مستوي P يمر
بمركز الاسقاط Σ
عمودياً على كل من
 Σ و Π ويقطع الكرة
في دائرة عظمى Σ كما
يقطع Σ في المستقيم Σ

في الميل الاعظم . فلذا رمزنا الى رأس المخروط الدوراني من قبل Σ في

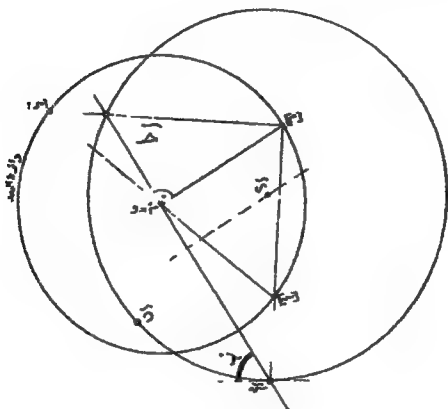
الدائرة المعلومة بالرمز σ (قطب Σ بالنسبة للكرة) فإن σ تكون واقعة في المستوى P الذي يقطع لذلك المخروط المذكور في براسمين σ و σ ب. وتطبيق P على Π تنطبق للدائرة العظمى σ على دائرة البعد ويكون الموقع $[i]$ للسقيم في الميل الاعظم σ هو المستقيم المرسوم من σ صانعاً مع أثر P الزاوية المعلومة φ كما يكون الموقع $[m]$ لمركز الاسقاط m هو نقطة تقاطع دائرة البعد مع العمود المقام من m' على أثر P . فاذا تقاطع $[i]$ مع دائرة البعد في النقطتين $[i]$ و $[b]$ ورسم منهما المماسان $[m]$ و $[i]$ و $[m]$ و $[b]$ للذان يتقابلان في الموقع $[m]$ لرأس المخروط ووصلت المستقيمتين $[m]$ و $[i]$ و $[m]$ و $[b]$ و $[i]$ و $[m]$ و $[b]$ لتقطع أثر P في σ و σ على التوالي ثم رسمت الدائرة التي مركزها σ وتمر بالنقطتين σ و σ كانت هذه الدائرة المسقط الاستريوغرافي المطلوب للدائرة المعلومة.

وبالعكس اذا علم المسقط الاستريوغرافي لدائرة على سطح الكرة أمكن تعيين الارتفاع للمستوى Σ المرسومة فيه هذه الدائرة وكذا الزاوية φ التي يميل بها هذا المستوى على Π ويمكن اعتبار شكل ١٨٩ نفسه موضحاً لهذه العملية العكسية اذا عكسنا خطوات الحل المشروحة آنفاً.

وبلاحظ أننا فرضنا في (شكل ١٨٩) أن الدائرة المعلومة مرسومة على نصف الكرة الموجود في الجهة المقابلة الى m بالنسبة الى Π ولهذا السبب رسمنا $[i]$ في الجهة المقابلة الى $[m]$ بالنسبة الى أثر المستوى P وفي حالة وقوع m مع الدائرة على نصف واحد من الكرة يجب أن تكون النقط $[m]$ و $[i]$ و $[b]$ واقعة على نصف واحد من دائرة البعد بالنسبة الى P وفي هذه الحالة يقع المسقط الاستريوغرافي للدائرة المعلومة خارج المساحة المحدودة بدائرة البعد. ومعنى هذا كما هو واضح أنه اذا علم المستوى Σ بأثره i وبالزاوية φ وجب لكي تتحدد الدائرة أن يعلم أيضاً اتجاه المستوى بالنسبة لمركز الاسقاط.

نمبر ٢٠٨ : مثال

إذا علم في (شكل ١٩٠) المسقطان الاستريو غرافيان سمة م و سمة ن نقطتين
سمة م على سطح الكرة فالمطلوب رسم المسقط الاستريو غرافي للدائرة العظمى
التي تمر بهاتين النقطتين .



(شكل ١٩٠)

لذلك نبحت عن المسقط الاستريو غرافي ح ل نقطة تقاطع القطر سمة و
(أو و) مع الكرة حيث و مركز الكرة فنصل سمة م' فيكون هذا الواصل
أثر المستوى م' م' سمة ح العمودى على مستوى الصورة II ثم نطبق هذا المستوى
على II حول م' سمة . فلذا وصل [م'] سمة ليقطع دائرة البعد (التي تمثل في نفس
الوقت موقع الدائرة العظمى التي يقطعها المستوى م' سمة ح من الكرة) في
النقطة [سمة] ووصل [سمة] م' ليقطع الدائرة نفسها في النقطة [ح] كانت هذه النقطة

موقع α ويتقاطع حيثما المستقيمان $[M]$ و $[H]$ α سم في المسقط الاستريوغرافي α للقطعة α . وتكون البائرة المارة بالنقط الثلاث سم α سم α سم هي المسقط الاستريوغرافي المطلوب للبائرة العظمى .

بند ٢٠٩ : تحميم الخرائط الاستريوغرافية

إذا فرضنا في المثال السابق (بند ٢٠٨) أن سم القطب الشمالى للكرة الارضية فان α تكون القطب الجنوبي وفي هذه الحالة تكون البائرة سم سم سم المسقط الاستريوغرافي لخط الطول المار بالمكان α والذي يصنع مع خط الطول سم سم α المار بالنقطة م زاوية تظهر في الشكل على حقيقتها ومقدارها 90° . فاذا اتخذنا خط طول المار بالنقطة م مبدأ لقياس زاوية الطول (أى خط الطول الرئيسى) أمكن رسم أى خط من خطوط الطول بمجرد معرفة الزاوية α التى يصنعها مع خط الطول الرئيسى وذلك بالكيفية المبينة بالشكل للدوائر التى تمر جميعاً بالنقطتين سم سم α تمثل في هذه الحالة خطوط الطول المختلفة على الكرة الارضية . أما خطوط العرض فيمكن الحصول عليها بتطبيق المستوى α سم سم α على II كما تقدم حيث تظهر هذه الخطوط في الموقع كأوتار عمودية على القطر [سم] $[H]$ وتتألف مساقطها حيث نمن الدوائر المختلفة التى تقع مراكزها جميعاً على سم سم α والمتعامدة مع الدوائر الممثلة لخطوط الطول في نقط التقاطع . وهكذا يمكن الحصول على شكل يمثل خريطة استريوغرافية للكرة الارضية مرسومة من مركز الاسقاط م .

غير أن مثل هذه الخرائط التى تكون فيها م نقطة حيثما اتفق على سطح الكرة الارضية قليلة الاستعمال فقد جرت العادة بان تؤخذ م :

(١١) — إما منطبقه على أحد القطبين الشمالى والجنوبى وفي هذه الحالة يكون مستوى الصورة هو مستوى خط الاستواء نفسه وتسمى الخريطة حيثئذ بالخريطة القطبية .

نمبر ۲۱۰: الخريطة القطبية

قطعة . انك تختار

للاسقاط ونرسم من

م' المستقيم Δ صانعا

مع خط الزوال الرئيسى

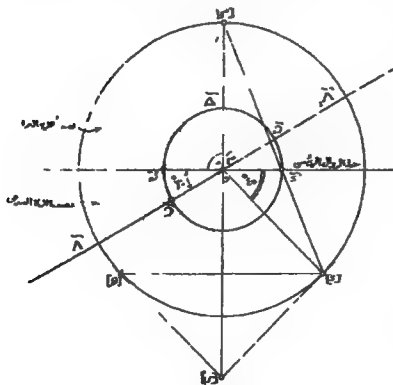
زاویه تساوی ۳۰°

شرقاً فيكون Δ

المسقط الاستريوغرافي

خط الطول المار

بالمكانه.



(شکل ۱۹۱)

ولتعيين المسقط الاستريوغرافي Δ لخط العرض 45° جنوباً نطبق مستوى

الزوال الرئيسى على II فترسم لذلك المستقيمين 'م' [ء] 'م' [هـ] اللذين يميل كل منهما على خط الزوال الرئيسى بزاوية قدرها ٥٤° ليقابلا الدائرة الرئيسة فى [ء] [هـ] ثم فصل [م] [م] [ء] [هـ] فإذا قابل هذان الواصلان خط الزوال الرئيسى فى \sim كان $\tilde{\Delta}$ هو الدائرة المرسومة على \sim و \sim . وإذا تقاطع $\tilde{\Delta}$ و \sim فى النقطة $\tilde{\Delta}$ كانت هى المسقط الاستريوغرافى المطلوب للمكان $\tilde{\Delta}$ ^(١) .

ويستطيع القارىء أن يستنتج بسهولة من (شكل ١٩١) العملية العكسية للحصول على طول وعرض أى مكان على الكرة الارضية اذا علم مسقطه الاستريوغرافى على خريطة قطبية .

بند ٢١١ : الخريطة الاستوائية

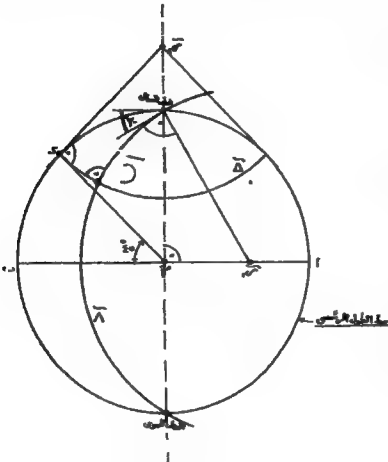
تؤلف خطوط الطول والعرض على هذه الخريطة بمجموعتين من الدوائر المتعامدة فى نقط التقاطع فدوائر المجموعة الاولى تشترك فى محور الكرة الارضية الواقع فى مستوى الصورة كمحور رئيسى لها جميعاً أما دوائر المجموعة الثانية فتقع مراكزها على هذا المحور ^(٢) .

ولنفرض الآن (شكل ١٩٢) أن المطلوب تعيين المسقط الاستريوغرافى $\tilde{\Delta}$ لمكان مثل $\tilde{\Delta}$ على الكرة الارضية طوله ٣٠° شرقاً وعرضه ٤٥° شمالاً على خريطة استوائية .

(١) نصف القطر $\tilde{\Delta}$ المرسوم فى الشكل بخطوط متقطعة هو المسقط الاستريوغرافى لخط الطول ١٥٠° غرباً والنقطة $\tilde{\Delta}$ تمثل فى هذه الحالة المكان $\tilde{\Delta}$ الذى طوله ١٥٠° غرباً وعرضه ٤٥° جنوباً .

(٢) إذ من الواضح أن قطب أى مستو من مستويات خطوط العرض بالنسبة للكرة يقع على محور الكرة الارضية .

لذلك نفرض أن مستوى الصورة هو مستوى خط الطول الرئيسي فتكون الدائرة التي تمر بالقطبين الشمالي والجنوبي بحيث تصنع مع الدائرة الرئيسية زاوية مقدارها 30° شرقاً (وهي الدائرة



(شكل ١٩٢)

التي يقع مركزها $م$ على $ا ب$) هي المسقط الاستريوغرافي $\tilde{\Delta}$ لخط الطول المار بالمكان $م$ كما تكون الدائرة المتعامدة مع الدائرة الرئيسية عند النقطة $س$ (حيث $م$) هو المستقيم الذي يصنع مع $ا ب$ زاوية مقدارها 30° شمالاً) والتي يقع مركزها $م$ على محور الكرة هي المسقط

الاستريوغرافي $\tilde{\Delta}$ لخط العرض المار بهذا المكان. فإذا تقاطع $\tilde{\Delta}$ و $\tilde{\Delta}'$ في النقطة $م$ كانت هذه النقطة المسقط الاستريوغرافي المطلوب للمكان. وإذا علم بالعكس المسقط الاستريوغرافي $\tilde{\Delta}$ على خريطة استوائية لمكان مثل $م$ فإنه يمكن بسهولة تعيين طول المكان $م$ وعرضه وذلك بواسطة رسم الدائرتين $\tilde{\Delta}$ و $\tilde{\Delta}'$ السالفتي الذكر والمتعامدين في $م$.

تمارين عامة

الاتلاف المتوازي وطريقة مونج للاستعانة

- ١ - اذا علم محور الاتلاف واتجاهه وعلبت نقطتان ١، ٢ بالمطلوب تعيين نقطتين ١، ٢، مناظرتين لهما بحيث يكون البعد ١، ٢ مساوياً طولاً معلوماً .
- ٢ - اذا علم محور الاتلاف ومتوازي أضلاع بالمطلوب رسم شكل مؤتلف معه اثلاً متوازيّاً بحيث يكون هذا الشكل : (١) متوازي أضلاع فيه القطران يساويان طولين معلومين (ب) مربعاً (ح) معيناً مساحته مساوية لمساحة متوازي الاضلاع المعلوم . (د) مستطيلاً مساحته مساوية لمساحة متوازي الاضلاع المعلوم .
- ٣ - اذا علم محور الاتلاف ومثلث ١، ٢، ٣ وكانت د نقطة داخله بالمطلوب رسم المثلث ١، ٢، ٣ المؤتلف معه بحيث تكون د (المنظرة الى د) : (١) مركز الدائرة الخارجة (ب) مركز الدائرة الداخلة (ح) ملتقى الارتفاعات .
- ٤ - اذا علم قطران متقاطعان من قطع ناقص وعلم مستقيم حيثما اتفوق كمحور للاتلاف بالمطلوب رسم دائرة مؤتلفة مع القطع الناقص ثم استخدام الاتلاف في رسم هذا المنحنى .
- ٥ - المطلوب تعيين تقاطع مستقيم مع قطع ناقص اذا كان هذا المنحنى معلوماً : (١) بالمحور الاكبر وإحدى نقطه (ب) بأحد أقطاره واتجاه القطر المرافق له وإحدى نقطه .
- ٦ - المسقط الاقصى لقطع ناقص هو دائرة معلومة والمطلوب رسم مسقطه الرأسى اذا كان هذا المسقط مساوياً في المساحة لمساحة الدائرة وعلم المسقطان الاقصى والرأسى لاحد أقطار القطع الناقص .
- ٧ - اذا كان المسقط الاقصى لمربع هو مستطيل معلوم وعلم المسقط الرأسى لمركزه فأوجد المسقط الرأسى للمربع .
- ٨ - اذا علم المسقط الاقصى لمستقيمين متقاطعين ولاحد منصفى الزاوية المحصورة بينهما وعلم أيضاً أثراً المستقيمين على أحد المستويات الاقعية بالمطلوب رسم المسقطين الرأسيين للمستقيمين .

٩ - إذا علم قطران مترافقان من المسقط الاقصى للدائرة وعلم أيضاً المسقط الرأسى لمركزها فالخطوب رسم مسقطى الدائرة وتعين شكلها الحقيقى .

١٠ - 'ا' 'ب' 'ح' 'و' المسقط الاقنى لمربع أو جدمسقط الرأسى اذا علت 'ا'.

١١ - 'ب' ح' المسقط الاقصى للمثلث أوجد مسقطه الرأسى اذا علم المسقطان الاقصى والرأسى لنقطه تلاقى الارتفاعات فى هذا المثلث .

١٢ - أوجد المسقط الرأسى المستقيم اذا علمت مسقطه الاقصى وعلت أن المستقيم يوازي مستويًا معلومًا ويعد عنه يبعد معلوم.

١٣ - $\beta \alpha$ مستقيمان متوازيان α ح نقطة خارج مستويهما والمطلوب تعيين النقطة α على α والنقطة β على β بحيث يكون $\alpha \beta$ قاعدة ذات طول معلوم مثلث متساوي الساقين رأسه في ح .

١٤ — المطلوب رسم المسقطين الرأسين لمستقيمين غير متقاطعين إذا علم مسقطاهما الاقبيان وعلم (في المسقطين) العمود المشترك لهما .

١٥ - المطلوب رسم مسقطي مثلث اذا علم أحد أضلاعه (في المسقطين)
وعلم المسقط الاخرى لمركز النائرة المارة برؤوسه .

١٦ - ١٧ ح مثلث معلوم منه (١٩' ١") ٩ (٩' ٩") حيث ه مركز
النارة المرسومة داخله والمطلوب رسم مسقطي المثلث اذا علم اتجاهها المسقطين
الاقصين للضلعين ا ب ٩ ح.

١٧ - معلوم نقطتان A و B وكذلك مستقيمان غير متقاطعين l و m والمطلوب تعيين مستقيم s يوازي l ويقطع m بحيث يكون متساوي البعد عن A و B .

١٨ - المطلوب تعيين نقطة في مستو معلوم بحيث تبعد عن ثلاثة مستقيمت متوازية معلومة ما بعد متساوية.

١٩ - $\gamma \beta \alpha$ ثلاثة مستقيمت الاولان منها متوازيان والمطلوب تعيين
مستقيم μ متساوى البعد عن المستقيمت الثلاثة اذا كان μ : (أ) موازياً الى α
أو (ب) موازياً الى γ .

- ٢٠ — المطلوب تعيين مستقيم يكون على أبعاد متساوية عن ثلاثة مستقيبات معلومة غير متقاطعة ومتساوى الميل على هذه المستقيبات .
- ٢١ — المطلوب رسم عمود على مستو معلوم بحيث يلاقى مستقيماً معلوماً ويبعد عن مستقيم آخر يبعد معلوم .
- ٢٢ — إذا علم المركز ومحاس لقطع ناقص مسقطه الرأسى دائرة فالمطلوب رسم المسقط الاقصى للقطع الناقص والظل الذى يلقيه هذا المنحنى على مستو أفقى وآخر رأسى (اتجاه الاضاءة معلوم) .
- ٢٣ — اذا كان θ و ϕ "المسطين الاقصى والرأسى لمركز دائرة نصف قطر h وعلم خط تقاطع مستويهما مع مستو أفقى Φ فالمطلوب تعيين اتجاه الاضاءة التى يترتب عليها أن يكون الظل الذى تلقيه الدائره على Φ منحنياً مساحته تساوى ضعف مساحة الدائره ويس مستقيماً معلوماً واقعاً فى Φ ثم رسم هذا الظل .
- ٢٤ — ارسم الظل الذى يلقيه مثلث على مستو معلوم وبين أن المسقط الاقصى للمثلث مؤلف اثلاًفاً متوازياً مع المسقط الاقصى للظل مع تحديد محور الالتلاف وطريقة الحصول عليه .
- ٢٥ — المطلوب تعيين المستوى الذى يمر بمستقيم معلوم ويقطع منشوراً قائماً (قاعدة واقعة فى مستو أفقى) فى شكل مساحته تساوى $\frac{2}{3}$ مساحة القاعدة .
- ٢٦ — المطلوب تمثيل أسطوانة دورانية اذا علم أحد رواسمها وعلم أيضاً :
(١) مماسان لها أو (ب) مماس ونقطة على سطحها .
- ٢٧ — α و β مستقيمان متوازيان والمطلوب تعيين نقطة على مستقيم مثل γ (خارج المستوى) بحيث تكون النسبة بين بعدها عن α و β مساوية الى $3:5$.
- ٢٨ — المطلوب تعيين نقطة فى مستو معلوم بحيث تكون النسبة بين أبعادها عن ثلاثة مستقيبات متوازية كالنسبة بين $5:2:3$.
- ٢٩ — المطلوب تمثيل مستو يقطع مخروطاً دورانياً معلوماً فى قطع زائد قائم متى يكون هذا غير ممكن ؟

الخواص البؤرية للمقاطع المخروطية

٣٠ — المطلوب رسم قطع ناقص اذا علم منه : (١) بؤرتان ومماس (ب) بؤرة ونقطتان وطول المحور الاكبر (ح) بؤرة وثلاثة مماسات (د) بؤرة ومماسان ونقطة تماس أحدهما (هـ) بؤرة والدليل المناظر وإحدى نقطه (و) بؤرة والدليل المناظر ومماس (ز) بؤرة وثلاث نقط .

٣١ — اذا علمت ثلاث نقط ب ١ ب ٢ ب ٣ فالمطلوب تعيين نقط تقاطع القطع الناقص الذي بؤرتاه ب ١ ب ٢ مع القطع الناقص الذي بؤرتاه ب ٢ ب ٣ اذا كان المحوران الاكبران للمنحنيين متساويين ويساويان طولاً معلوماً .

٣٢ — اذا علم قطعان ناقصان بالبؤرتين وطول المحور الاكبر لكل منهما واشترك المنحنيان في بؤرة واحدة فالمطلوب رسم المماسات المشتركة لهما .

٣٣ — المطلوب رسم قطع زائد اذا علم منه : (١) بؤرة وثلاثة مماسات (ب) بؤرة ونقطة وأحد خطيه التقريبين (ح) دليل ومماس في الرأس وخط تقريبي واحد .

٣٤ — المطلوب رسم قطع مكافئ اذا علم منه : (١) بؤرة ومماس ونقطة (ب) ثلاثه مماسات أحدها المماس في الرأس (ح) بؤرة ونقطتان (د) بؤرة ومماسان (هـ) مماسان ونقطتا التماس عليهما .

٣٥ — أثبت أن البائرة التي تمر برؤوس المثلث المتكون بثلاثة مماسات لقطع مكافئ — تمر بالبؤرة ثم استخدم هذه الخاصية في تعيين البؤرة والدليل للقطع المكافئ المعلوم بأربعة مماسات .

الامتلاف المركزي

٣٦ — استخدم الامتلاف المركزي في رسم دائرة الانحناء في أحد رأسي قطع زائد اذا علمت هذه الرأس والخطان التقريبان للمنحنى .

٣٧ — اذا علم من قطع زائد اتجاه أحد الخطين التقريبين ونقطتان بالمماسين فهما فالمطلوب رسم دائرة الانحناء في إحدى النقطتين .

٣٨ — اذا علم من قطع مكافئ نقطة مع دائرة الانحناء للقطع فيها وكذا اتجاه المحور فالمطلوب تعيين المماس في الرأس والرأس وكذا تعيين نقطتي تقاطع المنحنى مع مستقيم معلوم .

٣٩ — اذا علم من قطع ناقص أربع نقط والمماس في إحداها فالمطلوب استخدام الالتلاف المركزي في تعيين مركز المنحنى .

٤٠ — المطلوب رسم قطع مكافئ يمر دائرة معلومة في نقطة معينة اذا كان محوره يمر نفس الدائرة في نقطة أخرى معلومة .

الخواص الاسقاطية للمقاطع المخروطية

٤١ — استخدم الحزم المتولفة في تعيين الخطين التقريبين لقطع زائد اذا علم منه اتجاهاهما الخطين وثلاث نقط .

٤٢ — اذا كانت \odot ملتقى ارتفاعات المثلث المتكون من الخطين التقريبين ومماس متغير لقطع زائد فبرهن (بمقتضى نظرية الحزم المتولفة) على أن المحل الهندسي للنقطة \odot هو مقطع مخروطي وعين نوع المنحنى .

٤٣ — اذا كان λ, λ' مستقيمين ثابتين وكانت \odot رأساً لزاوية قائمة تدور في المستوى حول \odot ويقابل ضلعاها المستقيمين في أزواج النقط $1, 1', 2, 2', 3, 3', \dots$ فالمطلوب رسم غلاف المستقيمت $1, 1', 2, 2', 3, 3', \dots$ أذكر نوع هذا الغلاف اذا كان λ هو المستقيم الذي في الانهائية .

٤٤ — المطلوب تعيين مركز المقطع المخروطي المعلوم : (أ) بخمس نقط (ب) بخمسة مماسات (ج) بأربع نقط والمماس في إحداها .

٤٥ — المطلوب رسم الخطين التقريبين للقطع الزائد اذا علم منه ثلاث نقط والمماس في إحداها واتجاه أحد الخطين التقريبين .

٤٦ — المطلوب رسم الخط التقريبي المجهول للقطع الزائد اذا علم منه : (أ) خط تقريبي وثلاثة مماسات (ب) خط تقريبي وثلاث نقط .

٤٧ — المطلوب تعيين الرأس والمحور للقطع المكافئ اذا علم منه : (١) نقطتان والمماس في إحدهما واتجاه المحور (ب) ثلاث نقط واتجاه المحور (ح) مماسان ونقطتا التماس عليهما .

٤٨ — المطلوب تعيين رأسى قطع زائد معلوم بالخطين التقريبين وإحدى نقطه وذلك بواسطة نظرية شتاينر .

٤٩ — اوجد اتجاهى الخطين التقريبين لقطع زائد معلوم بثلاث نقط والمماسين له في اثنتين من هذه النقط .

٥٠ — اذا علمت ثلاثة مستقيمت ونقطة مثل ρ فالمطلوب تعيين اتجاه المحور لقطع مكافئ يمر المستقيمت الثلاثة بحيث تكون ρ واقعة على دليله .

٥١ — برهن على أن جميع المقاطع المخروطية التي تمر بأربع نقط إحداها نقطة ملتقى الارتفاعات في المثلث الذي رؤوسه الثلاثة الأخرى هي قطاعات زائدة قائمة .

٥٢ — المطلوب تعيين نقطتي تقاطع دائرة ومقطع مخروطى معلوم بخمس نقط منها اثنتان واقعتان على الدائرة .

٥٣ — المطلوب تعيين اتجاهى المحورين للقطعين المكافئين اللذين يمران بأربع نقط معلومة .

المنحنيات والسطوح

٥٤ — المطلوب مستقيمان غير متقاطعين ρ و μ والمطلوب تمثيل منحني لولبي يمر μ ويكون ρ محوراً له (افرض ρ موازياً للمستوى الرأسى) .

٥٥ — المطلوب تعيين الرواسم الموازية لمستو معلوم في سطح مسطر اذا كان هذا السطح : (١) سطحاً زائدياً دورانياً (ذاتية واحدة) معلوماً بالمحور والمستقيم الراسم (ب) سطحاً لولبياً قابلاً للاستواء معلوماً بحرف الرجوع .

٥٦ — اذا علم منحنيان لولبيان فالمطلوب تعيين نقطتين على المنحنيين (إن أمكن) يكون المماسان لهما فيهما متوازيين .

٥٧ — المطلوب رسم منحنى التقاطع لازواج السطوح الآتية : (١) سطحان دورانيان محوراها متوازيان وأحدهما سطح زائدى ذووية واحدة (ب) سطح كعكى و سطح أسطوانى محوراها متقاطعان (ح) سطح زائدى ذووية محوره رأسى وآخر أسطوانى محوره مواز للمستوى الاقصى .

الاسقاط الرقى والسطوح الطبوغرافية

٥٨ — المطلوب حل المسائل من ١٧ — ٢١ ومن ٢٥ — ٢٩ بطريقة الاسقاط الرقى .

٥٩ — المطلوب تمثيل الكرة التى تمر بثلاث نقط معلومة وتمس المستوى الرقى .

٦٠ — المطلوب رسم المسقط للرقوم لمربع اذا علم مقياس الميل لمستويه وعلم طول أحد قطريه والزاوية التى يميل بها على المستوى الرقى .

٦١ — اذا علم مقياس الميل لخط تقاطع مستويين فالمطلوب تمثيل هذين المستويين اذا علم أنهما متعامدان وأن أحدهما يميل على مستوى المقارنة بزاوية معلومة .

٦٢ — اذا علم مستقيم ونقطتان α و β فالمطلوب تعيين نقطة على المستقيم مثل γ بحيث تكون الزاوية $\alpha\beta\gamma$ قائمة .

٦٣ — المطلوب إنشاء طريق ذى ميل ثابت (زاوية الميل $= 30^\circ$) على قطعة من الارض معلومة بخريطتها الطبوغرافية .

٦٤ — المطلوب تمثيل سطوح الميل الجانبيه لطريق مستقيم يميل ميلا طويا قدره 50% وذلك فى حالتى الحفر والردم (الميل الجانبي للسطوح $2:3$) .

٦٥ — اذا أريد إنشاء شارع أهى دائرى (المسقط الاقصى لحرفه قوس دائرة) على قطعة أرض معلومة فالمطلوب تمثيل سطوح الميل ورسم تقاطعها مع سطح الارض باستخدام طريقة المقاطع العرضية (بروفيلات) .

الاسقاط المركزى أو المنظور

٦٦ — اذا علم مستقيمان متقاطعان α و β فهما α عمودى على مستوى

الصورة II فالمطلوب إدارة β حول α حتى يتخذ وضعاً موازياً لمستوى معلوم.

٦٧ — اذا علم مستقيمان غير متقاطعين α و β فهما α عمودى على II وعلم مستوى Σ فالمطلوب تعيين مستقيم يلاقى α و β بحيث يوازى Σ ويميل على α بزاوية قدرها 30° .

٦٨ — المطلوب حل المسألة ٢٩ في الاسقاط المركزى اذا كان محور المخروط عمودياً على II.

٦٩ — المطلوب اختيار قطع زائد في مستوى معلوم بحيث يكون منظوره قطعاً ناقصاً ورسم المنحنى الاخير.

٧٠ — المطلوب رسم خط الظل لكرة معلومة مركزها واقع في II اذا علم اتجاه الاضاءة المتوازية.

٧١ — المطلوب تمثيل منحنى لولبي محور مواقع في II اذا علمت الخطوة ونصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها.

٧٢ — المطلوب رسم منحنى تقاطع مستوى معلوم مع سطح زائدى دوراني اذا كان محوره عمودياً على II وعلم هذا المحور وأحد أوضاع المستقيم الراسم.

قاموس المصطلحات

صفحات 1-11

فاموس

ثبت فيما على المفاق الانجليزية والفرنسية والالمانية لاحم المصطلحات المستعملة مرتبة ترتيباً اجدياً .

Spur	direction d'affinité trace	direction of affinity trace	انحلال أو
Interpolieren von stereographische Projektion Achsonometrie kollierte Projektion Normalprojektion Grund- und Auftragsverfahren Zentralprojektion oder Perspektive Lichtstrahlen Horizont Schichtenlinien Zerfallen	interpolatoir de projection stéréographique axonométrie projection cotée projection orthogonale méthode de Monge projection centrale ou perspective rayons lumineux ligne d'horizon horizontales dégénération	interpolation of stereographic projection axonometric projection indexed projection, figured plan orthogonal projection biorthogonal projection central or conical projection or perspective rays of light horizon level lines degeneration	انحفاء (انظر خط، مستوى، نقطة) استيكال (خطوط المنسوب) إسقاط استريوغرافي أكسونومتري د رقي د عمودي د على مستويين متعامدين د مركزي أو منظور أشعة ضوئية أفق (المنظور) أقيات المستوى انحلال منحن

Krümmung	curvature	curvature	انحناء
Torsion	torsion	torsion	الانحناء الثاني لمنحن فرائض
Kollineation	collineation (projective), homographie	(projective) collineation, homography	اشتراك (إسقاطي عام)
(perspective) Affinität	affinité (perspective)	(perspective) affinity	متوازي (مباشر)
allgemeine Affinität	affinité générale	general affinity	متوازي علق
Zentralkollineation	collinéation centrale, homologie	perspective collineation, homology	مركزي
involutorische Kollineation	collinéation involutive	involutoric homology	مركزي تضامى
Brennpunkt	foyer	focus	بؤرة
graduieren	graduer	graduate	نجيم (أنظر صورة بحسمة)
Dualität	dualité	duality	تدرج مستقيم
Involution	involution	involution	توافق
Umkleppung, Umlegung	rebattement	rebattement	تطبيق المستويات
Träger	support	support	حامل (صف من النقط)
Büschel	faisceau	penell	حزمة
Abtrag	déblai	cutting	حفر

Fluchtlinie	droite de fuite	vanishing trace	خط اتجاه (صورة مستقيم في ∞)
Verschwindungslinie	droite évanouissante	a line which projects to infinity	اختفاء (صورة تذهب مستقيمة في ∞)
Projektionsachse	ligne de terre	ground line	الارض
Asymptote	asymptote	asymptote	تقري
Ordnungslinie	ligne de repel	line of correspondance	تناظر
Meridian	méridien	meridian	زوال
Eigenschaftengrenze	courbe d'ombre propre	boundary of true shadow	ظل
Parallelskreise	parallele	parallel	د عرض أو دائرة عرض
Polare	polaire	polar	قطبي
Ganghöhe	pas	pitch	خطوة
Höhenkurven	courbes de niveau	contour lines	خطوط المنسوب
projective Eigenschaften	propriétés projectives	projective properties	خواص إسقاطية
Äquator	équateur	equator	واحدة استواء
Distanzkreise	cercle de distance	distance circle	البعد
Kehlskreise	cercle de gorge	throat circle	حلق
Freiheitsgrade	degrés d'liberté	degrees of freedom	درجات الاطلاق
Ordnung	degré	degree	درجة (المنحنى)

Leitlinie	directrice	directrix	جليل
Träger	support	vectrix	رأس (خطمة من المستقيمت)
Kürzungsende	rétréciture	generatrix, generating line	رأس (خطمة من المستقيمت)
Klause	clausse	class	رتبة (المنفى)
Auftrag	renblat	enhancement	ردم
Kote	cote	index	رقم
Rotationsfläche	surface de revolution	surface of revolution	سطح دوراني
elinschaliges Hyperboloid	hyperboloid à une nappe	hyperboloid of one sheet	زائدي ذو طية
zweischaliges Hyperboloid	hyperboloid à deux nappes	hyperboloid of two sheets	ذو طيتين
topographische Fläche	surface topographique	topographic	طوبوغرافي
abwickelbare Fläche	surface développable	developable surface	قابل الاستواء أو للبسط
Kreistringfläche, Torus	tore	torus	كمكي
Schraubfläche	helicoid	helicoid	لولي
Regelschraubfläche	helicoid réglé	ruled helicoid	" مسطر
Regelfläche	surface réglée	ruled surface	" مسطر
windachtele Fläche	surface sautoire	skew surface	" موج أو أعوج

hyperbolisches Paraboloid	paraboloides hyperbolique	hyperbolic paraboloid	سطح مكافئ زائدي
elliptisches Paraboloid	paraboloides elliptique	elliptic paraboloid	، ، ناقصي
Böschungswfläche	surface de talus	slope surface	، ، ميل
(dreieckiges) Ellipsoid	ellipsoïde	ellipsoid	، ، ناقصي
Drehellipsoid	ellipsoïde de révolution	spheroid	، ، دوراني
Flächen zweiten Grades	quadratiques	quadrics, quadric surfaces	سطوح الدرجة الثانية
singulär	singulier	singular	منحرف (نقط وعامات)
Fluchtrahel	rayon de fuite	visual ray parallel to a given line	منحرف اتجاه
Punktreihe	punctuelle	set, range	صف (من النقط)
stereoskopisches Bild	image stéréoscopique	stereoscopic picture	صورة مجسمة
Rückkehrkante	arête de rebroussement	edge of regression	ضلع الرجوع (سطح قابل الانحناء)
Topographie	topographie	topography	طوبغرافيا
geogr. Länge	longitude	longitude	طول المكان
Eigenheiten	ombre propre	true shadow	ظل حقيقي
Schlagschatten	ombre portée	cast shadow	، ظاهري أو ساقط
breite	latitude	latitude	عرض المكان

Projektivität	projectivité	projectivity	علامة إسقاطية أو إسقاطية عملية الاستيعاب الداخلي الطاريحي محمدي أو ل لنس فرائي محمدي ثاني فموف غلاف المبرديات لنس مستو (انظر منحن مبسوط أو مفرد) فريفيروبيت فوتوفرايديا قطب قطع زائد قطع مكافئ ناتس بربيتية — حركة إسقاطان
innere Orientierung	première orientation		
äußere Orientierung	deuxième orientation		
Hauptnormale	normale principale	principal normal	
Binormale	binormale	binormal	
Einhüllende	enveloppe	envelope	
Phototheodolit	phototheodolite	phototheodolite	
Photogrammetrie	photogrammétrie	photogrammetry	
Pol	pole	pole	
Hyperbel	hyperbole	hyperbole	
Parabel	parabole	parabola	
Ellipse	ellipse	ellipse	
Schraubbewegung	mouvement hélicoïdal	helicoïdal motion	
konjugiert	conjuguée	conjugate	

ähnlich und ähnlich gelegen	homothétiques	homothetic	متشابهان شكلاً ومكاناً
Involutorisch liegend	en involution	in involution	متضامان — صف أو حزمة
Umklappungssache	charnière	axis of rebatement	محور الانطلاق
Affinitätsachse	axe d'affinité	axis of affinity	الاتلاف التوازني
Kollineationsachse	axe de collinéation	axis of homology	" " المركزي
Perspektivachse	axe perspectif	axis of perspectivity	" " المنظورية
wahrer Umriß	contour vrai	true contour	محيط حقيقي
scheinbarer Umriß	contour apparent	apparent contour	" ظاهري
Richtungskegel	cône directeur		خروط توجيه
Projektionszentrum, Sehpunkt	centre de proj., oeil	centre of proj., point of sight	مركز الإسقاط أو البين
Kollineationszentrum	centre de collinéation	centre of homology	" الاتلاف
Zentralpunkt d. Involution	centre de l'involution	centre of involution	مركز التضام
Perspektivzentrum	centre perspectif	centre of perspectivity	" المنظورية
Aufgaben	problèmes	metric problems	مسائل قياس
Lageaufgaben	problèmes de position	problems of position	وضع
erste Hauptgerade	droite horizontale	horizontal line	مستقيم أفقي

zweite Hauptgerade	droite frontale	frontal line	مستقيم أمامي
Fälligerade	ligne de plus grande pente	line of greatest slope	تقريب (الخط خط تقريبي)
Gegenachsen	droites linéaires	vanishing lines	تقريباً الخطوط العظمى في المستوى
Grundebene	sol	ground plane	مستويان عددان لالتلاف مركبي
Verschwindungsebene	plan évanouissant	visual plane parallel to picture plane	مستوي أرض
Grundrißebene	plan horizontal	horizontal plane	اختفاء
Horizontebene	plan d'horizon	horizon plane	أفق (موتج)
Profil	profil	profile	الافتق (منظور)
Bildebene	tableau	picture plane	الشكل الجانبي
Koinzidenzebene	forme bisecteur	2nd octant plane	الصورة
unvuiptotische Ebene	plan asymptotique	asymptotic plane	مستوي ألتلاف (موتج)
Richtungsebene	plan directeur	vertical plane	تقريب
Aufrißebene	plan vertical	projecting plane	توجيه (سطوح مسطحة)
projizierende Ebene	plan projetant	datum plane	رأس (موتج)
Vergleichsebene	plan de comparaison	occluding plane	مستط
Schnittlegungsebene	plan oculateur		مقارنة
			ملاحظ

Tangentialebene	plan tangent	tangent plane	مستوى عاى مسقط افق
Grundriss	projection horizontale	plan	منظورى
perspektivischer Grundriss	perspective de la proj. horiz.	perspective plan	رأسى
Aufriß	projection verticale	elevation	مسامد
Seitenriß	nouvelle projection	auxiliary projection	مدال المستقيم
Intervall	intervalle	interval	مسامد المسامات لمنحن مستو (أنظر
Kegeleschnitt	conique	conic	منحن باسط أو قارد
Beschleunigungsstab	échelle de pente	scale of slope	مقياس انحدار
Zurechnung, Entsprechen	correspondance	correspondance	مقياس الميل
projektive Verwandtschaft	projection homographique	projective transformation	ملاصق (أنظر مستوى)
Konvolution	transformation convolutive	convolution	منظورة
aus der Natur vom Lande her	correspondance naturelle	natural correspondance	إسقاطية
Verfahren, Methode	correspondance et méthode	correspondance et méthode	تزاوجية
Projektiv Aktivität	projective activité	projective activité	منظورة القرد للقرود
			تبادلية
			منظورة

Exponent	de l'exponentielle	exponential	منحنى باسطة
Exponential	exponentiel	exponential	• جبرى
Equation	équation	équation	• حل و فنى
Ligne des abscisses l'axe des abscisses	ligne de l'axe des abscisses	line of abscissal slope	• ذرىل اعظم
Homocentrique	homocentrique	homocentric	• ذرىل ثابت
Homocurvature	homocurvature	homocurvature	• راسم
Schraublinie	schraublinie	helix	• فراغى
Revolute	revolute	revolute	• لولبى
Rechte Kante	rechte Kante	plane curve	• مبسوط او مفرد
umgekehrte Fange	umgekehrte Fange	inversion	• مستو
projektiv	homographique, projectif	homographic, projective	• موقع (بند تطبيق مسو)
affin	affine	affine	• مؤلف إسقاطياً (مضان أو حوسنان)
perspektiv-kollinear	homologique	homologous	• اختلافاً متوازياً
Affinitätsverhältnis	rapport	rapport	• مركزياً
Charakteristick	caractéristique	characteristic	• نسبة الاختلاف المتوازى
harmonisch	rapport harmonique	harmonic ratio	• المركزى
			• توافقية

Doppelverhältnis	rapport anharmonique	cross ratio	نسبة مضاعفة
Fluchtpunkt	point de fuite	vanishing point	نقطة إجهاء
Verschwundungspunkt	point évanouissant	a point which projects to infinity	اختفاء
Kernpunkt	point fondamental	fundamental point	أساسية للوحة تصوير
Teilungspunkt	point de distance relatif	measuring point	القياس أو البعد النسبي
Wendepunkt	point d'inflexion	point of inflexion	انقلاب
Hauptpunkt	point principal	centre of vision	رئيسية (المنقور)
Rückkehrpunkt	point de rebroussement	cusps	رجوع
Doppelpunkt	point double	double point	مزدوجة
isolierter Punkt	point isolé	isolated point	منعزلة
Doppelpunkte	points doubles	double points	نقطتان مضاعفتان

